

# 1: Opérations sur les ensembles – Corrigés

1. Montrer que  $X \setminus (X \setminus A) = A$ .

**Solution.** Soit  $x \in X \setminus (X \setminus A) \Leftrightarrow x \notin (X \setminus A) \Leftrightarrow x \in A$ .

2. (c) Montrer que:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**Solution.**

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

3. (a) Montrer que  $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

**Solution.** Soit  $x \in X \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ .

4. (b) Montrer que:  $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$

**Solution.** Soit  $x \in X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \Leftrightarrow x \notin \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \Leftrightarrow x \notin A_1 \text{ ou } x \notin A_2 \text{ ou } \dots \Leftrightarrow$   
 $x \in (X \setminus A_1) \text{ ou } x \in (X \setminus A_2) \dots \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$

5. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

- |                      |                                 |                                    |
|----------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| (a) $A \subset B$ .  | (c) $A \cup B = B$ .            | (e) $B \cup (X - A) = X$ .         |
| (b) $A \cap B = A$ . | (d) $(X - B) \subset (X - A)$ . | (f) $A \cap (X - B) = \emptyset$ . |

**Solution.**

- (a)  $\Rightarrow$  (b) Supposons que  $A \subset B$  alors  $A = A \cap A \subset A \cap B \subset A$ .  
 (b)  $\Rightarrow$  (c)  $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = \emptyset \cup A \cup (B - A) = B$ .  
 (c)  $\Rightarrow$  (d)  $A \subset A \cup B = B \Leftrightarrow (X - B) \subset (X - A)$ .  
 (d)  $\Rightarrow$  (e)  $X = B \cup (X - B) \subset B \cup (X - A) \subset X$ .  
 (e)  $\Rightarrow$  (f)  $B \cup (X - A) = X \Rightarrow (X - B) \cap A = \emptyset$ .  
 (f)  $\Rightarrow$  (a)  $(X - B) \cap A = \emptyset \Rightarrow (X - B) \subset (X - A) \Rightarrow A \subset B$ .

6. Facile.

7. Montrer que si  $A \subset \emptyset$  alors  $A = \emptyset$ .

**Solution.** On a  $\emptyset \subset A$  toujours et  $A \subset \emptyset$  par hypothèse donc  $\emptyset \subset A \subset \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ .

8. Soient  $X = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  et  $C = \{3, 4, 5, 6\}$ .

(d) Trouver  $X \setminus (A \cup B) = \{5, 7, 9\}$

9. Montrer que: (a)  $A - B = A \cap B^c$

**Solution.** Soit  $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in (X - B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c)$ .

(b)  $(A - B) \cap B = (A \cap B^c) \cap B = \emptyset$

10. Soient  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{2, 3\}$  et  $C = \{3, 4\}$ .

(a)  $A \times (B \cup C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$

(b)  $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$

11. Montrer que  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

**Solution.**

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cap C)\} \\ &= \{(x, y) : x \in A, (y \in B \text{ et } y \in C)\} \\ &= \{(x, y) : (x \in A, y \in B) \text{ et } (x \in A, y \in C)\} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

12. Trouver l'ensemble des parties de  $X$ ,  $\mathcal{P}(X)$  si:

**Solution.**

(a)  $X = \{1, 2, 3\}$  alors  $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ .

(b)  $X = \{1, \{2, 3\}\}$  alors  $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$ .

13. Si  $\text{Card}(A) = n < \infty$ , alors  $\text{Card}[\mathcal{P}(A)] = 2^n$ .



## 2. Opérations sur les fonctions – Corrigés

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Trouver:  
(a)  $f[\{1, 3, 4, 7\}]$  (b)  $f[1, 4]$  (c)  $f^{-1}[\{4, 9\}]$  (d)  $f^{-1}[1, 4]$

**Solution.**

- (a)  $f[\{1, 3, 4, 7\}] = \{f(1), f(3), f(4), f(7)\} = \{1, 9, 16, 49\}$   
(b)  $f[1, 4] = [1, 16]$   
(c)  $f^{-1}[\{4, 9\}] = \{-3, -2, 2, 3\}$   
(d)  $f^{-1}[1, 4] = [-2, -1] \cup [1, 2]$

2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 - 1$ . Trouver:  
(a)  $f^{-1}[\{15\}]$  (b)  $f^{-1}[\{-16\}]$  (c)  $f^{-1}[\{x : x \leq 0\}]$  (d)  $f^{-1}[\{x : 3 \leq x \leq 24\}]$

**Solution.**

- (a)  $f^{-1}[\{15\}] = \{-4, +4\}$   
(b)  $f^{-1}[\{-16\}] = \emptyset$   
(c)  $f^{-1}[\{x : x \leq 0\}] = [-1, 1]$   
(d)  $f^{-1}[\{x : 3 \leq x \leq 24\}]$

3. Soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $A, B \subset X$  et  $\{A_i : i \in I\}$  est une collection de sous-ensembles de  $X$  alors:

- (a)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  (d) Si  $A \subset B$  alors  $f(A) \subset f(B)$   
(b)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  (e)  $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$   
(c)  $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$  (f)  $f(\cap_{i \in I} A_i) \subset \cap_{i \in I} f(A_i)$

**Solution.**

(a)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

Soit  $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow$  il existe  $x \in X : y = f(x) \in f(A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$  ou  $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$  ou  $f(x) \in f(B) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \cup f(B)$ .

(f)  $f(\cap_{i \in I} A_i) \subset \cap_{i \in I} f(A_i)$

Soit  $y \in f(\cap_{i \in I} A_i) \Rightarrow \exists x \in X : y = f(x) \in f(\cap_{i \in I} A_i) \Rightarrow x \in \cap_{i \in I} A_i \Rightarrow x \in A_i$  pour tout  $i \Rightarrow x \in A_i$  pour tout  $i \Rightarrow y = f(x) \in f(A_i)$  pour tout  $i \Rightarrow y = f(x) \in \cap_{i \in I} f(A_i)$ .

4. Soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $A \subset X$  et  $B \subset Y$ .

- (a) Montrer que  $A \subset f^{-1}(f(A))$  et on obtient égalité ssi  $f$  est injective.  
(b) Montrer que  $f(f^{-1}(B)) \subset B$  et on obtient égalité ssi  $f$  est surjective.

**Solution.**

(a) Montrer que  $A \subset f^{-1}(f(A))$  et on obtient égalité ssi  $f$  est injective.

Montrons que  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .

Soit  $a \in A$  alors  $f(a) \in f(A)$  qui implique que  $a \in f^{-1}[f(A)]$ . Donc  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .

Maintenant on veut montrer que  $A = f^{-1}(f(A))$  si et seulement si  $f$  est injective.

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $f$  est injective et  $x \in f^{-1}(f(A))$  alors  $f(x) \in f(A)$ . Il existe donc  $a \in A$  tel que  $f(a) = f(x)$  mais puisque  $f$  est injective alors  $a = x \in A$ . Donc  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ . En outre on sait que  $A \subset f^{-1}(f(A))$  donc si  $f$  est injective on a  $f^{-1}(f(A)) = A$ .

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $f^{-1}(f(A)) = A$ . Si on pose  $A = \{a\}$  on a  $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$ .  
Donc  $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$  qui signifie que  $f$  est injective.

**Contre exemple:** soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = x^2$  et  $A = \{1\}$  alors  $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\} \supsetneq A = \{1\}$ , due au fait que  $f$  n'est pas injective.

5. Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux applications et  $C \subset Z$ , montrer que  $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)]$ .

**Solution.**

( $\subseteq$ ) Supposons que  $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$ . Alors,  $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in C$ . Alors par la définition des images inverses,  $f(x) \in g^{-1}(C)$ . Cela montre que  $f^{-1}(g^{-1}(C)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(C)$ .

( $\supseteq$ ) Supposons que  $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$ . Alors,  $f(x) \in g^{-1}(C)$  et donc  $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in C$ . Par la définition des images inverses,  $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$  et  $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$ . Cela montre que  $(g \circ f)^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(C))$ .

Les deux assertions ensemble montrent que  $(f \circ g)^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)]$ .

6. Soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $A, B \subset Y$  et  $\{B_i : i \in I\}$  est une collection de sous-ensembles de  $Y$  alors:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$           | (e) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ |
| (b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$           |  |
| (c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ | (f) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ |
| (d) Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$    |  |

**Solution.**

- (a)  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .

Soit  $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A$  ou  $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$  ou  $f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .

- (f)  $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ .

Soit  $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i \Leftrightarrow f(x) \in B_i$  pour tout  $i \in I \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i)$  pour tout  $i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ .

7. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin(\pi x)$ .

- (a) Montrer que  $f$  est ni injective ni surjective.  
 (b) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de  $f$  de telle sorte que la nouvelle fonction soit surjective mais pas injective.  
 (c) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de  $f$  de telle sorte que la nouvelle fonction soit injective mais pas surjective.  
 (d) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de  $f$  de telle sorte que la nouvelle fonction soit bijective.

**Solution.**

- (a) Montrer que  $f$  est ni injective ni surjective.

$f(1) = f(-1) = 0$  donc  $f$  n'est pas injective.

$f^{-1}(2)$  n'existe pas donc  $f$  n'est pas surjective.

- (b) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de  $f$  de telle sorte que la nouvelle fonction soit surjective mais pas injective.

La restriction  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  est surjective mais pas injective.

- (c) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de  $f$  de telle sorte que la nouvelle fonction soit injective mais pas surjective.

La restriction  $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  est injective mais pas surjective.

- (d) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de  $f$  de telle sorte que la nouvelle fonction soit bijective.

La restriction  $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  est bijective.

### 3: Espaces métriques – Corrigés

1. Soit  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  on définit :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i - y_i|$$

(a) Vérifier l'inégalité triangulaire pour les distances  $d_1$  et  $d_\infty$ .

(b) Dessiner les boules unitaires ouvertes  $B((0, 0), 1)$  pour  $d_1$  et  $d_\infty$  quand  $X = \mathbb{R}^2$ .

**Solution.** (a)

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| = d_1(x, z) + d_1(z, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) &= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i - y_i| = \max_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i - z_i| + \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |z_i - y_i| = d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y). \end{aligned}$$

(b) Voir les figures des boules unité dans les notes de cours.

2. Quelles conditions doit on avoir sur  $f : X \rightarrow Y$ , pour que  $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$  soit une distance sur  $X$ .

**Solution.** Les conditions M2 et M3 sont satisfaites pour toute fonction continue  $f$ . Donc on doit vérifier condition M1.  $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$  si et seulement si  $f$  est injective.

3. Montrer que  $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$  est une distance sur  $X = \mathbb{R}^2$ , et que la boule

$$B(x_0, r) = \begin{cases} x_0 & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

**Solution.**

Clairement les conditions M1 et M2 sont satisfaites.

On doit donc vérifier condition M3:  $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ .

Si  $\delta(x, z) = 1$  ou bien  $\delta(z, y) = 1$ , alors M3 est satisfaite car  $\delta(x, y) \leq 1$ .

Si  $\delta(x, z) = \delta(z, y) = 0$  alors  $x = y = z$  et donc  $0 = \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y) = 0$ .

Alors, M3 est vérifiée par  $\delta$  qui est donc une métrique de  $\mathbb{R}^2$ .

Par définition on a  $B(x_0, r) = \{x \in X : \delta(x_0, x) < r\}$ .

Si  $r > 1$  alors  $\delta(x_0, x) < r$  pour tout  $x \in X$  puisque  $\delta(x_0, x) < 1$ . Donc  $B(x_0, r) = X$ .

Si  $r \leq 1$  alors  $\delta(x_0, x) < r \leq 1 \Rightarrow \delta(x_0, x) = 0 \Rightarrow x = x_0$ . Donc  $B(x_0, r) = \{x_0\}$ .

4. Soit  $X = C[a, b]$  et  $d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$ . Montrer que  $d$  est une métrique.

**Solution.** Facile.

5. Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $A \subseteq X$ . Montrer que:

- (a)  $\text{Int } A \subseteq A \subseteq \text{Adh } A$ ;
- (b)  $\text{Fr } A$  et  $\text{Adh } A$  sont fermés et  $\text{Int } A$  est ouvert dans  $X$ .
- (c)  $\text{Int } A = A$  si et seulement si  $A$  est ouvert.
- (d)  $\text{Adh } A = A$  si et seulement si  $A$  est fermé.
- (e)  $\text{Fr } A \subseteq A$  si et seulement si  $A$  est fermé.
- (f)  $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \text{Adh } A$  et  $\text{Adh}(X \setminus A) = X \setminus \text{Int } A$ .

**Solution.**

- (a)  $\text{Int } A \subseteq A \subseteq \text{Adh } A$ . Par définition.
- (b)  $\text{Fr } A$  et  $\text{Adh } A$  sont fermés et  $\text{Int } A$  est ouvert dans  $X$ .  
 $\text{Fr } A = \text{Adh}(A) - \text{Int}(A) = \text{Adh}(A) \cap (\text{Int } A)^c$  qui est fermé.  
 $\text{Adh } A$  est l'intersection de tous les fermés contenant  $A$ , c'est donc un fermé.  
 $\text{Int } A$  est l'union d'ouverts donc c'est un ouvert.
- (c)  $\text{Int } A = A$  si et seulement si  $A$  est ouvert.  
 Si  $\text{Int } A = A$  alors  $A$  est ouvert puisque  $\text{Int } A$  est ouvert.  
 Si  $A$  est ouvert alors  $A = \text{Int } A$  car  $\text{Int } A$  est le grand ouvert contenu dans  $A$ .
- (d)  $\text{Adh } A = A$  si et seulement si  $A$  est fermé.
- (e)  $\text{Fr } A \subseteq A$  si et seulement si  $A$  est fermé.  
 $(\Leftarrow)$  Si  $A$  est fermé alors  $\text{Adh } A = A \cup \text{Fr } A = A$  donc  $\text{Fr } A \subseteq A$ .  
 $(\Rightarrow)$  Par négation, si  $A$  n'est pas fermé alors il existe  $x \in \text{Adh } A - A$  donc  $x \in \text{Fr } A - A$  c.a.d.  $\text{Fr } A \not\subseteq A$ .
- (f)  $\text{Int}(X - A) = X - \text{Adh } A$  et  $\text{Adh}(X - A) = X - \text{Int } A$ .  
 (1)  $A \subseteq \text{Adh } A \Rightarrow X - \text{Adh } A \subseteq X - A$  de plus  $X - \text{Adh } A$  est un ouvert contenu dans  $X - A$ , donc  $X - \text{Adh } A \subseteq \text{Int}(X - A)$ .  
 (2)  $\text{Int}(X - A) \subseteq (X - A)$  donc  $A \subseteq X - \text{Int}(X - A)$  qui est fermé donc  
 $A \subseteq \text{Adh } A \subseteq X - \text{Int}(X - A) \Rightarrow \text{Int}(X - A) \subseteq X - \text{Adh } A$ .  
 Les deux assertions impliquent que  $\text{Int}(X - A) = X - \text{Adh } A$ .  
 Si on remplace  $A$  par  $X - A$  dans l'égalité précédente on obtient  $\text{Adh}(X - A) = X - \text{Int } A$ .

6. Pour chacune des parties de  $\mathbb{R}$  ci-dessous, déterminer:  $\text{Adh } A_i$ ,  $\text{Int } A_i$ ,  $\text{Fr } A_i$ ,  $\text{Is } A_i$  (points isolés) et  $A'_i$  (points d'accumulations)  
 $A_1 = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup \{4, 7\}$ ,  $A_2 = \mathbb{Z}$ ,  $A_3 = \mathbb{Q}$ ,  $A_4 = \{(-1)^k + 1/2^k : k \in \mathbb{N}\}$

**Solution.**

	$\text{Adh}(A_i)$	$\text{Int}(A_i)$	$\text{Fr}(A_i)$	$\text{Is}(A_i)$	$A'_i$
$A_1$	$(-\infty, 2] \cup \{4, 7\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, 2)$	$\{0, 2, 4, 7\}$	$\{4, 7\}$	$(-\infty, 2]$
$A_2$	$\mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\emptyset$
$A_3$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
$A_4$	$A_4 \cup \{-1, 1\}$	$\emptyset$	$A_4 \cup \{-1, 1\}$	$A_4$	$\{-1, 1\}$

7. Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $A \subset X$ . Montrer que les propositions suivantes son équivalentes:
- (a)  $x$  est un point d'accumulation de  $A$ .
  - (b) Tout voisinage  $V_x$  de  $x$  contient une infinité de points de  $A$ .
  - (c)  $x \in \text{Adh}(A - \{x\})$ .

**Solution.**

(a) $\Rightarrow$ (b). Supposons que  $V_x$  contient un nombre fini  $\{a_1, \dots, a_n\}$  de points de  $A$ . Soit  $r = \inf\{d(x, a_i) : i = 1, \dots, n\}$ , alors  $V_x \cap B(x; r/2)$  est un voisinage de  $x$  qui ne contient aucun point de  $A$  différent de  $x$ . Donc  $x$  n'est pas un point d'accumulation de  $A$ .

(b) $\Rightarrow$ (c). Supposons que tout voisinage  $V_x$  de  $x$  contient une infinité de points de  $A$ . Alors  $(V_x - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$  c.a.d. que  $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$ .

(c) $\Rightarrow$ (a). Supposons que  $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$ . Alors pour tout voisinage  $V_x$  on a  $(A - \{x\}) \cap V_x$  contient au moins un point de  $A$ , qui entraîne que  $x \in A'$ .

8. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts denses de  $X$  est un ouvert dense de  $X$ .

**Solution.**

Il suffit de le montrer pour deux ouverts denses. Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux ouverts denses parties de  $X$ . Il est clair que  $D = D_1 \cap D_2$  est un ouvert. Puisque  $D_1$  est dense alors pour tout  $x \in X$  et  $r > 0$  on a:  $A = B(x, r) \cap D_1 \neq \emptyset$ . Donc  $A$  est un ouvert non vide, qui entraîne que  $A \cap D_2 \neq \emptyset$  car  $D_2$  est dense dans  $X$ . Mais  $A \cap D_2 = B(x, r) \cap (D_1 \cap D_2) \neq \emptyset$  qui montre que  $D = D_1 \cap D_2$  est un ouvert dense de  $x$ .

9. Soient  $A$  et  $B$  des parties bornées d'un espace métrique  $X$ .

(a) Montrer que  $\text{diam}(A) = \text{diam}(\mathbf{Adh} A)$ .

(b) Montrer que  $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + d(A, B)$ .

**Solution.**

(a) (1)  $A \subset \mathbf{Adh} A$  donc  $\text{diam} A \leq \text{diam}(\mathbf{Adh} A)$ .

(2) Réciproquement si  $x, y \in \mathbf{Adh} A$  il existent  $x', y' \in A$  tels que  $d(x, x') < \epsilon$  et  $d(y, y') < \epsilon$ , alors  $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) \leq d(x', y') + 2\epsilon$ .

Donc pour tout  $\epsilon > 0$  on a:

$$\begin{aligned} \text{diam}[\mathbf{Adh}(A)] &= \sup_{x, y \in \mathbf{Adh} A} d(x, y) \\ &\leq \sup_{x', y' \in A} d(x', y') + 2\epsilon \\ &= \text{diam}(A) + 2\epsilon, \end{aligned}$$

qui entraîne que  $\text{diam}(\mathbf{Adh} A) \leq \text{diam} A$ .

Finalement les deux inégalités montrent que  $\text{diam}(\mathbf{Adh} A) = \text{diam} A$ .

(b) Si  $x, y \in A \cup B$ ,  $a \in A$  et  $b \in B$  alors

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \\ &\leq \text{diam}(A) + d(a, b) + \text{diam}(B), \end{aligned}$$

donc

$$d(x, y) - \text{diam}(A) - \text{diam}(B) \leq d(a, b) = d(A, B) \leq d(a, b)$$

et finalement

$$\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + d(A, B).$$

## 4: Continuité sur les Espaces Métriques – Corrigés

1. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  on définit:

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a), \quad \text{dist}(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b), \quad \text{diam}(A) = \sup_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

- (a) Trouver  $\text{dist}(0, \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ ,  $\text{dist}(\sqrt{3}, \mathbb{Q})$ ,  $\text{dist}(0, (2, 4])$ .  
(b) Si  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$  et  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ , calculer  $d(A, B)$ .  
(c) Calculer  $\text{diam}([0, 1] \cap \mathbb{Q})$  et  $\text{diam}([-2, 1] \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ .

**Solution.**

- (a)  $\text{dist}(0, \mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 0$ ,  $\text{dist}(\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = 0$ ,  $\text{dist}(0, (2, 4]) = 2$ .  
(b) Si  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$  et  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ , alors  $d(A, B) = 0$ .  
(c)  $\text{diam}([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$  et  $\text{diam}([-2, 1] \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 3$ .

2. Montrer que  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est toujours continue dans les cas suivant:

- (a)  $X = Y$  et  $f(x) = x$  pour tout  $x \in X$ .  
(b)  $f(x) = y_0$  pour tout  $x \in X$ , où  $y_0$  est une constante.  
(c)  $(X, d_X) = (Y, d_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ , et  $f(x) = x^2$ .  
(d)  $d_X$  est la distance discrète.

**Solution.**

- (a) Si  $O$  un ouvert de  $X = Y$  alors  $f^{-1}(O) = O$  est aussi un ouvert.  
(b) Si  $O$  un ouvert de  $Y$ , alors  $f^{-1}(O) = \emptyset$  si  $y_0 \notin O$  et  $f^{-1}(O) = X$  si  $y_0 \in O$  et les deux sont des ouverts de  $X$ .  
(c) Si  $0 < a < b$  alors,  $f^{-1}(a, b) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (-\sqrt{b}, -\sqrt{a})$  qui ouvert dans  $\mathbb{R}$ .  
Si  $a < 0 < b$  alors,  $f^{-1}(a, b) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{b})$  qui ouvert dans  $\mathbb{R}$ .  
Si  $a < b < 0$  alors,  $f^{-1}(a, b) = \emptyset$  qui ouvert dans  $\mathbb{R}$ .  
(d) Dans ce cas  $f^{-1}(U)$  est ouvert pour tout  $U \subset Y$ , donc  $f$  est continue.

3. Montrer que les intervalles  $(-1, 1)$  et  $(2, 5)$  sont homéomorphes dans  $(\mathbb{R}, d)$ .

**Solution.** Considérons  $f : (-1, 1) \rightarrow (2, 5)$  définie par  $f(x) = 2 + \frac{3(x+1)}{2}$  qui est clairement un homéomorphisme, car  $f$  est une bijection et  $f(-1, 1) = (2, 5)$ . De plus puisque  $f$  est une fonction linéaire son inverse existe et est continue.

4. Soit  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$ .

Montrer que  $f$  est un homéomorphisme.

**Solution.** On note que  $f$  est continue sur  $(-1, 1)$ ,  $f'(x) = \frac{1}{(1 - |x|)^2} > 0$  donc  $f$  est injective et  $f(-1, 1) = \mathbb{R}$  donc  $f$  est surjective. De plus  $f^{-1}(x) = f(x)$  elle est donc continue. Cela établi que  $f$  est en effet un homéomorphisme.

5. Supposons que  $A \subseteq X, B \subseteq Y$  et  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme avec  $f(A) = B$ . Montrer que les restrictions  $g = f|_A : A \rightarrow B$  et  $h = f|_{X-A} : X - A \rightarrow Y - B$  sont des homéomorphismes.

**Solution.**

Puisque  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme alors  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est continue.

$g = f|_A : A \rightarrow B$  est continue et bijective et en plus  $g^{-1} = f^{-1}|_B : B \rightarrow A$  est continue.

$h = f|_{X-A} : X - A \rightarrow Y - B$  est continue et bijective et en plus  $h^{-1} = f^{-1}|_{Y-B} : Y - B \rightarrow X - A$  est continue.



6. Montrer que  $f : X \rightarrow Y$  est continue ssi  $f(\text{Adh } A) \subseteq \text{Adh}[f(A)]$  pour tout  $A \subset X$ .

**Solution.**

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $f$  est continue et  $A \subset X$ , alors  $A \subset f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\text{Adh } f(A)]$  ou  $f^{-1}[\text{Adh } f(A)]$  est fermé car  $f$  est continue. Mais  $\text{Adh } A$  est le plus petit fermé contenant  $A$ , alors  $A \subset \text{Adh } A \subset f^{-1}[\text{Adh } f(A)]$  qui entraîne que  $f(\text{Adh } A) \subset \text{Adh } f(A)$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $f[\text{Adh } A] \subset \text{Adh}[f(A)]$ . On veut montrer que l'image inverse d'un fermé de  $Y$  est un fermé de  $X$ . Soit  $F$  un fermé de  $Y$  et  $A = f^{-1}(F) \subset X$ . on a  $f(\text{Adh } A) \subset \text{Adh}[f(A)] = \text{Adh}[f(f^{-1}(F))] \subset \text{Adh } F = F$ . Donc  $\text{Adh } A \subset f^{-1}[f(\text{Adh } A)] \subset f^{-1}(F) = A$ . Cela montre que  $A = f^{-1}(F)$  est un fermé de  $X$  et donc  $f$  est continue.

7. Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  continues. Montrer que si  $(g \circ f)$  est un homéomorphisme et si  $f$  est surjective alors  $f$  et  $g$  sont des homéomorphismes.

**Solution.** Supposons que  $(g \circ f)$  est un homéomorphisme et que  $f$  est surjective. Alors  $G = (g \circ f)(E) = g[f(E)] = g(F)$ , qui montre que  $g$  est aussi surjective. Puisque  $(g \circ f)$  est un homéomorphisme alors  $h = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$  est continue de plus on a:

$(h \circ g) \circ f = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = 1_E$  donc  $f$  est injective.

$f \circ (h \circ g) = f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g = 1_F$  donc  $f$  est surjective.

$h \circ g = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g = f^{-1}$  est continue car c'est la composée de deux fonction continues.

Donc  $f$  est un homéomorphisme.

$g = (g \circ f) \circ f^{-1}$  est un homéomorphisme car c'est la composée de deux homéomorphismes.

8. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{Q}$ . Montrer que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Indication:  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Solution.**

Soit  $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{R}$  alors il existe une suite  $(x_n) \in \mathbb{Q}$  telle que  $x_n \rightarrow x$ .

Puisque  $f$  est continue alors  $0 = f(x_n) \rightarrow f(x)$  quand  $n \rightarrow \infty$  donc  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

9. Soient  $X$  un espace métrique et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est continue si et seulement si pour tout  $a \in \mathbb{R}$  les ensembles  $f^{-1}(-\infty, a)$  et  $f^{-1}(a, \infty)$  sont des ouverts de  $X$ .

**Solution.**

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $f$  est continue. Puisque les ensembles  $(-\infty, a)$  et  $(a, \infty)$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  est continue alors  $f^{-1}(-\infty, a)$  et  $f^{-1}(a, \infty)$  sont des ouverts de  $X$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $a < b$  alors  $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$  et que  $f^{-1}(a, b) = f^{-1}(-\infty, b) \cap f^{-1}(a, \infty)$  est un ouvert de  $X$ . Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , alors  $O = \cup_i (a_i, b_i)$  et donc  $f^{-1}O = f^{-1}[\cup_i (a_i, b_i)] = \cup_i f^{-1}(a_i, b_i)$  est un ouvert de  $X$  car c'est l'union d'ouverts de  $X$ .

10. Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $A \subset X$ . Pour  $x \in X$ ;  $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ .

(a) Montrer que si  $x, y \in X$  alors  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ .

(b) En déduire que la fonction  $f(x) = d(x, A)$  est continue.

(c) Montrer que  $\text{Adh } A = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$

(d) On suppose  $x_0 \notin \text{Adh } A$ . Trouver deux ouverts  $U$  et  $V$  qui séparent  $x_0$  et  $A$ .

**Solution.**

(a) Soit  $a \in A$  alors  $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$  qui entraîne que  $\text{dist}(x, A) \leq d(x, y) + \text{dist}(y, A)$ .  
Donc  $\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq d(x, y)$  (1).

Si nous échangeons  $x$  et  $y$  dans (1) on trouve  $\text{dist}(y, A) - \text{dist}(x, A) \leq d(x, y)$  (2).

Les inégalités (1) et (2) nous donne  $|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$ .

(b)  $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ , donc  $f$  est continue.

(c) Soit  $B = \{x \in X : f(x) = \text{dist}(x, A) = 0\}$ .

Si  $x \in B$  alors soit  $x \in \text{Int } A$  ou bien  $x \in \text{Fr } A$  qui montre que  $B \subset \text{Adh } A$ .

L'ensemble  $\{0\}$  est fermé dans  $[0, \infty)$  et  $f(x) = \text{dist}(x, A)$  est continue donc  $f^{-1}(\{0\})$  est fermé dans  $X$ . Mais  $f^{-1}(\{0\}) = B \supset A$  et  $\text{Adh } A$  est le plus petit fermé contenant  $A$  donc  $\text{Adh } A \subset f^{-1}(\{0\}) = B$ .

Les deux inclusions nous donnent que  $\text{Adh } A = \{x \in X : f(x) = \text{dist}(x, A) = 0\}$ .

(d) On suppose  $x_0 \notin \text{Adh } A$ . Trouver deux ouverts  $U$  et  $V$  qui séparent  $x_0$  et  $A$ .

Soit  $x_0 \notin \text{Adh } A$  alors  $\text{dist}(x_0, A) = r > 0$ . Soient  $U = B(x_0, r/3)$  et  $V = \bigcup_{a \in A} B(a, r/3)$ ,

alors  $U$  et  $V$  sont deux ouverts qui séparent  $x_0$  et  $A$ .



## 5: Espaces Métriques Complètes – Corrigés

1. Montrer les propositions suivantes:

- (a) Toute suite convergente est de Cauchy.
- (b) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
- (c) Toute suite de Cauchy est bornée.
- (d) Toute suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.

**Solution.** Pour les parties (a), (c) et (d) voir Théorème 4.13 page 67.

(b) Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy, alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $m, n > N$  alors  $d(x_m, x_n) < \epsilon$ . Soit  $(x_{n_k})$  une sous-suite de  $(x_n)$ . Si on choisit  $n_{k_1}, n_{k_2} > N$  alors  $d(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}) < \epsilon$ . Donc  $(x_{n_k})$  est une suite de Cauchy aussi.

2. Avec quelles des distances  $d_a, d_b, d_c$ ,  $\mathbb{R}$  est-il complet?

- (a)  $(\mathbb{R}, d_a)$  est complet où  $d_a(x, y) = |x^3 - y^3|$ .
- (b)  $(\mathbb{R}, d_b)$  n'est pas complet où  $d_b(x, y) = |e^x - e^y|$ .
- (c)  $(\mathbb{R}, d_c)$  n'est pas complet où  $d_c(x, y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$ .

**Solution.**

(a) Soit  $(x_n)$  une suite  $d_a$ -Cauchy, donc  $d_a(x_n, x_m) = |x_n^3 - x_m^3| \rightarrow 0$  quand  $m, n \rightarrow \infty$ .

Donc  $(x_n^3)$  est  $d_u$ -Cauchy sequence, est complet puisque  $(\mathbb{R}, d_u)$  est complet alors  $(x_n^3)$  est convergente.

Il existe donc  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $|x_n^3 - y| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Soit  $x = y^{1/3}$ , alors  $x_n^3 \rightarrow x^3 \in \mathbb{R}$  c.a.d. que  $d_a(x_n, x) = |x_n^3 - x^3| = |x_n^3 - y| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Donc  $(x_n)$  est  $d_a$ -convergent qui entraîne que  $(\mathbb{R}, d_a)$  est complet.

(b) Montrer que la suite  $(-n)$  est  $d_b$ -Cauchy mais ne converge pas dans  $(\mathbb{R}, d_b)$ .

(c) Soit  $(\mathbb{R}, d_u)$  l'espace métrique complet muni de la distance usuelle. Considérons la suite  $(n)$  dans  $\mathbb{R}$ . La suite  $(\tan^{-1} n)$  converge vers  $\pi/2$  dans  $(\mathbb{R}, d_u)$ . Donc  $(\tan^{-1} n)$  est  $d_u$ -Cauchy qui entraîne que  $(n)$  est  $d_c$ -Cauchy. Si on suppose que  $n \rightarrow a$  dans  $(\mathbb{R}, d_c)$ , alors  $\tan^{-1} n \rightarrow \tan^{-1} a$  dans  $(\mathbb{R}, d_u)$ , mais voudrait dire que  $\tan^{-1} a = \pi/2$  pour un certain  $a \in \mathbb{R}$  qui est impossible. Donc  $(n)$  ne converge pas dans  $(\mathbb{R}, d_c)$ , qui fait que cet espace n'est pas complet.

3. Soient  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  uniformément continue et  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dans  $X$ .

- (a) Montrer que  $(f(x_n))$  est de Cauchy dans  $Y$ .
- (b) Si de plus,  $f$  est bijective et  $f^{-1}$  est continue, montrer que si  $Y$  est complet  $X$  est complet.

**Solution.**

(a) Puisque  $f$  est uniformément continue alors pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x, y \in X$ ,  $d_X(x, y) < \delta$  entraîne  $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

Puisque  $(x_n)$  est de Cauchy alors pour tout  $\delta > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $p, q > N$  alors  $d_X(x_p, x_q) < \delta$ .

Donc pour tout  $p, q \in \mathbb{N} : p, q > N$  on a  $d_Y(f(x_p), f(x_q)) < \epsilon$  qui montre que  $(f(x_n))$  est une suite de Cauchy dans  $(Y, d_Y)$ .

(b) Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $(X, d_X)$ , alors d'après (a)  $(f(x_n))$  est une suite de Cauchy dans  $(Y, d_Y)$ . Si de plus  $(Y, d_Y)$  est complet alors  $(f(x_n))$  est convergente donc  $f(x_n) \xrightarrow{d_Y} y \in Y$  qui entraîne  $x_n \xrightarrow{d_X} f^{-1}(y) \in X$  par continuité de  $f^{-1}$ . Donc  $(x_n)$  est convergente dans  $(X, d_X)$  qui entraîne qu'il est complet.

4. Montrer que si  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ , alors  $(x_n^2)$  est de Cauchy aussi.

**Solution.**

Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{R}, d_u)$ . On sait que toute suite de Cauchy est bornée c.a.d.  $|x_n| < M$  pour tout  $n$ . Soit  $\epsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $m, n > N$  alors  $|x_m - x_n| < \epsilon$ . On a alors  $|x_m^2 - x_n^2| = |x_m - x_n||x_m + x_n| \leq 2M\epsilon = \epsilon_1$ . Donc  $(x_n^2)$  est de Cauchy.

5. Si  $(X, d_X)$  est un espace métrique complet et  $Y \subseteq X$ , alors  $(Y, d_Y)$  est complet si et seulement si  $Y$  est fermé dans  $X$ .

**Solution.**

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $Y$  est complet et soit  $x \in \text{Adh } Y$ . Alors il existe une suite  $(y_n) \in Y$  qui converge vers  $x$  dans  $X$ . Puisque  $(y_n)$  est une suite convergente dans un espace complet  $Y$  la limite doit être dans  $Y$ . De plus la limite est unique donc  $x \in Y$  qui entraîne que  $Y$  est fermé.

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $Y$  est fermé dans  $X$  et que  $(y_n)$  est suite de Cauchy dans  $Y \subset X$ . Puisque  $X$  est complet, il existe  $x \in X$  tel que  $y_n \rightarrow x$ . Mais puisque  $Y$  est fermé il doit contenir tous les points limites donc  $x \in Y$ . Il suit que  $(Y, d_Y)$  est complet.

6. Montrer que toute réunion finie de parties complètes de  $X$  est une partie complète de  $X$ .

**Solution.** Il suffit de le montrer pour deux parties complètes de  $X$ . Soient  $A, B$  deux parties complètes de  $X$  et  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $A \cup B$ .

7. Si  $(X, \delta)$  est l'espace métrique discret, alors une suite  $(x_n)$  dans  $X$  converge vers  $x$  si et seulement si, il existe  $N$  tel que  $x_n = x$  quand  $n \geq N$ .

**Solution.** Supposons que  $x_n \rightarrow x$  dans  $(X, \delta)$ . Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq N$  alors  $\delta(x_n, x) < \epsilon$ . Mais puisque  $\delta$  est la distance discrète alors si  $\epsilon < 1$  on a  $\delta(x_n, x) < \epsilon \Leftrightarrow \delta(x_n, x) = 0$  donc  $x_n = x$  pour  $n \geq N$ .

8. Si  $(Z, d)$  est le produit cartésien des deux espaces métriques  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ , alors la suite  $(x_n, y_n)$  de  $Z$  converge vers  $(x, y)$  si et seulement si  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$ .

**Solution.** Notons que si  $z_n = (x_n, y_n)$  et  $z = (x, y)$  alors

$$d_Z(z_n, z) = d_Z((x_n, y_n), (x, y)) = d_X(x_n, x) + d_Y(y_n, y)$$

$$\begin{aligned} z_n = (x_n, y_n) \rightarrow z = (x, y) &\Leftrightarrow d_Z(z_n, z) \rightarrow 0 \\ &\Leftrightarrow d_X(x_n, x) + d_Y(y_n, y) \rightarrow 0 \\ &\Leftrightarrow d_X(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ et } d_Y(y_n, y) \rightarrow 0 \\ &\Leftrightarrow x_n \rightarrow x \text{ et } y_n \rightarrow y. \end{aligned}$$

9. (a) Montrer que pour  $x \geq 1$  et  $t \geq 0$ ,  $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} \leq t/2$ .  
 (b) Montrer que  $f(x) = \sqrt{x}$  est une contraction sur  $[1, \infty)$   
 (c) Trouver le point fixe de  $f$ .

**Solution.**

(a)  $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+t} - \sqrt{x})(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})} = \frac{t}{(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})} \leq \frac{t}{2}$  car  $x \geq 1$ .

(b) Si  $f(x) = \sqrt{x}$  on pose  $y = x + t$  où  $t > 0$  et  $x \geq 1$  alors,

$$d(f(y), f(x)) = |f(y) - f(x)| = |\sqrt{x+t} - \sqrt{x}| \leq \frac{t}{2} = \frac{|y-x|}{2} \leq \frac{d(y, x)}{2}.$$

Donc  $f(x) = \sqrt{x}$  est une contraction.

(c) Puisque  $[1, \infty)$  est complet et  $f(x) = \sqrt{x}$  est une contraction donc le théorème de Banach garanti un fixe unique qui est  $x = 1$ .

10. Montrer la fonction  $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2x^{-1})$  a un point fixe unique sur  $[1, 2]$ , et trouver ce point.

**Solution.** Puisque  $f'(x) = (1 - 2x^{-2})/2 < 1/2 < 1$ , alors Corollaire 5.27 garanti un point fixe.

$$\frac{1}{2}(x + 2x^{-1}) = x \Leftrightarrow 2x^{-1} = x \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \in [1, 2].$$

11. Montrer que l'équation  $x^5 + 7x - 1 = 0$  possède une solution unique dans  $[0, 1]$ . Trouver la racine exacte à 6 décimaux en utilisant la méthode de Newton.

**Solution.** Si on pose  $f(x) = x^5 + 7x - 1$  on a  $f'(x) = 5x^4 + 7 > 0$  donc  $f$  est strictement croissante. De plus on a  $f(0)f(1) = (-1)(7) < 0$  donc le théorème des valeurs intermédiaires garanti une racine dans  $(0, 1)$ , cette racine est unique car  $f' > 0$ . Posons  $x_1 = 1/2$  et  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  on aura:  $x_2 = 0.153846$ ,  $x_3 = 0.142849$ ,  $x_4 = 0.142848$ , et  $x_5 = 0.142848$ .

12. Soit  $f : (0, 1/4) \rightarrow (0, 1/4)$  définie par  $f(x) = x^2$ . Montrer que  $f$  est une contraction qui ne possède aucun point fixe.

**Solution.**  $f(x) = x^2 = x \Leftrightarrow x = 0, 1$  donc évidemment  $f$  n'admet pas de point fixe sur  $(0, 1/4)$ .  $f(0, 1/4) = (0, 1/16) \subset (0, 1/4)$ . De plus on a  $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ . Donc  $f$  est contraction sur  $(0, 1/4)$ . Mais  $(0, 1/4)$  n'est pas complet, donc cela ne contredit pas le théorème du point fixe de Banach.

13. Soit  $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  définie par  $f(x) = x + x^{-1}$ . Montrer que  $[1, \infty)$  est complet et  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  pour  $x, y \in [1, \infty)$ , mais  $f$  n'est pas une contraction et n'a aucun point fixe.

**Solution.**  $[1, \infty)$  est un fermé de l'espace complet  $\mathbb{R}$ , donc doit être complet par Proposition 5.19.

$f(x) = x + x^{-1} \leq 1$  pour  $x \geq 1$ , alors l'image de  $[1, \infty)$  est lui même.

De plus  $|f'(x)| = |1 - x^{-2}| < 1$  quand  $x \in [1, \infty)$ , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y||f'(c)| < |x - y|$ . Cela ne montre pas que  $f$  est une contraction. Car pour avoir une contraction on doit avoir  $|f'(c)| = 1 - c^{-2} < k < 1$  pour tout  $c \in [1, \infty)$  ce qui est impossible.



## 6: Espaces Métriques Compacts – Corrigés

1. Lesquels de ces sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$  sont compacts?

- (i)  $[0, 1]$                       (iv)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$   
(ii)  $[0, \infty)$                     (v)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$   
(iii)  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$               (vi)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

**Solution.**

- (i)  $[0, 1]$  n'est pas fermé, donc n'est pas compact.  
(ii)  $[0, \infty)$  n'est pas borné, donc n'est pas compact.  
(iii)  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  n'est pas complet, donc n'est pas compact.  
(iv)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  est borné et fermé donc est compact.  
(v)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$  n'est pas borné, donc n'est pas compact.  
(vi)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$  est borné et fermé donc est compact.

2. Donner des exemples de suites dans  $\mathbb{R}$  avec 0, 1 et 2 points d'accumulations:

**Solution.**

- $\{n : n \in \mathbb{N}\}$  n'a pas de point d'accumulation.  
 $\{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$  possède un seul point d'accumulation  $\{0\}$ .  
 $\{(-1)^n(1 + n^{-1}) : n \in \mathbb{N}\}$  possède deux points d'accumulations  $\{-1, 1\}$ .

3. Considérons l'espace métrique  $(\mathbb{Q}, d)$  où  $d(x, y) = |x - y|$  et  $A = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3\}$ . Montrer que  $A$  est fermé et borné mais n'est pas compact.

**Solution.** Il est clair que  $A$  est borné. On peut écrire  $A$  comme:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\} = A_1 \cup A_2. \text{ De plus on a}$$

$$A_1 = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad A_2 = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}.$$

Donc  $A_1$  et  $A_2$  sont fermés dans  $\mathbb{Q}$ .

Pour la compacité considérons  $G = \{G_n; n \geq 1\}$  où  $G_n = \{x \in \mathbb{Q} : 2 + n^{-1} < x^2 < 3 - n^{-1}\}$ .  $G$  est un recouvrement ouvert de  $A$  qui ne possède aucun sous-recouvrement fini.

4. Supposons que  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est continue, et  $K$  est une partie compacte de  $Y$ . Montrer que  $f^{-1}(K)$  est fermé. Trouver un exemple qui montre que  $f^{-1}(K)$  n'est pas nécessairement compact.

**Solution.** Puisque tout compact est fermé et  $f$  est continue alors  $f^{-1}(K)$  est fermé.

Contre exemple  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 0$  et  $K = \{0\}$ .

5. Montrer que si  $A \subset \mathbb{R}$  n'est pas compact, alors il existe une fonction continue  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  qui est bornée mais n'atteint pas toutes ses bornes.

**Solution.** Si  $A$  n'est pas compact alors il est soit non borné ou bien non fermé.

(1) Si  $A$  non borné considérons  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$ , alors pour tout  $x \in A$  on a  $0 < f(x) \leq 1$ . La borne inférieure de  $f$  est 0, mais il n'existe pas de  $x \in A$  tel que  $f(x) = 0$ .

(2) Supposons que  $A$  non fermé et soit  $b \in \text{Adh } A - A$ . Considérons  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = |x - b|$ , alors la borne inférieure de  $f$  est 0, mais il n'existe pas de  $x \in A$  tel que  $f(x) = 0$ .

6. (a) Montrer que la réunion finie de parties compactes d'un espace métrique  $X$  est compacte.  
(b) Montrer que la réunion arbitraire de parties compactes d'un espace métrique  $X$  n'est pas nécessairement compacte.

**Solution.**

(a) Il suffit de montrer que la réunion de deux parties compactes est compacte.

Soient  $K_1, K_2$  deux parties compactes,  $K = K_1 \cup K_2$  et  $\mathcal{C}$  un recouvrement ouvert de  $K$  donc

$K \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$ .  $\mathcal{C}$  est recouvrement ouvert de  $K_1$  ( $K_2$ ), donc doit contenir un sous-recouvrement fini. Donc il existent  $J_1, J_2 \subset J$  finis tel que  $K_1 \subseteq \bigcup_{i \in J_1} G_i$  et  $K_2 \subseteq \bigcup_{i \in J_2} G_i$  qui entraîne que  $K = K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup_{i \in J_1 \cup J_2} G_i$ .

(b) Soit  $K_n = [1, n + 1], n = 1, 2, \dots$ . Il est évident que  $K_n$  est compact dans  $\mathbb{R}$  et que  $\bigcup_n K_n = [1, \infty)$  n'est pas compact.

7. Montrer que l'intersection arbitraire de parties compactes de  $\mathbb{R}^n$  est compacte.

**Solution.** Soit  $K = \bigcap_{a \in A} K_a$ , où  $K_a$  sont des compacts de  $\mathbb{R}^n$ .  $K$  est fermé dans  $\mathbb{R}^n$  car c'est l'intersection de fermés. De plus  $K$  est fermé dans le compact  $K_{a_0}$  où  $a_0 \in A$ . Il en suit que  $K$  est une partie fermée d'un compact, donc elle est compacte.

8. Montrer que l'espace métrique discret  $(X, \delta)$  est compact si et seulement si  $X$  est fini.

**Solution.** Supposons  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  est fini. Alors,  $X$  possède un maximum de  $2^n$  de parties ouvertes distinctes. Donc n'importe quel recouvrement ouvert de  $X$  est lui même un recouvrement ouvert fini.

Par contre si  $X$  est infini alors le recouvrement ouvert  $\{\{x\} : x \in X\}$  n'admet pas de recouvrement fini. Donc  $(X, \delta)$  est compact si et seulement si  $X$  est fini.

9. Montrer que si  $A$  est précompact, alors  $\text{Adh}(A)$  l'est aussi.

**Solution.** Supposons que  $A$  est précompact donc pour tout  $r > 0$  ils existent  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r)$ . Si  $y \in \text{Adh}(A) - A$  alors  $B(y, r) \cap A \neq \emptyset$ , il existe donc  $z \in B(x_k, r) \cap A$  pour un certain  $x_k$ . On a  $d(y, x_k) \leq d(y, z) + d(z, x_k) \leq r + r = 2r$  donc  $y \in B(x_k, 2r)$ . Donc  $\text{Adh } A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 2r)$  qui montre que  $\text{Adh } A$  est en effet précompact.

10. Montrer que si  $A$  est précompact, alors  $A$  est borné.

**Solution.** Si  $A$  est précompact, alors pour tout  $r > 0$  ils existent  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r)$ . Donc  $\text{diam } A \leq \sum_{i=1}^n \text{diam } B(x_i, r) = 2nr$ .

11. Montrer que tout sous-ensemble fini de  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  est compact.

**Solution.** Soient  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un sous-ensemble fini de  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  et  $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$ . Alors,  $A$  est borné car  $|a_i| \leq M$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $A$  est fermé car  $A = \{a_1\} \cup \dots \cup \{a_n\}$  est l'union de fermés donc  $A$  est compact.

On peut utiliser aussi le fait que tout singleton est compact et  $A$  est l'union finie de singletons compacts, donc  $A$  est compact.

12. Soient  $X, Y$  deux d'espaces métriques. Montrer que  $Z = X \times Y$  est compact si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont compacts.

**Solution.**

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $Z = X \times Y$  est compact. Alors, la suite  $(x_n, y)$  possède une sous-suite convergente  $(x_{n_k}, y) \rightarrow (x, y)$ . Donc toute suite  $(x_n)$  de  $X$  possède une sous-suite convergente dans  $X$  qui entraîne que  $X$  est compact. Par symétrie on montre que  $Y$  est aussi compact.

( $\Leftarrow$ ) Réciproquement supposons que  $X$  et  $Y$  sont compacts et soit  $(z_n) = (x_n, y_n)$  une suite dans  $Z = X \times Y$ . Puisque  $X$  est compact la suite  $(x_n)$  possède une sous-suite  $(x_{n_k})$  convergente dans  $X$ . Puisque  $Y$  est compact la suite  $(x_{n_k})$  possède une sous-suite  $(y_{n_{k_j}})$  convergente dans  $Y$ . Donc la suite  $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$  est une sous-suite convergente de la suite  $(x_n, y_n)$  dans  $Z = X \times Y$ . Cela montre que  $Z = X \times Y$  est compact.

13. Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $(x_n)$  une suite convergente de  $X$  telle que  $x_n \rightarrow x$ . Montrer,  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  est compact.

**Solution.** Soit  $(G_a)_{a \in I}$  un recouvrement ouvert de  $A$ . Il existe un ouvert  $G_{a_N}$  qui contient  $\{x, x_N, x_{N+1}, \dots\}$ . Pour tout  $x_i : i = 1, 2, \dots, N-1$  il existe un ouvert  $G_{a_i}$  tel que  $x_i \in G_{a_i}$ . Donc  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\} \cup \{x, x_N, x_{N+1}, \dots\} \subset \cup_{i=1}^N G_{a_i}$  qui est un sous-recouvrement ouvert fini et alors  $A$  est compact.

14. Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $A, B \subset X$  et  $A \cap B = \emptyset$ .

(a) Montrer que si  $A$  est compact et  $B$  est fermé, alors  $\text{dist}(A, B) > 0$ .

(b) Est ce que  $\text{dist}(A, B) \neq 0$  si  $A$  et  $B$  sont fermés?

**Solution.** Par définition  $\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}$ .

(a) Supposons que  $A$  est compact et  $B$  est fermé, donc  $\text{Adh } A = A$  et  $\text{Adh } B = B$ .

Considérons la fonction  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \text{dist}(x, A)$ .  $f$  est continue sur le compact  $B$  donc elle est bornée et atteint son minimum sur  $B$ . Ils existent  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que  $\text{dist}(A, B) = d(a, b)$ . Puisque  $A \cap B = \emptyset$  alors  $\text{dist}(A, B) > 0$  car s'il existe  $b \in B$  tel que  $\text{dist}(A, b) = 0$  alors  $b \in \text{Adh } A = A$  (voir exercice 9 TD 4) et donc  $A \cap B \neq \emptyset$  ce qui est une contradiction.

(b) Considérons  $A = \{(x, y) : xy = 1\}$  et  $B = \{(x, y) : y = 0\}$ .  $A$  et  $B$  sont fermés dans  $\mathbb{R}^2$ , mais  $\text{dist}(A, B) = 0$  puisque  $y = 1/x \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ .





## 7: Espaces Métriques Connexes – Corrigés

1. Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- (a)  $X$  est connexe.
- (b) Il n'existe pas de partitions de  $X$  en deux ouverts disjoints.
- (c) Il n'existe pas de partitions de  $X$  en deux fermés disjoints.

**Solution.**

(a)  $\Rightarrow$  (b). Supposons que  $A, B \subset X, X = A \cup B, A \cap B = \emptyset$  et  $A, B$  ouverts. Alors,  $A$  et  $B$  sont fermés car  $X - A = B$  et  $X - B = A$ . Il suit que  $A$  et  $B$  sont à la fois ouverts et fermés qui montre que  $X$  n'est pas connexe.

(b)  $\Rightarrow$  (c). Supposons que  $A, B \subset X, X = A \cup B, A \cap B = \emptyset$  et  $A, B$  sont fermés. Alors  $A$  et  $B$  sont aussi des ouverts qui forment une partition de  $X$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a). Supposons que  $X$  n'est pas connexe. Alors, il existe une partie propre  $G \subsetneq X$  qui est à la fois ouverte et fermée. Il suit que  $X - G$  est une partie de  $X$  à la fois ouverte et fermée et  $X = G \cup (X - G)$  qui montre qu'il existe une partitions de  $X$  en deux fermés disjoints.

2. Montrer que si  $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$  est continue et  $X$  est connexe, alors  $f(X)$  est connexe.

**Solution.**

Si  $G \subsetneq f(X)$  est à la fois ouverte et fermée. Alors puisque  $f$  est continue  $f^{-1}(G) \subsetneq X$  est à la fois ouverte et fermée qui entraîne que  $X$  n'est pas connexe.

3. Si  $(X, d)$  est connexe et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue telle que  $|f(x)| = 1$  pour tout  $x \in X$ , montrer que  $f$  doit être constante.

**Solution.**

Si  $|f(x)| = 1$  alors  $f(X) = \{-1, 1\}$ . Donc  $X = f^{-1}\{-1\} \cup f^{-1}\{1\}$ . Puisque  $f$  est continue  $f^{-1}\{-1\}$  et  $f^{-1}\{1\}$  sont des fermés de  $X$ . Il suit que  $X$  est une partition de deux fermés disjoints donc  $X$  est non-connexe.

4. Montrer qu'un espace connexe par arcs est connexe.

**Solution.**

Supposons que  $X$  est connexe par arcs et  $g : X \rightarrow \{0, 1\}$  est continue. Si  $g$  n'est pas constante, alors ils existent  $x_1, x_2 \in X$  tels que  $g(x_1) = 0$  et  $g(x_2) = 1$ . Soit  $f : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin dans  $X$  tel que  $f(0) = x_1$  et  $f(1) = x_2$ . Alors la fonction  $g \circ f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$  est continue et surjective qui entraîne que  $[0, 1]$  n'est pas connexe, qui est une contradiction.

5. Supposons que  $f, g : [0, 1] \rightarrow X$  sont respectivement des chemins de  $x \rightarrow y$  et  $y \rightarrow z$ . Montrer que

$$h(t) = \begin{cases} f(2t); & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ g(2t - 1); & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin  $x \rightarrow z$  dans  $X$ .

**Solution.**

On a  $h(0) = f(0) = x, h(1/2) = f(1) = y = g(0)$ , et  $h(1) = g(1) = z$ . De plus  $f(2t)$  et  $g(2t - 1)$  sont des composées de fonctions continues donc sont elles mêmes continues qui entraîne que  $h$  est aussi continue.

6. Montrer qu'une partie ouverte et connexe de  $\mathbb{R}^n$  est connexe par arcs.

**Solution.**

Soit  $G$  un partie ouverte et connexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in G$ .

Soit  $A = \{x \in G \text{ qui ont un arc joignant } x_0 \text{ et } x\}$ .  $A$  est connexe par arcs.

Si on montre que  $A$  est à la fois ouvert et fermé dans  $\mathbb{R}^n$ , alors  $G = A \cup (G - A)$  serait une

partitions d'ouverts de la partie connexe  $G$ . Donc soit  $A = \emptyset$  ou bien  $G - A = \emptyset$ . Puisque  $x_0 \in A$  alors on a  $G - A = \emptyset$ . Donc  $G = A$  est connexe par arc.

Montrons que  $A$  est ouvert. Soit  $x \in A \subset G$ , puisque  $G$  est ouvert alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset G$ . Tout point  $y \in B(x, r)$  peut être joint à  $x$  par un segment de ligne droite dans  $B(x, r)$  donc tout point  $y \in B(x, r)$  peut être joint à  $x_0$  par un arc et donc  $B(x, r) \subset A$  qui montre que  $A$  est ouvert.

Montrons que  $G - A$  est ouvert aussi. Soit  $x \in G - A$  alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset G - A$ . Sinon cela veut dire que  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . Soit  $y \in B(x, r) \cap A$  alors on peut joindre  $x_0$  à  $y$  et  $y$  à  $x$  qui est une contradiction car  $x \in G - A$ . Donc  $G - A$  est ouvert.

7. Montrer que toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ , admet un point fixe  $x \in [a, b]$ .

**Solution.**

Puisque  $f([a, b]) \subseteq [a, b]$  alors  $f(a) \geq a$  et  $f(b) \leq b$ . Soit  $g(x) = f(x) - x$ , alors  $g$  est continue et  $g(a) \geq 0$  et  $g(b) \leq 0$ . Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe  $x \in (a, b)$  tel que  $g(x) = 0$  ou bien  $f(x) = x$ .

8. Supposons que  $X$  est connexe par arcs, et  $f : X \rightarrow Y$  est continue et surjective. Montrer que  $Y$  est connexe par arcs.

**Solution.**

Soient  $y_1, y_2 \in Y$ . Puisque  $f$  est surjective,  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$  pour  $x_1, x_2 \in X$ . Soit  $g : [0, 1] \rightarrow X$  est un chemin continue dans  $X$  de  $x_1$  vers  $x_2$ . Alors la fonction  $f \circ g : [0, 1] \rightarrow Y$  est un chemin continue dans  $Y$  de  $y_1$  vers  $y_2$ . Alors  $Y$  est connexe par arcs.

9. Montrer que  $X = C([0, 1])$  avec  $d(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$  est connexe par arcs et donc connexe.

**Solution.**

Supposons que  $f, g$  sont deux éléments quelconques dans  $C[0, 1]$ . On définit un chemin  $h : [0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  par  $h(t) = tf + (1 - t)g$ . Alors pour chaque  $t \in [0, 1]$  la fonction  $h(t)$  est continue donc est un élément de  $C[0, 1]$ . De plus, la fonction  $h$  est continue puisque

$$d_\infty(h(t), h(s)) = \sup_{x \in [0, 1]} |(t - s)f(x) + (s - t)g(x)| \leq |t - s|(M_f + M_g),$$

où  $|f(x)| \leq M_f$  et  $|g(x)| \leq M_g$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

Pour tout  $\epsilon > 0$ , soit  $\delta = \epsilon / (M_f + M_g)$ , alors on obtient  $d_\infty(h(t), h(s)) < \epsilon$  quand  $|t - s| < \delta$ . Finalement,  $h(0) = g$  et  $h(1) = f$ , donc  $h$  est un chemin continu dans  $C[0, 1]$  de  $g$  vers  $f$ . Donc  $C[0, 1]$  est connexe par arcs et donc connexe.

10. Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $A \subsetneq X$ . Montrer que  $X$  est connexe si et seulement si  $\text{Fr}(A) = \emptyset$ .

**Solution.**

On sait  $\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) - \text{Int}(A)$ , donc si  $A$  est à la fois ouvert et fermé  $\text{Fr}(A) = \emptyset$ . Donc  $X$  est connexe si et seulement si  $\text{Fr}(A) = \emptyset$ .

11. Supposons que  $A$  et  $B$  sont des parties connexes de  $X$  tel que  $\text{Adh}(A) \cap B \neq \emptyset$ . Montrer que  $A \cup B$  est connexe.

**Solution.**

Considérons la fonction continue  $f : A \cup B \rightarrow \{0, 1\}$  avec la distance discrète  $\delta$ .

Puisque  $A$  et  $B$  sont connexes alors les fonctions;  $f|_A = c_A : A \rightarrow \{0, 1\}$  et  $f|_B = c_B : B \rightarrow \{0, 1\}$  sont constantes et ont pour valeur 0 ou bien 1. Notons que  $\text{Adh}(A)$  est aussi connexe car  $A$  est connexe et  $f(\text{Adh}(A)) = c_A$ . Soit  $b \in \text{Adh}(A) \cap B$  alors  $f(b) = c_A = c_B$ . Donc  $f(A \cup B) = c_A$  qui entraîne que  $f$  est constante sur  $A \cup B$  qui est donc connexe.

12. Soient  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  un homomorphisme et  $a \in X$ .

**Solution.**

- (a) Montrer que  $f_a : X - \{a\} \rightarrow Y - \{f(a)\}$  est un homomorphisme.  
Voir exercice 5 du TD no. 4.
- (b) Dédire qu'il n'y a pas d'homomorphisme entre  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$ .  
Supposons que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  soit un homéomorphisme.  
Alors la restriction  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{f(0)\}$  serait aussi un homéomorphisme. Mais  $\mathbb{R} - \{0\}$  n'est pas connexe, cependant  $\mathbb{R}^2 - \{f(0)\}$  est connexe.  
Donc  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$  ne sont pas homéomorphes.



## 8: Espaces Topologiques – Corrigés

1. Soit  $X = \{a, b, c\}$  trouver les 29 topologies possibles sur  $X$ .

**Solution.** On donne les types distincts des topologies et le nombre de chaque.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{Gros}} &= \{\emptyset, X\} \quad (1) & \mathcal{T}_{\text{dis}} &= P(X) \quad (1) \\ \mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, \{a\}, X\} \quad (3) & \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \{a, b\}, X\} \quad (3) \\ \mathcal{T}_3 &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\} \quad (6) & \mathcal{T}_4 &= \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\} \quad (3) \\ \mathcal{T}_5 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\} \quad (3) & \mathcal{T}_6 &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\} \quad (3) \\ \mathcal{T}_7 &= \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\} \quad (6) \end{aligned}$$

2. Soit  $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$  ou  $X$  est infini  $\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subset X : (X - U) \text{ fini} \} \cup \{\emptyset\}$  et  $A \subseteq X$ .

- Montrer que la collection  $\mathcal{T}_{\text{cof}}$  est une topologie sur  $X$ .
- Déterminer quels sont les parties fermées de  $X$ .
- Si  $A$  est fini trouver  $\text{Adh } A$ ,  $\text{Int } A$  et  $\text{Fr } A$ .
- Si  $A$  est infini trouver  $\text{Adh } A$ ,  $\text{Int } A$  et  $\text{Fr } A$ .

**Solution.**

- Montrer que la collection  $\mathcal{T}_{\text{cof}}$  est une topologie sur  $X$ .
  - $X - X = \emptyset$  fini donc  $X \in \mathcal{T}_{\text{cof}}$ .
  - Soient  $U_a \in \mathcal{T}_{\text{cof}}$ ,  $a \in A$ , alors  $X - \cup_a U_a = \cap_a (X - U_a)$  est fini car c'est une intersection de finis.
  - Si  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\text{cof}}$  alors  $X - (U_1 \cap U_2) = (X - U_1) \cup (X - U_2)$  est fini car c'est l'union de 2 finis.
- Déterminer quels sont les parties fermées de  $X$ .  
Les fermés sont les compléments des ouverts donc les fermés de  $\mathcal{T}_{\text{cof}}$  sont les parties finies de  $X$  ou bien  $X$ .
- Si  $A$  est fini trouver  $\text{Adh } A$ ,  $\text{Int } A$  et  $\text{Fr } A$ .  
 $\text{Adh } A = A$  car  $A$  est fermé.  
 $\text{Int } A = \emptyset$  car c'est le seul ouvert contenu dans  $A$ .  
 $\text{Fr } A = \text{Adh } A - \text{Int } A = A$ .
- Si  $A$  est infini trouver  $\text{Adh } A$ ,  $\text{Int } A$  et  $\text{Fr } A$ .  
 $\text{Adh } A = X$  car c'est le plus petit fermé contenant  $A$ .  
 $\text{Int } A = A$  si  $X - A$  est fini et  $\text{Int } A = \emptyset$  si  $X - A$  est infini.  
 $\text{Fr } A = \text{Adh } A - \text{Int } A = X - A$  si  $X - A$  est fini et  $\text{Fr } A = \text{Adh } A - \text{Int } A = X$  si  $X - A$  est infini.

3. Soient  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  deux topologies sur  $X$ .

- Montrer que  $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$  est une topologie sur  $X$ .
- Montrer que généralement  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  n'est pas une topologie sur  $X$ .

**Solution.**

- Montrer que  $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$  est une topologie sur  $X$ .
  - (O1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  donc  $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ .
  - (O2) Si  $U_a \in \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  alors  $\cup_a U_a \in \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  et donc  $\cup_a U_a \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ .
  - (O3) Si  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  alors  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  et donc  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ .
- Montrer que généralement  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  n'est pas une topologie sur  $X$ .  
Soit  $X = \{a, b, c\}$ , alors  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$  et  $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$  sont deux topologies (voir exercice 1).  
Mais  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$  n'est pas une topologie.

4. Soit  $\mathcal{T}$  la collection de parties de  $\mathbb{R}$  contenant  $\emptyset, \mathbb{R}$  et tout les intervalles de la forme  $(-\infty, b)$ . Montrer que  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution.**

(O1)  $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ .

(O2)  $\cup_a (-\infty, b_a) = (-\infty, \sup b_a) \in \mathcal{T}$ .

(O3)  $(-\infty, b_1) \cap (-\infty, b_2) = (-\infty, \inf\{b_1, b_2\}) \in \mathcal{T}$ .

5. Montrer que  $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  est une base pour la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution.**

(1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$  on a  $x \in (x - r, x + r) \in \mathcal{B}$ .

(2) Soit  $x \in B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  alors si  $B_1 = (a_1, b_1)$  et  $B_2 = (a_2, b_2)$  on a  $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = (c_1, c_2) \in \mathcal{B}$ .

6. Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  des bases pour les topologies  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  respectivement. Montrer que  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$  si et seulement si pour tout  $B \in \mathcal{B}$  et  $x \in B$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  tel que  $x \in B' \subset B$ .

**Solution.**

( $\Rightarrow$ ) Soit  $x \in B \in \mathcal{B}$  et puisque  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$  alors  $B \in \mathcal{T}'$ .

( $\Leftarrow$ ) Soit  $U \in \mathcal{T}$ , alors pour tout  $x \in U$  il existe  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B \subset U$ . Mais par hypothèse il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  tel que  $x \in B' \subset B$ . Donc pour tout  $x \in U$  il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  tel que  $x \in B' \subset U$  qui entraîne que  $U \in \mathcal{T}'$ .

7. Si  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique,  $A \subset X$ , et  $\mathcal{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{T}\}$ .

(a) Montrer que la collection  $\mathcal{T}_A$  est une topologie sur  $A$ .

(b) Si  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$  et  $A = \{a, b\}$  trouver la topologie induite  $\mathcal{T}_A$  de  $A$ ,

**Solution.**

(a) Montrer que la collection  $\mathcal{T}_A$  est une topologie sur  $A$ .

(O1)  $\emptyset = A \cap \emptyset$  et  $A = A \cap X$  donc  $\emptyset, A \in \mathcal{T}_A$ .

(O2) Si  $U_a \in \mathcal{T}$  alors  $(A \cap U_a) \in \mathcal{T}_A$  et on a  $\cup_a (A \cap U_a) = A \cap (\cup_a U_a) \in \mathcal{T}_A$  car  $\cup_a U_a \in \mathcal{T}$ .

(O3) Si  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$  alors  $(A \cap U_1), (A \cap U_2) \in \mathcal{T}_A$  et on a  $(A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2) \in \mathcal{T}_A$ .

(b) Si  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$  et  $A = \{a, b\}$  trouver la topologie induite  $\mathcal{T}_A$  de  $A$ ,

$\mathcal{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{T}\} = \{\emptyset, \{a\}, A\}$ .

8. Soit  $(A, \mathcal{T}_A)$  un sous-espace d'un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$ . Montrer que pour que tout ouvert de  $A$  soit un ouvert de  $X$  il faut et il suffit que  $A$  soit un ouvert de  $X$ .

**Solution.**

(1) Si  $A$  est un ouvert de  $X$  alors  $A \in \mathcal{T}$ . Pour tout  $G \in \mathcal{T}_A$ , il existe  $U \in \mathcal{T}$  tel que  $G = A \cap U$ . Mais puisque  $A, U \in \mathcal{T}$  alors  $G = A \cap U \in \mathcal{T}$  donc  $G \in \mathcal{T}$  et alors  $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}$ .

(2) Si tout ouvert de  $A$  est un ouvert de  $X$  alors  $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}$ , qui entraîne que  $A \in \mathcal{T}$  c.a.d.  $A$  est un ouvert de  $X$ .

9. Montrer que  $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  est continue dans chacun des cas suivants:

(a)  $(X, \mathcal{T}_X) = (Y, \mathcal{T}_Y)$  et  $f(x) = x$ .

(b)  $f$  est constante.

(c)  $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{\text{Disc}}$ .

(d)  $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\text{Gros}}$ .

**Solution.**

- (a) Si  $O \in \mathcal{T}_X$  alors puisque  $f(x) = x, f^{-1}(O) = O \in \mathcal{T}_X$  et donc  $f$  est continue.
- (b) Si  $O \in \mathcal{T}_X$  alors puisque  $f(x) = c, f^{-1}(O) = X \in \mathcal{T}_X$  si  $c \in O$  sinon  $f^{-1}(O) = \emptyset \in \mathcal{T}_X$  et donc  $f$  est continue.
- (c) Puisque tout sous ensemble est ouvert dans la topologie discrète  $\mathcal{T}_{\text{Disc}}$ , alors  $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_{\text{Disc}}$  pour tout  $O \in \mathcal{T}_Y$  et donc  $f$  est continue. .
- (d) Puisque  $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\text{Gros}} = \{\emptyset, Y\}$  on a  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X$  et  $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}_X$  et donc  $f$  est continue.

10. Soit  $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  continue, et  $A$  une partie non vide de  $X$ .

Montrer que la restriction  $g = f|_A : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  est continue.

**Solution.** Soit  $O \in \mathcal{T}_Y$  alors  $g^{-1}(O) = A \cap f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_A$  car  $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$  et donc  $g$  est continue.

11. Montrer que si  $f, g : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  sont continues, et  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  est Hausdorff, montrer que:

- (a)  $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$  est fermé dans  $X$ .
- (b)  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$  est fermé dans  $X \times Y$ .

**Solution.**

- (a) On va montre que  $X - A$  est ouvert dans  $X$ . Soit  $b \in X - A$  alors  $f(b) \neq g(b)$ .  
Puisque  $Y$  est séparé ils existent des ouverts  $U, V \in \mathcal{T}_Y$  tels que  $f(b) \in U, g(b) \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ . Donc  $b \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$  car  $f, g$  sont continues et  $U, V \in \mathcal{T}_Y$ .  
De plus l'ouvert  $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset X - A$  qui entraine que  $X - A$  est ouvert et donc  $X$  est fermé.
- (b) Si  $Y$  est séparé  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$  est fermé dans  $X \times Y$ .  
On va montrer que le complément de  $\Gamma_f, X \times Y - \Gamma_f$  que est ouvert.  
Soit  $(x, y) \in X \times Y - \Gamma_f$  alors  $(x, y) \notin \Gamma_f$  et donc  $y \neq f(x)$ .  
Puisque  $Y$  est séparé alors ils existent  $U, V \in \mathcal{T}_Y$  tels que  $f(x) \in U, y \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .  
Puisque  $f$  est continue il suit que  $x \in U_1 = f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ . De plus  $W = U_1 \times V \subseteq X \times Y - \Gamma_f$ . Donc  $X \times Y - \Gamma_f$  est ouvert qui entraine que  $\Gamma_f$  est fermé.

Université Ferhat Abbas Sétif 1