**Département de Mathématiques**
**Première année master, option, Algèbre et Géométrie**
**Matière, Groupes et Algèbres de Lie**
**Année universitaire 2024-2025**

$\boxed{\text{SN}^\circ 1}$

**Exercise 1.**

**a**) Montrer que la réunion disjointe de deux variété est une variété
**b)** Montrer qu'une variété est un espace topologique localement compact
**c**) Montrer qu'une variété est localement connexe
**d)** Sur $\mathbb{R}$ considérons les deux atlas à une carte ($U = \mathbb{R}$, $\varphi : x \mapsto x$) et ($V = \mathbb{R}$, $\psi : x \mapsto x^3$). Montrer que ces deux atlas ne sont pas compatibles
**e)** Soient $M$ une variété différentielle de classe $C^p$ de dimension $n$, $x \in M$, ($U$, $\varphi$) et ($V$, $\psi$) deux cartes de $M$ en $x$. soient $u$ et $v$ deux éléménts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie entre triplets $(U,\varphi,u)\mathcal{R}(V,\psi,v)$ si et seulement si $(\psi\circ\varphi^{-1})'(\varphi(x))(u) = v$ est une relation d'équivalence.

**Exercise 2.**

Les ensembles suivants sont-ils des variétés différentielles?
**a)** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+2y^2=1\}$ ;
**b)** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y=|x|\}$ ;
**c)** $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x^2+2y^2+3z^2+4t^2=4 \text{ et } x+y=z+t\}$ ;
**d)** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2-y^2=\alpha\}$ ;
**e)** $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=1 \text{ et } x^2+y^2-x=0\}$.

**Exercise 3.**

**a)** Soient $M$ et $N$ deux variétés de dimension $m$ et $n$ respectivement. Soit $f : M \to N$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.
i) Pour toute carte $(U,\varphi)$ de $M$ en $x$, et pour toute carte $(V,\psi)$ de $N$ en $f(x)$, l'application $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ est de classe $C^p$ de $\varphi(U\cup f^{-1}(V))$ dans $\mathbb{R}^n$;
ii) Pour tout $x$ de $M$, pour toute carte $(U,\varphi)$ en $x$ et $(V,\psi)$ en $f(x)$ telles que $f(U)\subset V$, $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ est de classe $C^p$ de $\varphi(U)$ dans $\mathbb{R}^n$;
iii) Pour tout $x$ de $M$, il existe une carte $(U,\varphi)$ de $M$ en $x$ et une carte $(V,\psi)$ de $N$ en $f(x)$ telles que $f(U)\subset V$ et $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ est de classe $C^p$ de $\varphi(U)$ dans $\mathbb{R}^n$.

**b**) Soient $M$ et $N$ deux variétés et $f : M \to N$ une application différentiable. Montrer que

i) Si $F$ est une immersion, alors on a necessairement $\dim M \leq \dim N$;
ii) Si $F$ est une submersion, alors on a necessairement $\dim M \geq \dim N$.

**c)** Soient $M$ et $N$ deux variétés de dimension $m$ et $n$ respectivement. Montrer que la projection canonique

$$\pi : M \times N \to M$$

est un morphisme de variétés

**Exercise 4.**

Montrer que les ensembles suivants sont des groupes de Lie et donner la dimension de chacun

**a)** Le groupe linéaire spécial :

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R});\ \det M = 1\}$$

**b)** Le groupe orthogonal :

$$O(n) = \left\{M \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, MM^t = I_n \right\}$$

**c)** Le groupe spécial orthogonal :

$$SO(n) = SL_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$$