Corrigé Type – EMD de Modélisation et Simulation

Solution Exercice N° 1 : (05 points)

1° – Les équations de stabilisation pour un processus de naissance et de mort en fonction de λ et μ sont :

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}}}$$ 1pt

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

…

$$\boxed{P_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} P_0}$$ 1pt

2° – La probabilité d'attente nulle pour un système de file d'attente M/M/1 est :

$$\boxed{P_0^{(*)} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$ 1pt

0.5pt

3° – Le processus de poisson est un processus de naissance ($\lambda_n=\lambda$; $\forall n \in R$). 0.5pt

4° – Régime transitoire dépend de « t » et le régime stationnaire ne dépend pas de « t ».

0.5pt 0.5pt

Solution Exercice N° 2 : (05 points)

Soit la matrice de transition $M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$ et $P^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est la distribution initiale de vecteur de probabilité.

1° – $M_{21} = 0.6$ 1pt

1pt

2° – $M^{(3)} = M^{(2)}\, M = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.257 \end{bmatrix}$

3° – $P^{(3)} = P.\, M^{(3)} = [0.746 \;\; 0.254]$ Donc $P_2^{(3)} = 0.254$ 0.5pt

1pt 0.5pt

Solution Exercice N° 3 : (05 points)

1° – Nombre moyen d'arrivées par période de 5 minutes :

1pt

$$P_0 = \frac{1}{100}\, n \sum_{n=0}^{6} nf_n = \boxed{1.27}$$ 1pt

2° – Effectuons donc un test du $\aleph^2$.

Arrivées pendant 5 min (n)	Fréquences observées	Fréquences Théoriques (100 $p_n(t)$)	Différence : $f_d = \lvert f_n - 100\, p_n(t) \rvert^2$	$\frac{fd}{100}$
0	29	28	1	.0357
1	34	36 1pt	4 0.5pt	.1111 0.5pt
2	24	23	1	.0435
3	8	9	1	.1111
≥ 4	5	4	1	.2500

Nous avons alors $\aleph_{exp}^2 = 0.0357 + 0.1111 + 0.0435 + 0.1111 + 0.2500 = 0.5514$. 0.5pt

Un niveau $\alpha = 5$ %, on obtient $\aleph_t^2 = 7.8147$ et vu que $\aleph_t^2 > \aleph_{exp}^2$ on accepte l'hypothèse que : $\lambda = 1.27$ / 5 minutes = 0.254 / minute

0.5pt

Solution Exercice N° 4 : (05 points)

- **Pour S = 1**

$\omega = \frac{\lambda}{\mu} = 2/3$ **0.25 pt**

$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1/3$ **0.25 pt**

$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = 2/9$ **0.25 pt**

$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} P_0 = (2/3)^n/3$ **0.25 pt**

$\overline{V} = 4/3$ **0.5pt**

$\overline{n} = \frac{\omega}{1-\omega} = 2.$ **0.5pt**

$\overline{t_f} = \overline{n} * \frac{1}{\omega} = 2/3$ **0.5pt**

- **Pour S = 2**

$\omega = 2/6$ **0.25 pt**

$P_0 = 1/2$ **0.25 pt**

$P_1 = 1/3$ **0.25 pt**

$P_n = (1/3)^n$ **0.25 pt**

$\overline{V} = 1/12$ **0.5pt**

$\overline{n} = 2.$ **0.5pt**

$\overline{t_f} = 3/4$ **0.5pt**