

Espace \mathbb{R}^n . Espaces vectoriels normés

Espaces métriques

Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} des nombres réels ou complexes, E est dit normé si est définie une application

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$x \longmapsto N(x)$ vérifiant les propriétés suivantes

$$(n_1) \quad N(x) = 0 \iff x = 0$$

$$(n_2) \quad \forall x \in E, \forall y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

$$(n_3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

L'application ainsi définie est appelée norme sur E et $N(x)$ est notée $\|x\|$.

Conséquence : On peut déduire de la définition de la norme l'inégalité

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

Exemple : Le corps \mathbb{R} est un espace vectoriel normé sur lui-même

l'application qui à x lui fait correspondre $|x|$ définit une norme.

Espace \mathbb{R}^n

L'ensemble \mathbb{R}^n peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Il suffit de définir une opération interne

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

et une opération externe

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$$

Avec ces deux opérations, \mathbb{R}^n est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , il a une dimension égale à n , avec comme base canonique

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

.....

$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

et tout élément x de \mathbb{R}^n s'écrit : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Inégalité de Schwarz

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ $2n$ nombres réels, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i)^2 \geq 0$$

En faisant le développement, on a

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

Le trinôme en λ est positif quel que soit λ , donc son discriminant est positif ou nul d'où l'inégalité de **Schwarz**

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Norme euclidienne sur \mathbb{R}^n

Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

Montrons que l'application : $x \longrightarrow \|x\|_2$ est une norme

$$(n_1) \quad \|x\|_2 = 0 \iff \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 0 \iff \text{pour tout } i, x_i = 0 \iff x = 0.$$

$$(n_2) \quad \|\lambda x\|_2 = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = |\lambda| \|x\|_2.$$

(n₃) Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, on a

$$\|x + y\|_2 = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2}$$

On doit montrer que $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$, c'est à dire

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Sachant qu'on a des nombres non négatifs, il suffit de prouver

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

ou bien

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Si $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 0$, l'inégalité est vérifiée, sinon il suffit de prouver que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2$$

et cette inégalité est **l'inégalité de Schwarz**.

Deuxième norme sur \mathbb{R}^n .

Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Troisième norme sur \mathbb{R}^n

Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_\infty = N_\infty(x) = \sup |x_i|$$

Normes équivalentes

Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes s'ils existent deux nombres réels λ et μ positifs tels que

$$\lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x), \quad \forall x \in E$$

Espaces métriques

Un ensemble E est dit espace métrique si on a

une application de $E \times E$ dans \mathbb{R}^+ : $(x, y) \longrightarrow d(x, y)$

appelée distance et vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- 2) $\forall x \in E, \forall y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Exercices

- 1) On considère les trois normes définies sur \mathbb{R}^2 :

$$\| \cdot \|_1 = |x| + |y|, \quad \| \cdot \|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \| \cdot \|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

Représenter, dans un repère orthonormé, les boules unités de chacune d'elles.

Montrer que les trois normes sont équivalentes.

Donner les expressions des distances d_1 , d_2 et d_∞ associées aux trois normes.

- 2) Démontrer l'inégalité triangulaire renversée :

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

- 3) Soit \mathbf{E} un ensemble quelconque, on pose pour tout $x \in \mathbf{E}$, $d(x, x) = 0$ et $\forall x \in \mathbf{E}, \forall y \in \mathbf{E}$ avec $x \neq y \implies d(x, y) = 1$.

Montrer que l'on définit une distance sur \mathbf{E} .

Quelles sont les boules pour cette distance.

- 4) Soit $(\mathbf{E}, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

a) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$$

b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

c) Si l'on a la norme euclidienne $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$, montrer que :

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$$

- 5) On définit sur \mathbb{R}^2 l'application

$$\mathbf{N} : (x, y) \longrightarrow \mathbf{N}(x, y) = \max \{|x|, |2x + y|\}$$

- a.) Montrer que \mathbf{N} est une norme sur \mathbb{R}^2 .
- b.) Montrer que \mathbf{N} est équivalent à la norme $\|\cdot\|_1$

ie trouver deux constantes positives λ et μ telles que

$$\lambda \|\cdot\|_1 \leq \mathbf{N} \leq \mu \|\cdot\|_1$$

- 6) Soit l'application définie sur \mathbb{R} par

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

a) Montrer que l'application f définit une bijection de \mathbb{R} sur $I =]-1, 1[$.

b) On pose : $\delta(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Vérifier que δ est une distance sur \mathbb{R} .

- 7) Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{N}(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

- 1) Montrer que \mathbf{N} est une norme sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Dessiner la boule unité.
- 3) Montrer que \mathbf{N} et \mathbf{N}_2 sont des normes équivalentes.

- 8) Soit \mathbf{N} une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$\mathbf{N}(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|tx + y|}{\sqrt{1 + t^2}}$$

- i) Montrer que \mathbf{N} est une norme sur \mathbb{R}^2 .
- ii) En utilisant l'inégalité de **Schwarz**, montrer que :

$$\mathbf{N} \leq \mathbf{N}_2$$

- iii) Soit Δ la droite d'équation : $tx + y = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point de \mathbb{R}^2 .
Donner la valeur de $d(M_0, \Delta)$, en déduire que : $\mathbf{N} \approx \mathbf{N}_2$.

iv) **Autre méthode :** En étudiant la fonction

$$f(t) = \frac{(tx + y)^2}{1 + t^2}$$

Montrer l'équivalence des deux normes \mathbf{N} et \mathbf{N}_2 .

- **9)** Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} , définies et continues sur $[-1, 1]$.

i) Montrer que les trois applications sont des normes sur E .

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(x) dx}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|.$$

ii) Soit la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \\ nx, & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

La suite (f_n) est-elle de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$, $(E, \|\cdot\|_2)$ et $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

Fonctions différentiables

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie au voisinage $\mathcal{V}(x)$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et soit $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ un autre élément de \mathbb{R}^n tel que $x + h \in \mathcal{V}(x)$.

\mathbb{R}^n est muni d'une structure d'espace vectoriel normé sur le corps des réels \mathbb{R} et $\|x\|$ désigne la norme d'un vecteur x de \mathbb{R}^n .

La fonction f est dite différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, si on peut écrire

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + \varepsilon_x(h) \|h\| \quad (1)$$

où pour x fixé, l'application $l \longrightarrow d_x f(l)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et l'application $l \longrightarrow \varepsilon_x(l)$ est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} qui vérifie

$$\lim_{l \rightarrow 0} \varepsilon_x(l) = 0$$

Conséquences :

a) S'il existe une application linéaire vérifiant (1), elle est unique.

b) Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , on peut écrire

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n h_i e_i, \text{ d'où}$$

$$df_x(h) = df_x\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n h_i df_x(e_i) = \sum_{i=1}^n A_i(x) h_i$$

Ainsi si la fonction f est différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x) h_i + \varepsilon_x(h) \|h\|$$

Si f est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, l'application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} :

$$h \longrightarrow df_x(h) = \sum_{i=1}^n A_i(x) h_i$$

est dite **différentielle** au point x de la fonction f .

Exemple : Les fonctions projections de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} sont différentiables.

En effet comme $p_i(x) = x_i$ et $p_i(x+h) = x_i + h_i$, d'où $p_i(x+h) - p_i(x) = h_i$,

ce qui montre bien que p_i est différentiable avec $A_j = 0$ pour $i \neq j$, $A_i = 1$ et $\varepsilon = 0$.

Ce qui donne : $dp_{i(x)}(h) = h_i$,

on utilisera alors la notation suivante : $d\mathbf{p}_{ix} = d\mathbf{x}_i$.

Avec cette notation, la différentielle au point x s'écrira

$$d\mathbf{f}_x = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_i$$

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , on dira que f est différentiable si on peut écrire

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + \varepsilon_x(h) \|h\| \quad (2)$$

où pour x fixé, l'application : $l \longrightarrow d_x f(l)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p et l'application $l \longrightarrow \varepsilon_x(l)$ est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p qui vérifie $\lim_{l \rightarrow 0} \varepsilon_x(l) = 0$

L'égalité (2) est une égalité entre vecteurs de \mathbb{R}^p , en passant aux composantes de ces vecteurs, on a alors p égalités

$$(f(x+h))_i - (f(x))_i = (df_x(h))_i + (\varepsilon_x(h))_i \|h\| \quad (3)$$

où $(f(x+h))_i$, $(f(x))_i$, $(df_x(h))_i$, $(\varepsilon_x(h))_i$ désignent les $i^{\text{èmes}}$ composantes des vecteurs

$$f(x+h), \quad f(x), \quad df_x(h), \quad \varepsilon_x(h)$$

En conclusion, une application f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est différentiable au point $x \iff$

les fonctions composantes $f_i = p_i \circ f$ sont différentiables en ce point.

Ce qui nous permet d'écrire, en utilisant les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p :

$$df_x(h) = A(x)h$$

où $A(x)$ est la matrice $(A_{ij}(x))$ à p lignes et n colonnes.

Propriétés des fonctions différentiables :

a) Continuité :

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , différentiable

au point $x \in \mathbb{R}^n$, de la définition de la différentiabilité :

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + \varepsilon_x(h) \|h\|, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_x(h) = 0$$

on peut déduire que : $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) = 0$.

Ce qui montre que toute fonction différentiable au point x est continue en ce point.

b) Existences des dérivées partielles :

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x)h_i + \varepsilon_x(h) \|h\|, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_x(h) = 0$$

Soit : $h = (0, 0, \dots, h_p, \dots, 0, 0) \implies \|h\| = |h_p| \implies$

$$\frac{f(x_1, \dots, x_p + h_p, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h_p} = A_p(x) \pm \varepsilon_x(h_p)$$

Ainsi, si nous considérons la fonction d'une seule variable :

$$t \longrightarrow f(x_1, \dots, x_{p-1}, t, x_{p+1}, \dots, x_n)$$

Cette fonction admet pour la valeur x_p une dérivée égale à $A_p(x)$, que l'on note :

$$D_p f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_p}$$

On dit alors que que la fonction f admet une dérivée partielle relative à la variable x_p .

D'où l'écriture de la différentielle :

$$Df_x = \sum_{i=1}^n D_i f(x) dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$$

Si l'on a une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , différentiable

au point $x \in \mathbb{R}^n$, la différentielle est représentée par une matrice appelée

Matrice jacobienne

$$Jf(x) = D_j f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)$$

($i = 1, \dots, p$ indice des lignes; $j = 1, \dots, n$ indice des colonnes).

$Jf(x)$ est une matrice à p lignes et n colonnes.

Si l'on a $n = p$, la valeur absolue du déterminant de la matrice $Jf(x)$ est appelé

Jacobien.

Remarque : On vient de voir que si l'on a une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, alors les dérivées partielles par rapport à chaque coordonnées variables x_i existent.

Mais l'existence des dérivées partielles en un point n'assurent pas la différentiabilité en ce même point.

Toute application f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , définie sur un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ et admettant des **dérivées partielles continues** sur ce voisinage, est différentiable au point x .

Une telle fonction est dite **continuellement différentiable** au point x ou de classe \mathbb{C}^1

Dérivée dans une direction :

Soit \vec{u} un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n ($\|\vec{u}\| = 1$) et f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On appelle dérivée directionnelle de la fonction f , au point x et dans la direction du vecteur \vec{u} la limite suivante (si elle existe)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda \vec{u}) - f(x)}{\lambda} = D_{\vec{u}} f(x)$$

Si f est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, elle admet des dérivées partielles dans toutes les directions et l'on a

$$D_{\vec{u}} f(x) = df_x(\vec{u})$$

Si f est différentiable en un point $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x + h) - f(x) = df_x(h) + \varepsilon_x(h) \|h\|, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_x(h) = 0$$

Soit $h = \lambda \vec{u} \implies f(x + \lambda \vec{u}) - f(x) = df_x(\lambda \vec{u}) + \varepsilon_x(\lambda \vec{u}) \|\lambda \vec{u}\|$
 $\implies f(x + \lambda \vec{u}) - f(x) = \lambda df_x(\vec{u}) + \varepsilon_x(\lambda \vec{u}) |\lambda|$

En divisant par λ , on obtient :

$$\frac{f(x + \lambda \vec{u}) - f(x)}{\lambda} = df_x(\vec{u}) + \varepsilon_x(\lambda \vec{u})$$

Ce qui donne par passage à la limite :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda \vec{u}) - f(x)}{\lambda} = df_x(\vec{u}) = D_u f(x)$$

Remarque 1 : Comme on a :

$$D_u f(x) = df_x(\vec{u}) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \cdot u_n$$

En utilisant l'opérateur différentiel (**gradient**) :

$$\overrightarrow{\text{grad } f(x)} = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

On a alors :

$$D_u f(x) = df_x(\vec{u}) = \nabla f(x) \cdot \vec{u}$$

Remarque 2 : Avec le gradient, on écrira que la fonction f est différentiable en un point $x \in \mathbb{R}^n$ comme suit

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \varepsilon(h) \|h\|$$

Composition de fonctions différentiables

Soit f une application d'une partie E de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p différentiable en x , et g une application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q définie sur $f(E)$ et différentiable en $y = f(x)$. La fonction $F = g \circ f$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^q est alors différentiable au point x et l'on a :

$$dF_x = dg_{f(x)} \circ df_x$$

$\mathbf{J}(f(x))$ avec p lignes et n colonnes , $\mathbf{J}_g(f(x))$ avec q lignes et p colonnes
 $\mathbf{J}(g \circ f(x))$ q lignes et n colonnes, ceux sont les matrices des applications linéaires : df_x , $dg_{f(x)}$ et $dg_{f(x)} \circ df_x$.

Comme

$$dg_{f(x)} \circ df_x$$

on en déduit que la matrice $\mathbf{J}(g \circ f(x))$ est le produit des deux matrices $\mathbf{J}_g(f(x))$ et $\mathbf{J}(f(x))$:

$$\mathbf{J}(g \circ f(x)) = \mathbf{J}_g(f(x)) \cdot \mathbf{J}(f(x))$$

Exemple $q = 1$:

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p différentiable en x , et g une application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} différentiable en $f(x)$.

Soit la fonction f

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longrightarrow (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

$\mathbf{J}(f(x))$ est une matrice avec p lignes et n colonnes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Soit maintenant la fonction g :

$$\begin{aligned} g & : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) & \longrightarrow g((f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))) \end{aligned}$$

$\mathbf{J}_g(f(x))$ est une matrice à une ligne et p colonnes :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial f_1}, \frac{\partial g}{\partial f_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial f_p} \right)$$

En faisant le produit des deux matrices :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial f_1}, \frac{\partial g}{\partial f_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial f_p} \end{pmatrix} =$$

On obtient une matrice avec **une** ligne et **n** colonnes dont les éléments sont donnés par la formule :

$$\frac{\partial g(f(x_1, x_2, \dots, x_n))}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))}{\partial f_i} \cdot \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j}$$

- **Exemple :** Soit $f(x, y) = x^3 + xy^2$.
 et $F(x, y) = f(y, x) = y^3 + yx^2$

La fonction F est la composition de deux fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow (y, x) \longrightarrow f'(y, x) \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de la première application est la suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La jacobienne associée à f :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x} \right) (y, x) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) = [2xy]_{(x,y)} = 2xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = [3x^2 + y^2]_{(y,x)} = 3y^2 + x^2$$

Exercice

a) Soit la fonction définie sur \mathbb{R}^2 privé de la première bissectrice ($y = x$):

$$f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$$

Montrer que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos a$$

b) Calculer la limite suivante en utilisant deux méthodes différentes

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Exercice 2

a) Déterminer les courbes de niveau (**isoclines**) de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow xy \end{aligned}$$

Tracer l'allure de quelques unes sur un même repère.

b) Mêmes questions pour la fonction : (Courbes de niveau pour $k = 0$ et $k \neq 0$) :

$$f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

Exercice 3

*** Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Exercice 4

Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1

Est ce que f est continuellement différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 5

Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

- Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.
- Calculer les dérivées partielles du premier ordre pour $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Etudier leur continuité en $(0, 0)$.
- La fonction f est-elle différentiable en $0, 0$

Exercice 6

Justifier que la fonction f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx$$

est différentiable et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 7

Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1

de la fonction $f(u, v) = u + v$ avec $u(x, y) = e^{x+y}$ et $v(x, y) = x^2 + y^2$

Exercice 8

Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Calculer les dérivées (ou les dérivées partielles) des fonctions suivantes

$$F(x, y) = f(y, x), \quad g(x) = f(x, x)$$

$$H(x, y) = f(y, f(x, x)), \quad G(x) = f(x, f(x, x))$$

Vérifier vos résultats sur l'exemple suivant : $f(x, y) = x^3 + xy^2$.

Exercice 9

Soit donnée la fonction $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$.

Calculer la dérivée directionnelle au point $(1, 1, 1)$

a) dans la direction du vecteur $\vec{u}_1 = (2, 1, 3)$

b) dans la direction du vecteur $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$

Exercice 10

Soit la fonction définie implicitement $f(x, y) = e^x - e^y + x^2 + xy = 0$. Calculer $\frac{dy}{dx}$

Extréma d'une fonction à plusieurs variables

Definition 1 Soit a et b deux points de \mathbb{R}^n . On appelle *segment* $[a, b]$ de \mathbb{R}^n , l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ de la forme

$$x = (1 - \lambda)a + \lambda b, \quad \lambda \in [0, 1]$$

Definition 2 Une partie $E \subset \mathbb{R}^n$ est dite *convexe*, si pour tout couple a, b de E , le segment $[a, b] \subset E$.

Formule des accroissements finis

Soit f une fonction différentiable d'une partie convexe $E \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} .

Soit x et $x + h$ deux points de E et g l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x + th \end{aligned}$$

Soit alors l'application $F = f \circ g$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$F(t) = f(g(t)) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$$

F est dérivable sur $[0, 1]$, on peut lui appliquer la formule des accroissements finis :

Il existe $\theta \in [0, 1]$ \mathbb{R}^n tel que : $F(1) - F(0) = F'(\theta)$

Ce qui donne :

$$f(x + h) - f(x) = \sum_{i=1}^n h_i D_i f(x + \theta h)$$

Formule de Taylor :

Supposons que la fonction f admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p , il en résulte que la fonction F est dérivable jusqu'à l'ordre p , on peut alors lui appliquer la **formule de Taylor** : il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que :

$$F(1) - F(0) = F(0) + \frac{1}{2!} F'(0) + \dots + \frac{1}{(p-1)!} F^{(p-1)}(0) + \frac{1}{p!} F^{(p)}(\theta)$$

On en déduit **la formule de Taylor** pour l'application f

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n h_i D_i f(x) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n (h_i D_i f(x))^{[2]} + \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i=1}^n (h_i D_i f(x))^{[p-1]} + \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^n (h_i D_i f(x+\theta h))^{[p]}$$

Extremum :

Soit f une application d'une partie $E \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} .

On dit que f admet un maximum (resp minimum) au point $a \in E$, s'il existe $\alpha > 0$ tel que, $\forall x \in E$ vérifiant $\|x - a\| < \alpha \implies f(x) \leq f(a)$ (resp $f(x) \geq f(a)$)
On dit que f admet un extremum s'il s'agit indifféremment d'un maximum ou d'un minimum.

Si f admet un extremum en un point a et si f admet des dérivées partielles

d'ordre 1, on a alors : $D_i f(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$, pour $i = 1, \dots, n$, ou encore

$$\overrightarrow{\nabla f(a)} = \overrightarrow{\text{grad } f(a)} = \overrightarrow{0}.$$

Il suffit de considérer la fonction d'une seule variable

$$x_i \longrightarrow \varphi(a_1, a_2, \dots, x_i, \dots, a_n)$$

En effet si f admet un maximum au point $a \implies \varphi$ admet un maximum en a_i , ce

qui implique $\varphi'(a_i) = 0$, d'où $D_i f(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$

Remarque :

Les conditions $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, $i \in [1, 2, \dots, n]$ sont donc nécessaires pour l'existence d'un extremum mais pour les fonctions à plusieurs variables ces conditions ne sont pas suffisantes

Exemple : $f(x, y) = x^2 - y^2$

on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$.

Au point $(0, 0)$, $f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Pourtant le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum, en effet pour :

$x \neq 0, y = 0 \implies f(x, y) = x^2$ donc $f(x, y) > f(0, 0)$

$x = 0, y \neq 0 \implies f(x, y) = -y^2$ donc $f(x, y) < f(0, 0)$.

Fonction à deux variables $(x, y) \rightarrow f(x, y)$.

Utilisons la formule de **Taylor** jusqu'à l'ordre 3 au voisinage de (x_0, y_0) avec

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

On a

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} \left[h^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{3!} \left[h \frac{\partial f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{\partial y} \right]^{[3]}$$

Ainsi pour h et k très proches de 0, le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ dépend de

$$h^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = rh^2 + 2hks + k^2t$$

avec les notations suivantes : $r = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ et $t = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$.

Si $\Delta = s^2 - rt < 0$, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ garde un signe constant \implies on a un **extremum**

Si $r < 0 \implies$ on a un **maximum**.

Si $r > 0 \implies$ on a un **minimum**

Si $\Delta = s^2 - rt > 0$, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ change de signe \implies **on n'a pas d'extremum**.

Si $\Delta = s^2 - rt = 0$, il faudrait poursuivre le développement de **Taylor**.

Série d'exercices

Exercice 1

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

- a) Montrer que f admet un seul point critique $M = (1, 2)$.
 - b) Donner la nature de ce point.
-

Exercice 2

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 6y^2$$

- a) Montrer que f admet quatre points critiques .
 - b) Donner la nature de ces points.
-

Exercice 3

Etudier les extréma de la fonction suivante:

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

Exercice 4

Soit un **parallépipède** rectangle de cotés x , y et z .

Sachant que la somme des cotés est constante ($x + y + z = L$)

comment choisir x , y et z pour que le volume du **parallépipède** soit maximal

Exercice 5

Montrer que la fonction : $f(x, y) = x^2 + y^2 + (ax + by + c)^2$
admet un minimum et trouver la valeur de ce minimum.

Exercice 6

Soit π le plan défini par : $\mathbf{z} = x + y + 1$

Trouver le point du plan π le plus proche de l'origine.

EXERCICE 7

Déterminer les extrémums de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dans le cas suivant

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Formes différentielles. Intégrales curvilignes

I) Formes différentielles

Définition 1 : On appelle forme différentielle définie sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n , une application ω de Ω dans le dual de \mathbb{R}^n .

Notation : dual de $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^*$

C'est donc une application qui prend ses valeurs dans un espace de formes linéaires.

La différentielle d'une fonction à plusieurs variables va nous fournir un exemple.

Définition 2 : Soit

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

la fonction est de classe C^1 sur l'ouvert Ω .

la différentielle de f notée df est définie par :

$$x \in \Omega \rightarrow df_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$$

Généralement, on note par $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ la base duale de la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) .

Ainsi pour tout $x \in \Omega$, la forme différentielle $\omega(x)$ va s'écrire comme suit :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i$$

où les coefficients a_i dépendent du point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Définition 3 : La forme différentielle ω est de classe C^k sur l'ouvert Ω si les fonctions a_i sont de classe C^k sur l'ouvert Ω .

II) Forme différentielle exacte

Définition 4 : La forme différentielle ω de classe C^0 sur l'ouvert Ω est exacte s'il existe une fonction f de classe C^1 sur l'ouvert Ω telle que : $\omega = df$.

La fonction f est une primitive de la forme différentielle ω .

Autre formulation : Soit le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V(x)} = (a_1(x_1, x_2, \dots, x_n), a_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, a_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

ω est une forme différentielle exacte si elle dérive d'une fonction potentielle f , autrement dit :

$$\overrightarrow{\text{grad } f(x)} = \overrightarrow{\nabla f(x)} = \overrightarrow{V(x)}$$

Théorème 1 : Soit P et Q deux fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω simplement connexe de \mathbb{R}^2 , alors la forme différentielle définie par :

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est exacte ssi :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque : \mathbb{R}^2 est simplement connexe, cela veut dire sans trou et constitué d'un seul morceau.

Théorème 2 :

Soit P , Q et R trois fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω simplement connexe de \mathbb{R}^3 , alors la forme différentielle

définie par :

$$\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

est exacte ssi $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial Q(x, y)}{\partial z} \\ \frac{\partial P(x, y)}{\partial z} &= \frac{\partial R(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Autre formulation : La forme différentielle $\omega(x, y, z)$ définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est exacte si

- Ω est simplement connexe
- le champ de vecteurs $V = (P, Q, R)$ est irrotationnel ie :

$\overrightarrow{rotV} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \implies$	<table style="border: none; margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">\overrightarrow{i}</td> <td style="padding: 0 10px;">\overrightarrow{j}</td> <td style="padding: 0 10px;">\overrightarrow{k}</td> <td style="padding: 0 10px;"> </td> <td style="padding: 0 10px;">$= \overrightarrow{0}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{\partial}{\partial x}$</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{\partial}{\partial y}$</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{\partial}{\partial z}$</td> <td style="padding: 0 10px;"> </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$P(x, y, z)$</td> <td style="padding: 0 10px;">$Q(x, y, z)$</td> <td style="padding: 0 10px;">$R(x, y, z)$</td> <td style="padding: 0 10px;"> </td> <td></td> </tr> </table>	\overrightarrow{i}	\overrightarrow{j}	\overrightarrow{k}		$= \overrightarrow{0}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$			$P(x, y, z)$	$Q(x, y, z)$	$R(x, y, z)$		
\overrightarrow{i}	\overrightarrow{j}	\overrightarrow{k}		$= \overrightarrow{0}$												
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$														
$P(x, y, z)$	$Q(x, y, z)$	$R(x, y, z)$														

Remarque : Si l'on a seulement :

$$\overrightarrow{rotV} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$$

et l'ouvert Ω n'est pas simplement connexe, on dit que ω est une forme différentielle **fermée**.

III) Facteur intégrant :

Si la forme ω n'est pas exacte mais que la forme

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \omega$$

l'est, on dit que f est un **facteur intégrant** de ω .

IV) Intégrales curvilignes

Définition 5 : On considère une forme différentielle ω définie continue sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n par :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

On considère une courbe paramétrée (Γ) tracée dans Ω avec le paramétrage suivant :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \vec{e}_i, \quad t \in [a, b]$$

On appelle intégrale curviligne de la forme différentielle ω l'intégrale définie par :

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \omega(M(t)) \left(\frac{dM(t)}{dt} \right) = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) x_i'(t) dt$$

Remarque : Dans le cas où $n = 2$ avec $\omega = Pdx + Qdy$, on a :

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) dt$$

Propriétés de l'intégrale curviligne :

Proposition 1 : L'intégrale curviligne de la forme ω sur la courbe Γ est indépendante du paramétrage choisi sur la courbe Γ , à condition de conserver la même orientation de la courbe.

Proposition 2 : Si on change l'orientation de la courbe Γ , l'intégrale curviligne de la forme ω change de signe, ce que l'on peut représenter par

$$\int_{\Gamma^+} \omega = - \int_{\Gamma^-} \omega$$

Proposition 3 : (Relation de **Chasles**) Si D est un point de la courbe $(\Gamma) = (\widehat{AB})$, on a l'égalité :

$$\int_{\widehat{AB}} \omega = \int_{\widehat{AD}} \omega + \int_{\widehat{DB}} \omega$$

Forme différentielle exacte

Proposition 4 : Si ω est une forme différentielle exacte sur l'ouvert Ω et si f est une primitive de ω (ie $\omega = df$), alors pour toute courbe $(\Gamma) = (\widehat{AB})$ de classe C^1 , d'origine A et d'extrémité B tracée dans Ω , on a :

$$\int_{\widehat{AB}} \omega = f(B) - f(A)$$

Corollaire : Si ω est une forme différentielle exacte sur l'ouvert Ω , alors pour toute courbe Γ **fermée** de classe C^1 tracée dans Ω on a :

$$\oint \omega = 0$$

Formule de Green-Riemann

Théorème : On considère une forme différentielle continue définie par

$$\omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

et un compact $K \subset \Omega$ dont la frontière Γ soit de classe C^1 par morceaux orientée dans le sens direct, on a :

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

Démonstration :

On suppose avoir un compact K schématisé par le dessin ci-dessus. Donc il existe deux fonctions de classe C^1 , φ et ψ définies sur $[a, b]$ telles que :

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

La frontière du compact K comprend alors :

- l'arc \widehat{AB} d'équation $y = \varphi(x)$.
- la verticale BC .
- l'arc \widehat{CD} d'équation $y = \psi(x)$.
- la verticale DA orientée vers le bas.

On a ainsi :

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx + \int_b^a P(x, \psi(x)) dx$$

car sur les verticales BC et DA , l'élément différentiel dx est nul.

Avec l'intégrale double $\iint_K \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy$, on a aussi :

$$\boxed{\iint_K \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [P(x, y)]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx}$$

$$\text{on a : } \int_{\Gamma} P(x, y) dx = - \iint_K \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy$$

En procédant avec la même approche, on obtient :

$$\int_{\Gamma} Q(x, y) dy = \iint_K \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy$$

Ce qui donne la formule de **Green- Riemann**.

Application :

Calcul d'une aire plane

Soit un compact $K \subset \Omega$ dont la frontière Γ soit de classe C^1 par morceaux orientée dans le sens direct , alors on peut calculer l'aire S de K au moyen de l'une des intégrales curvilignes suivantes :

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx = \oint_{\Gamma} xdy = - \oint_{\Gamma} ydx$$

Pour faire la démonstration, il suffit d'appliquer la formule de **Green-Riemann**.

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx, \text{ on a : } P(x, y) = -\frac{y}{2} \text{ et } Q(x, y) = \frac{x}{2} \implies$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2}$$

$$\implies S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx = \iint_K \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) dxdy = \iint_K dxdy$$

Exercices

Exercice 1

Soit la forme différentielle de degré 1 définie par :

$$\omega = \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy$$

sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$

Montrer que ω est fermée sur Ω .

Montrer que ω est exacte sur Ω

Trouver une primitive de ω .

Exercice 2

Soit la forme différentielle définie par

$$\omega = \frac{(z + y) dx + (z - x) dy - (x + y) dz}{(y + z)^2}$$

sur une partie E de \mathbb{R}^3 ne rencontrant pas le plan d'équation $y + z = 0$.

Montrer que ω est exacte et calculer sa primitive.

Exercice 3

Trouver la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$

de la forme différentielle exacte ω définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\omega = \frac{2xy}{(1 + x^2)^2} dx + f(x) dy$$

Exercice 4

On donne la forme différentielle

$$\omega(x, y) = (x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y dy$$

Montrer qu'elle admet un facteur intégrant $\mu(x)$.

Déterminer alors une fonction f (primitive) admettant $\mu(x)\omega(x, y)$ comme différentielle.

Exercice 5

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $\varphi(0) = 0$ et le champ de vecteurs

$$\vec{V} = ((1 + x^2)\varphi(x), -2xy\varphi(x), -z)$$

Déterminer φ pour que \vec{V} dérive d'une potentiel $f = f(x, y, z)$ et calculer f .

Exercice 6

Soit la forme différentielle

$$\omega(x, y, z) = 2xz dx - 2yz dy - (x^2 - y^2) dz$$

Trouver un facteur intégrant de la forme $f(z)$ ($f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Exercice 7

Vérifier les relations suivantes où φ est une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} et $\vec{V}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ un champ de vecteurs

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{V}) = \varphi \operatorname{div}(\vec{V}) + \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi} \cdot \vec{V}$$

$$\operatorname{Rot}(\varphi \vec{V}) = \varphi \operatorname{Rot}(\vec{V}) + \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi} \wedge \vec{V}.$$

Exercice 8

Calculer l'intégrale curviligne $\mathbf{I} = \oint_C y^2 dx + x^2 dy$ où \mathbf{C} est la courbe fermée

définie implicitement par $\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - 2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et orientée dans le sens trigonométrique.

Exercice 9

Soit $\vec{V}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ un champ de vecteurs.

Calculer la circulation le long du cercle de centre O et de rayon r .

En déduire que la forme différentielle ω n'est pas exacte.

Exercice 10

Calculer l'intégrale curviligne de

$$\omega = x^2 dx - xy dy$$

le long des contours suivants

- le segment de droite OB avec $O(0, 0)$ et $B(1, 1)$

- l'arc de parabole : $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$, orienté dans le sens des x croissants.

Que peut-on conclure pour la forme ω .

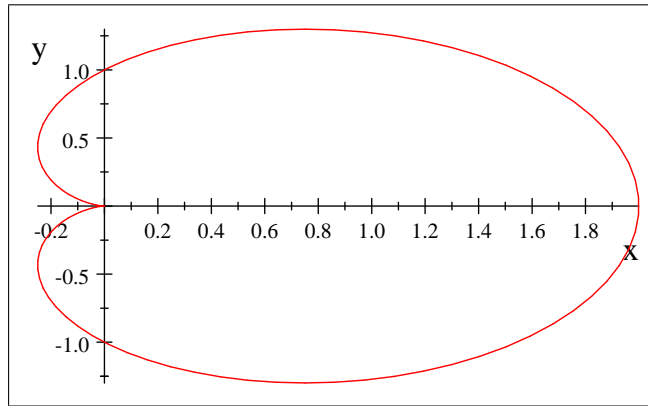
Exercice 11

Soit la forme différentielle

$$\omega(x, y) = (x + y)dx + (x - y)dy$$

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{AB} \omega$ le long de la **demi-cardioïde**

d'équation polaire : $\rho = 1 + \cos \theta$ pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$



Calculer l'aire de la **cardioïde**
 Calculer le périmètre de la **cardioïde**

Exercice 12

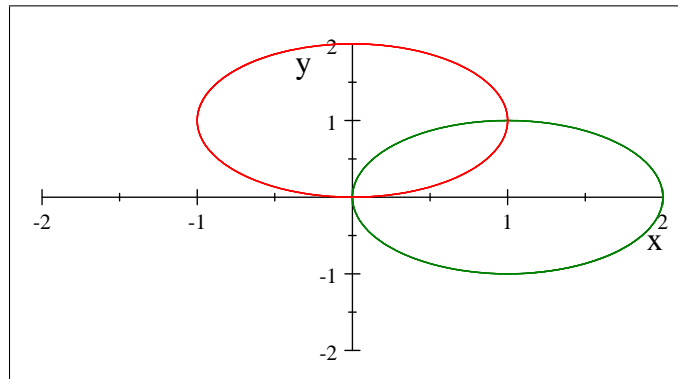
Soit la forme différentielle :

$$\omega(x, y) = ydx + aydy$$

Calculer l'intégrale curviligne $\oint_{\Gamma} \omega$ le long du contour Γ limitant
 l'intersection des deux disques

$$x^2 + y^2 - 2x \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y \leq 0$$



Examen du Mardi 24 mai 2016

Exercice 1)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$|f(x, y)| \leq |y|$$

b) Etudier la continuité de la fonction f sur \mathbb{R}^2 .

c) Calculer : $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}$

d) Etudier la différentiabilité de la fonction f en $(0, 0)$.

Exercice 2)

On considère la forme différentielle

$$\omega(x, y) = 2x dx + (x^2 + y^2 + 2y) dy$$

i) Montrer que ω n'est pas une forme exacte.

ii) Trouver un facteur intégrant $\psi(y)$ de la forme $\omega(x, y)$.

iii) Trouver une fonction f telle que :

$$df(x, y) = \psi(y) \cdot \omega(x, y)$$

Exercice 3)

Calculer l'aire du domaine D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq 2x + y \leq 1, -2 \leq 2x - y \leq 2\}$$

en effectuant le changement de variables :

$$u = 2x + y$$

$$v = 2x - y$$

Correction

Exercice 1)

a) Sachant que :

$$|xy| \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2$$

$$\implies \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| |y| \leq |y|$$

b) La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$ (opérations sur les fonctions continues)

En $(0, 0)$, on a :

$$0 \leq |f(x, y)| \leq |y| \implies \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

Donc la fonction est continue sur \mathbb{R}^2 .

Autre méthode : En utilisant les coordonnées polaires, on a aussi :

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cos \theta \sin^2 \theta \implies |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq r$$

Ce qui donne : $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$

c) On a par définition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

d) **Etude de la différentiabilité en $(0, 0)$**

Si la fonction f est différentiable en un point (x_0, y_0) , on doit avoir

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} h_2 + \varepsilon(h_1, h_2) \|(h_1, h_2)\|$$

$$\text{avec } \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h_1, h_2) = 0$$

Dans notre cas, on a :

$$f(h_1, h_2) - f(0, 0) = +\varepsilon(h_1, h_2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon(h_1, h_2) = \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

avec :

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h_1, h_2) \neq 0$$

en effet :

$$\varepsilon(h_1, h_1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ainsi la fonction f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 2)

i) On a : $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$
avec $P(x, y) = 2y$ et $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2x \quad \implies \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

La forme ω n'est pas une **forme fermée**, ce n'est pas une **forme exacte**.

ii) **Facteur intégrant** : On a

$$\psi(y) \cdot \omega(x, y) = 2x\psi(y)dx + (x^2 + y^2 + 2y)\psi(y)dy$$

avec :

$$\frac{\partial (2x\psi(y))}{\partial y} = \frac{\partial ((x^2 + y^2 + 2y)\psi(y))}{\partial x}$$

Ce qui donne :

$$2x\psi'(y) = 2x\psi(y) \implies \psi'(y) = \psi(y) \implies \psi(y) = ke^y$$

d'où : $\psi(y) \cdot \omega(x, y) = 2xe^y dx + (x^2 + y^2 + 2y)e^y dy$

iii) **Calcul d'une primitive de $\psi(y) \cdot \omega(x, y)$** :

Soit une fonction à deux variables f telle que :

$$df = 2xe^y dx + (x^2 + y^2 + 2y)e^y dy$$

d'où l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 + y^2 + 2y)e^y \quad (2)$$

En intégrant l'équation (1), on obtient :

$$f(x, y) = x^2 e^y + C(y) \quad (3)$$

En calculant la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable y , on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y + C'(y) = (x^2 + y^2 + 2y)e^y$$

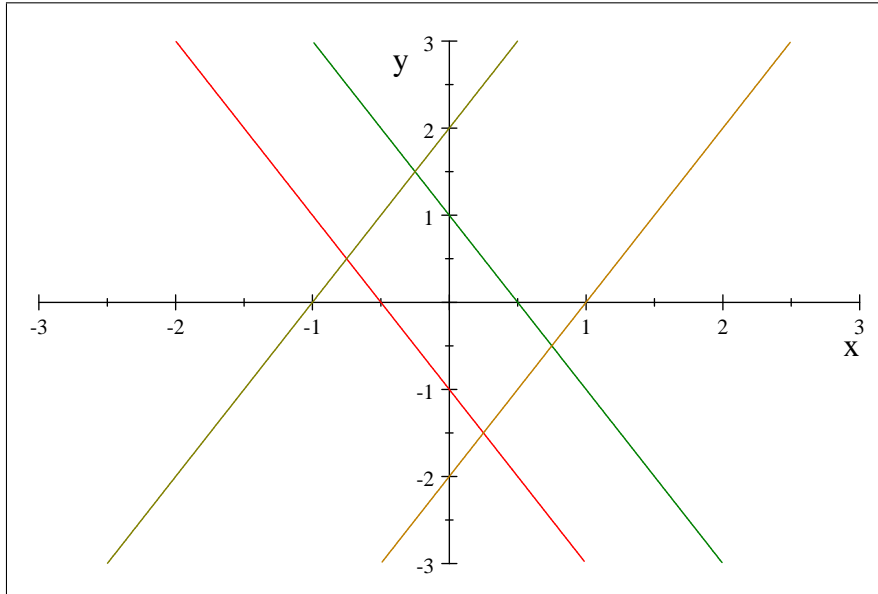
$$\implies C'(y) = (y^2 + 2y)e^y$$

$$\implies C(y) = y^2 e^y + k$$

d'où :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^y + k$$

Exercice 3 :



On commence par trouver les expressions des anciennes variables x et y par rapport aux nouvelles variables u et v

$$x(u, v) = \frac{u + v}{4}, \quad y(u, v) = \frac{u - v}{2}$$

On a alors l'application vectorielle :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longrightarrow \left(\frac{u + v}{4}, \frac{u - v}{2} \right) \end{aligned}$$

On calcule alors le jacobien de cette application

$$j = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Aire}(D) = \iint_D dx dy = \iint_{\text{Im}(D)} \frac{du dv}{4} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 du \int_{-2}^2 dv = 2$$

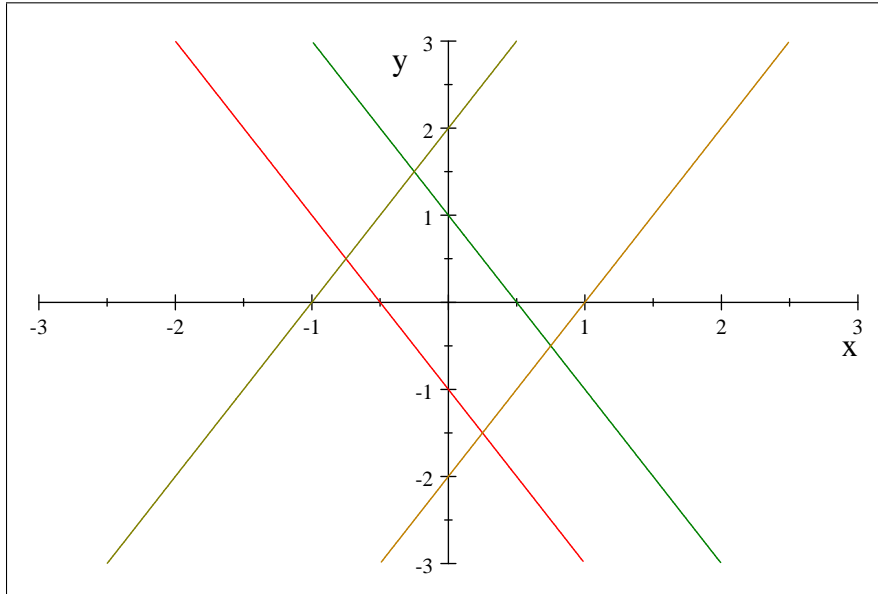
Autre méthode pour calculer l'aire d'un domaine plan :

On utilise la formule suivante :

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx = \oint_{\partial D} x dy = - \oint_{\partial D} y dx$$

On commence par calculer les coordonnées des sommets du parallélogramme :

$$A = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{2} \right), \quad B = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right), \quad C = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2} \right), \quad D = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right)$$



$$\text{Aire}(D) = \oint x dy = \int_{AB} x dy + \int_{BC} x dy + \int_{CD} x dy + \int_{DA} x dy$$

Pour AB , on est sur la droite d'équation $y = 2x - 2$

$$\int_{AB} x dy = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 2x dx = \frac{1}{2}$$

Pour BC , on est sur la droite d'équation $y = -2x + 1$

$$\int_{BC} x dy = - \int_{\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{4}} 2x dx = \frac{1}{2}$$

Pour CD , on est sur la droite d'équation $y = 2x + 2$

$$\int_{CD} x dy = \int_{-\frac{1}{4}}^{-\frac{3}{4}} 2x dx = \frac{1}{2}$$

et pour DA , on est sur la droite d'équation $y = -2x - 1$

$$- \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} 2x dx = \frac{1}{2}$$

En conclusion, on obtient :

$$\text{Aire}(D) = 2$$

Autre méthode : utilisation du produit vectoriel

$$\text{on a : } \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{AD} = (-1, 2) \implies$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{k}$$

et l'on a ainsi : $Aire(D) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 2$

Examen du 16 juin 2009

Exercice 1

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = (2x - y + 5)^2 + (x - 3y)^2 + 1$$

Calculer les dérivées partielles du premier ordre.

Déterminer les extrémums de la fonction donnée (points critiques et valeur

des extrémums).

Donner l'expression de la différentielle df au point $(1, 2)$.

Exercice 2

En utilisant le changement de variables : $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$

calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D (y^2 - 2x) dx dy$$

où le domaine D est défini comme suit :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

(Faire un dessin du domaine D).

Exercice 3

On donne sur $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$, le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

a) Calculer, pour tout cercle centré à l'origine $\mathbb{C}(0, \rho)$, l'intégrale curviligne

$$\oint_{\mathbb{C}(0, \rho)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

b) Soit la forme différentielle : $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

- Montrer que ω est une forme différentielle fermée, est ce qu'elle est exacte?

- Calculer une primitive de ω sur \mathbb{R}^2 privé de la demi-droite $\{x \leq 0, y = 0\}$.

c) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y)$ le long du carré Ω

de sommets $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$, $D(1, 1)$ décrit dans le sens direct.

Correction

Exercice 1

$$1) f(x, y) = (2x - y + 5)^2 + (x - 3y)^2 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \cdot 2(2x - y + 5) + 2(x - 3y) = 10x - 10y + 20$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2(2x - y + 5) - 2 \cdot 3(x - 3y) = -10x + 20y - 10$$

2) **Points critiques** : Les points critiques sont les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10x - 10y + 20 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -10x + 20y - 10 = 0 \end{cases} \implies x = -3, y = -1$$

Nature du point critique : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3, -1) = 10$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3, -1) = 20$,

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = -10 \implies s^2 - rt = -100 < 0$, avec $r > 0$, c'est un minimum.

Et le minimum est égal à : $f(-1, -3) = 1$

Autre méthode : La solution est évidente, on a la somme de deux carrés plus

1, ainsi la valeur minimale de la fonction donnée est égale à 1 avec

$$2x - y + 5 = 0 \text{ et } x - 3y = 0 \implies x = -3, y = -1.$$

$$3) df_{(1,2)} = 10 dx + 20 dy$$

Exercice 2

On commence par calculer le jacobien du changement de variables

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$$

Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (y^2 - 2x) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (b^2 r^2 \sin^2 \theta - 2ar \cos \theta) abr dr d\theta \\ &= ab^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} dr d\theta - 2a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cos \theta dr d\theta \\ &= \frac{ab^3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta - \frac{2a^2 b}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{ab^3 \pi}{16} - \frac{2a^2 b}{3}. \end{aligned}$$

Autre méthode : Utilisation de la formule de **Green-Riemann**

$$I = \iint_D (y^2 - 2x) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy$$

On commence par chercher P et Q tels que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

On peut prendre par exemple : $\mathbf{Q(x, y)} = \mathbf{xy^2}$ et $P(x, y) = 2xy$.

Le domaine \mathbf{D} étant l'intérieur d'un quart d'une ellipse, on décompose le bord Γ

comme suit : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ avec $\Gamma_1 = \{x = 0, 0 \leq y \leq b\}$,

$\Gamma_2 = \left\{ x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, $\Gamma_3 = \{y = 0, 0 \leq x \leq a\}$

Sur Γ_1 et Γ_3 , l'intégrale curviligne est nulle. Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma_3} 2xy dx + xy^2 dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2a^2b \cos \theta \sin^2 \theta + ab^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta \\ &= -2a^2b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d(\sin \theta) + \frac{ab^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 (2\theta) d\theta \\ &= -\frac{2a^2b}{3} + \frac{ab^3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = -\frac{2a^2b}{3} + \frac{ab^3\pi}{16} \end{aligned}$$

Exercice 3

a) L'intégrale curviligne porte sur un cercle centré à l'origine, on utilise alors les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta \\ J &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\rho \sin \theta}{\rho^2} (-\rho \sin \theta) d\theta + \frac{\rho \cos \theta}{\rho^2} (\rho \cos \theta) d\theta \right) = 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Soit } P(x, y) &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ Q(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

La forme différentielle ω est donc une forme fermée mais elle n'est pas une forme

exacte car son domaine de définition $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ n'est pas un domaine étoilé.

Calcul d'une primitive de ω : Soit $F(x, y)$ une primitive de

$$\omega \implies \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\text{d'où : } F(x, y) = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c(x) \implies \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + c'(x) \implies c'(x) = 0 \implies c(x) = k$$

$$F(x, y) = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k$$

c) Le chemin d'intégration Ω se trouvant dans un domaine étoilé, la forme est alors

exacte donc la circulation est égale à zéro $\oint_{\Omega} Pdx + Qdy = 0$.

Examen du 28 juin 2009

Exercice 1

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3(x^2 - y^2)$$

- Calculer les dérivées partielles du premier ordre.
- Déterminer les points critiques de la fonction donnée
- Calculer les dérivées partielles du second ordre.
- Donner la nature des points critiques.

Exercice 2

Calculer l'intégrale curviligne :

$$\oint_{\mathbb{C}(0,1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_{\mathbb{C}(0,1)} (x^3 - y) dx + (x + y) dy$$

le long du cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct

$$\mathbb{C}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

(Faire un dessin du cercle $\mathbb{C}(0, 1)$).

Exercice 3

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

- Quel est le domaine de définition de f .
- Etudier la continuité de la fonction donnée à l'origine.
- Montrer que f est continue en $(0, 0)$ séparément par rapport à chacune des variables.
- Montrez que les dérivées partielles $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}$ existent, puis calculez-les.

Correction

Exercice 1

1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3(x^2 - y^2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 - 6x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3y^2 + 6y\end{aligned}$$

2) **Points critiques** : Les points critiques sont les solutions du système

$$\begin{aligned}3x(x - 2) &= 0 \\ 3y(y + 2) &= 0\end{aligned}$$

Ce qui nous donne 4 points critiques : $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(0, -2)$ et $C(2, -2)$

Dérivées partielles du second ordre :

$$\begin{aligned}r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x - 6, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y + 6, \\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0\end{aligned}$$

3) **Nature des points critiques :**

* L'origine $O(0, 0)$: $r = -6$, $t = 6$, $s = 0 \implies: s^2 - rt = 36 > 0$

O est un point stationnaire.

* Le point A : $r = 6$, $t = 6$, $s = 0 \implies: s^2 - rt = -36 < 0$,

avec $r > 0$, on a un minimum

* Le point B : $r = -6$, $t = -6$, $s = 0 \implies: s^2 - rt = -36 < 0$,

avec $r < 0$, on a un maximum

* Le point C : $r = 6$, $t = -6$, $s = 0 \implies: s^2 - rt = 36 > 0$,

C est un point stationnaire

Exercice 2

On commence par séparer l'intégrale comme suit

$$I = \oint_{\mathbb{C}(0,1)} (x^3 - y) dx + (x + y) dy = \oint_{\mathbb{C}(0,1)} x^3 dx + y dy + \oint_{\mathbb{C}(0,1)} -y dx + x dy$$

Ce qui nous permet de voir que la première intégrale est nulle, car la forme différentielle :

$$\omega = x^3 dx + y dy$$

est une forme exacte sur \mathbb{R}^2

Pour le calcul de la deuxième intégrale sur le cercle trigonométrique on pose : $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, ce qui donne

$$I = \int_0^{2\pi} [-\sin \theta (-\sin \theta) d\theta + \cos \theta (\cos \theta) d\theta] = \int_0^{2\pi} [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Exercice 3

a) Le domaine de définition est égal à \mathbb{R}^2

b) En posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on a :

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$$

$$\text{d'où } \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta$$

ainsi la fonction donnée n'a pas de limite à l'origine donc il y a discontinuité à l'origine.

c) On a

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 0 \text{ et } f(0, 0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) &= f(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

La fonction $f(x, 0)$ est continue à l'origine, il en est de même pour la fonction $f(0, y) = 0$.

d) On a par définition de la dérivée partielle par rapport à la variable x :

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$$

Sachant que : $f(x, 0) = 0$ sur \mathbb{R} , la fonction est donc dérivable sur \mathbb{R}

$$\text{avec } \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0.$$

On fait le même raisonnement pour la fonction $f(0, y) = 0$ avec $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$.

Examen du 31 mai 2011

Exercice 1

Soit la forme différentielle : $\omega = \frac{ydx - xdy}{xy}$

définie sur le domaine $\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$

- Montrer que ω est une forme différentielle fermée, est ce qu'elle est exacte ?

- Calculer une primitive de ω sur $\mathbf{D} = \mathbb{R}_+^* \cdot \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

Tracer sur le même repère orthonormé les courbes Γ et Ω des deux fonctions : $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x^3$.

Calculer avec deux méthodes différentes **l'aire** du domaine limité par $x = 0$, $x = 1$ et les courbes Γ et Ω .

Exercice 3

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction f est continue à l'origine.

b) Calculer les dérivées partielles du premier ordre sur \mathbb{R}^2

c) Etudier la différentiabilité de la fonction f à l'origine.

d) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Que peut-on conclure.

Correction

Exercice 1

$$P(x, y) = \frac{1}{x}, \quad Q(x, y) = -\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \text{ la forme différentielle } \omega \text{ est fermée}$$

comme D est simplement connexe, elle est donc exacte.

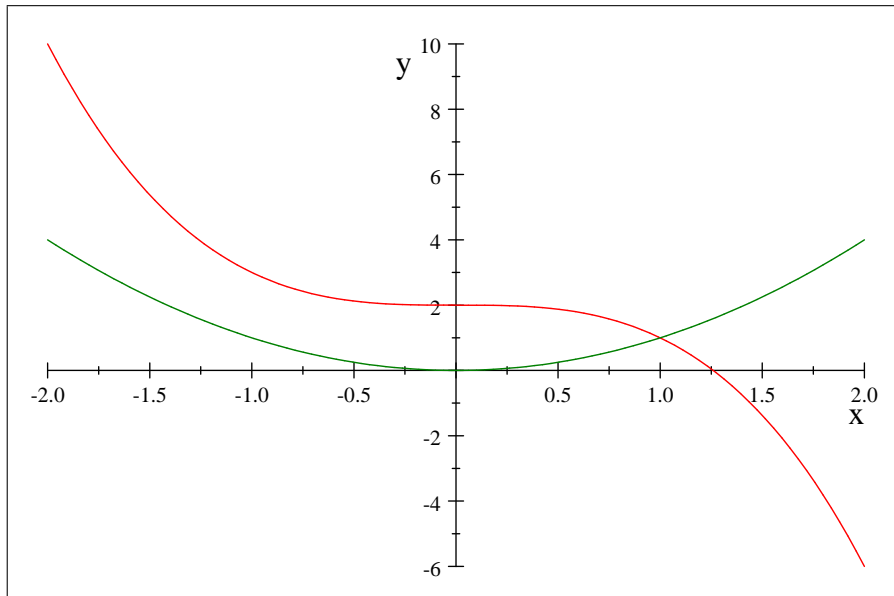
Calcul de la primitive

$$\text{Soit la fonction } f \text{ telle que : } df = \omega \implies \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y}$$

$$\implies f(x, y) = \ln x + C(y) \implies C'(y) = -\frac{1}{y} \implies C(y) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + k$$

$$\text{Finalement; on obtient : } f(x, y) = \ln \frac{Ax}{y} \text{ (2 points).}$$

Exercice 2



$$A = \iint_D dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^3} dy \right) dx = \int_0^1 [2 - x^3 - x^2] dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{17}{12}$$

$$A = -\oint y dx = -\int_0^1 x^2 dx - \int_1^0 (2 - x^3) dx = -\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{4} = \frac{17}{12}$$

Exercice 3

$$\text{a) Par majoration : } |f(x, y)| = \left| xy \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy|$$

Coordonnées polaires

$$|f(x, y)| \leq r^2 |\cos \theta \sin \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)|$$

$$\text{donc } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = 0$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} - y \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + x \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Les dérivées partielles premières sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$.

Etude à l'origine

Par majoration :

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| &\leq |y| \left| \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right| + |2y| \left| \frac{2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 3|y| \\ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| &\leq 3|x|\end{aligned}$$

Coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(r, \theta) &= r \sin \theta [\sin^2 \theta - \cos^2 \theta - 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta] \\ \frac{\partial f}{\partial y}(r, \theta) &= r \cos \theta [\sin^2 \theta - \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta]\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

La fonction est de classe $C^1(\mathbb{R}^2) \implies$ elle est différentiable sur \mathbb{R}^2

$$\text{c) } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} - y \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + x \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{x} = -1$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0),$$

D'après le Théorème de **Schwarz**; les fonctions

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \text{ ne sont pas continues à l'origine.}$$

Examen de remplacement

Exercice 1)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Etudier la continuité de la fonction f sur \mathbb{R}^2 .
 b) Calculer : $\overrightarrow{\nabla f(x, y)} = \overrightarrow{\text{grad } f(x, y)}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$
 puis calculer $\overrightarrow{\nabla f(0, 0)} = \overrightarrow{\text{grad } f(0, 0)}$
 d) La fonction est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Exercice 2)

Etudier de deux manières différentes la nature du point critique de la fonction $f(x, y)$ définie par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + y$$

Dire si c'est un extremum local ou global.

Exercice 3)

3) - Soient les quatre points suivants : $A(0, -1)$, $B(-1, -1)$, $C(1, 0)$ et $D(0, 1)$

Γ est le contour fermé $OABCD O$, où :

CD est un arc de cercle de centre O

et AB , BC , DA des segments de droite .

Calculer avec trois méthodes, l'intégrale curviligne suivante :

$$\oint_{\Gamma} (2x - y) dx + (x + 3y) dy$$

Examen de rattrapage

Exercice 1)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Montrer que pour $(x, y) \neq (0, 0)$: $|f(x, y)| \leq 4|y|$
 - La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$.
 - Calculer $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}$.
 - Etudier la différentiabilité de la fonction f en $(0, 0)$.
-

Exercice 2)

Soit la fonction $f(x, y)$ définie par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

- Trouver ses points critiques.
- Etudier la nature de ces points critiques.
- Montrer que l'on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$x^2 + y^2 \succeq \frac{(x - y)^2}{2}$$

En déduire que :

$$f(x, y) \succeq -8$$

Que peut-on conclure ?

Exercice 3)

Soit D le domaine de \mathbb{R}^2 défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Calculer avec trois méthodes différentes, l'aire de D .

Correction

Exercice 1)

$$\text{a) } |f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 y + 3y^3|}{|x^2 + y^2|} \\ \leq |y| \frac{x^2}{|x^2 + y^2|} + 3|y| \frac{y^2}{|x^2 + y^2|} \leq 4|y|.$$

b) La fonction est continue en $(0, 0)$ car : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$

En effet : $0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| \leq \lim_{y \rightarrow 0} 4|y| = 0 = f(0, 0)$

$$\text{c) On a : } f(x, 0) = 0 \implies \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$$

$$\text{et } f(0, y) = 3y \implies \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 3$$

d) Pour l'étude de la différentiabilité à l'origine, on peut écrire ce qui suit :

$$f(x, y) - f(0, 0) = 3y + \varepsilon(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon(x, y) = \frac{x^2 y + 3y^3 - 3y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

avec la fonction ε qui n'a pas de limite en $(0, 0)$.

La fonction f **n'est pas différentiable** en $(0, 0)$.

Exercice 2)

$$\text{a) } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y) = 0 \implies x^3 - (x - y) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y) = 0 \implies y^3 + (x - y) = 0 \quad (2)$$

$$\implies x^3 + y^3 = 0$$

$$\implies (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

$$\implies x = -y$$

En reportant cette égalité dans l'équation (1), on obtient :

$$x^3 - 2x = 0 \implies x(x^2 - 2) = 0 \implies x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

On a ainsi trois points critiques :

$$(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

b) Nature des points critiques :

Pour l'origine $(0, 0)$, on a $f(0, 0) = 0$

$$f(x, 0) = x^4 - 2x, \quad f(x, 0) \approx -2x$$

Pour $x \approx 0$, $f(x, 0)$ change de signe, donc l'origine est un **point selle**.

Pour les deux autres points, on calcule les dérivées partielles d'ordre deux

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 12y^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 4$$

Ce qui donne pour les deux points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$$r = 20, s = 4 \text{ et } t = 20$$

$$\implies s^2 - rt = -396 < 0 \implies \text{on a un extremum}$$

$r > 0 \implies$ les deux points donnent des minima.

$$\text{c) on a : } (x + y)^2 \geq 0 \implies x^2 + y^2 \geq -2xy$$

$$\implies 2x^2 + 2y^2 \geq x^2 - 2xy + y^2$$

Ce qui donne l'inégalité demandée : $x^2 + y^2 \geq \frac{(x - y)^2}{2}$

Pour montrer que : $f(x, y) \geq -8$

$$\text{c'est à dire : } x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 \geq -8$$

On commence par faire une minoration de $f(x, y)$

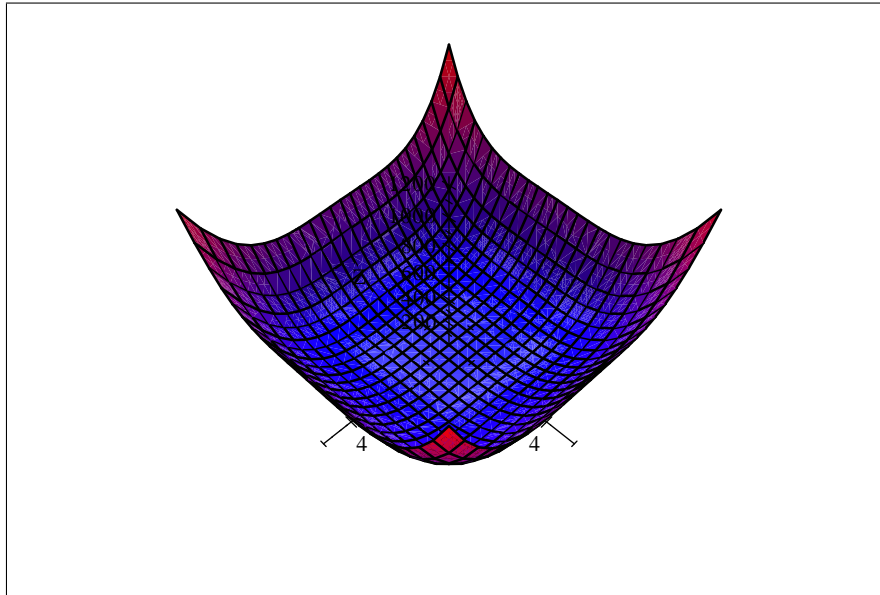
$$\implies f(x, y) \geq x^4 + y^4 - 4(x^2 + y^2) = x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2 = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 - 8$$

$$\implies f(x, y) + 8 \geq (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 \geq 0$$

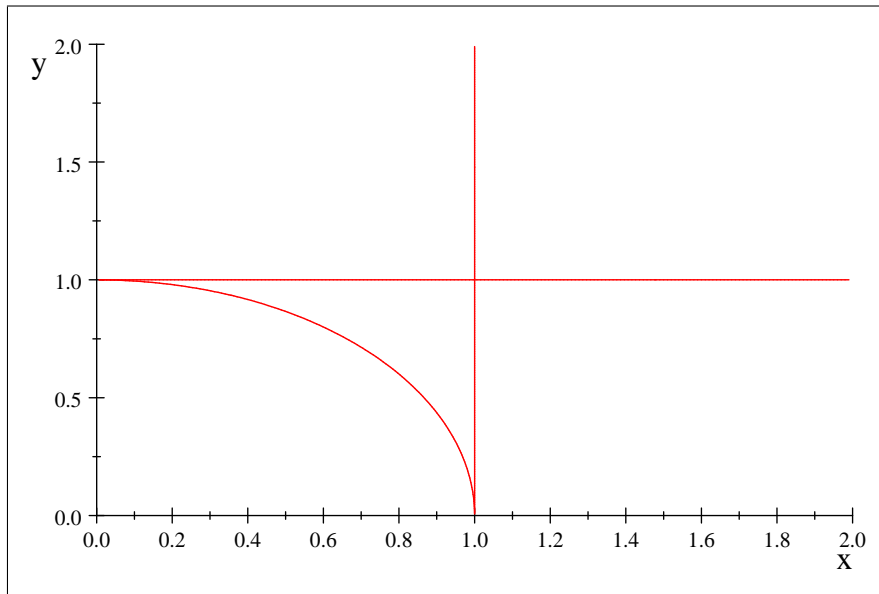
donc on obtient l'inégalité :

$$f(x, y) \geq -8 = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

On a alors un **minimum global**



Exercice 3)



Méthode 1:

L'aire du domaine est égale à l'aire du carré de coté 1 moins l'aire du quart de cercle de rayon 1, d'où :

$$S = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Méthode 2 :

On utilise l'intégrale double :

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy \right) dx = \int_0^1 [1 - \sqrt{1-x^2}] dx \\ &= 1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

On fait un changement de variable : on pose $x = \sin t$

Ce qui donne :

$$S = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$S = 1 - \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Méthode 3 :

On utilise l'intégrale curviligne $A = \oint_{\Gamma} x dy$

Γ étant la frontière du domaine D décrite dans le sens positif

Ce qui donne :

$$S = \oint_{\Gamma} xdy = \int_{AB} xdy + \int_{BC} xdy + \int_{\widehat{CB}} xdy$$

avec : $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 1)$ et \widehat{BC} l'arc de cercle

$$\text{Sur } AB, y \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 \text{ et } x = 1 \implies \int_{AB} xdy = \int_0^1 dy = 1$$

$$\text{Sur } BC, x \text{ varie de } 1 \text{ à } 0, \text{ et } y = 1 \implies \int_{BC} xdy = 0$$

Sur l'arc cercle CB , on a : $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ et θ varie de : $\frac{\pi}{2}$ à 0 .

$$\text{d'où : } \int_{\widehat{CB}} xdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = -\frac{\pi}{4}$$

et l'aire du domaine D est égale à :

$$S = 1 - \frac{\pi}{4}$$