Université Abbas

Cours de FERHAT Mécanique Analytique

Dr. ZANAT Leila (ACHIRI)

2023/2024

Chapitre 1 : Introduction

Cinématique du point matériel

Définition : La cinématique est l'étude du mouvement en fonction du temps indépendamment des causes produisant ce mouvement (les forces appliquées au point matériel, la masse, l'inertie).

a- Repère: Pour repérer la position d'une particule, il est nécessaire de définir un repère d'espace. Cela consiste à choisir une origine O et une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Le trièdre $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est le repère d'espace.

b- Référentiel: Un référentiel est un repère spatial muni d'un repère temporel (repère + horloge).

Soit un référentiel R, dont le repère d'espace à pour origine un point O, et par rapport auquel on étudie le mouvement de la particule P, la position de ce point à un instant t quelconque est donnée par le vecteur position : $\vec{r} = \vec{r}_{P/(R)} = \overrightarrow{OP}$.

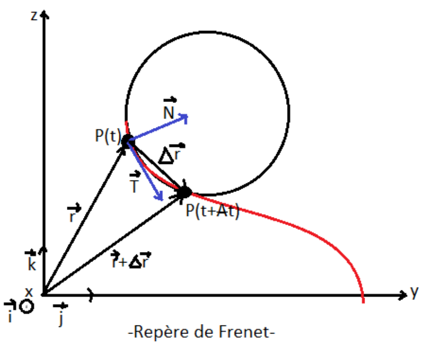
Le vecteur position varie au cours du mouvement et l'ensemble des positions successives au cours du temps de son extrémité P forme une courbe appelée trajectoire de la position P.

En utilisant pour le repère d'espace les coordonnées cartésiennes de base orthogonale associée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le vecteur $\vec{r}$ se décompose en: $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\ z\vec{k}$.

La donnée des fonctions $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$ constitue les équations horaires du mouvement, celle-ci peuvent être obtenues par intégration des équations du mouvement.

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps t entre les différentes équations horaires, ce qui n'est pas toujours en pratique possible.

Il est intéressant d'introduire un repère spécifique appelé trièdre de Serret-Frenet (Repère de Frenet), il permet d'exprimer d'une façon intrinsèque la vitesse et l'accélération, (c'est-à-dire exprimer ces grandeurs cinématique indépendamment d'un système de coordonnées particulier).



-Repère de Frenet-

Il s'agit d'un repère mobile avec P(t) (position de la particule à un instant t) orthonormé de vecteurs de base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$.

$\vec{T}$: Tangente en $P(t)$, orienté dans le sens du mouvement.

$\vec{N}$: Normale à la trajectoire en $P(t)$ perpendiculaire à $\vec{T}$, orienté vers le sens de courbure.

$\vec{B}$: Binormale $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$.

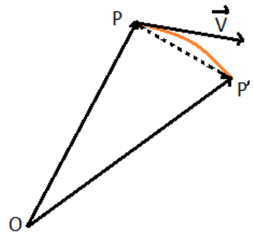
Vecteur Vitesse

P position de la particule à l'instant t, P' position de la particule à l'instant t'.

La vitesse moyenne est égale à : $\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, $\Delta t = t - t'$

La vitesse instantanée est égale à : $\vec{v}_{ins} = \vec{v}_{P/_R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R$

Il est facile de montrer que le sens de la vitesse $\vec{v}$ est celui de la tangente à la trajectoire au
point P, donc le sens de la vitesse est celui du mouvement de P à P' .
En utilisant les coordonnées cartésiennes le vecteur vitesse se décompose en :
$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$, où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}$
La notion d'abscisse curviligne peut être introduite pour donner une interprétation plus physique de $\vec{v}$: $d\vec{r} = \vec{v}.dt$ qui correspond au vecteur déplacement infinitésimale pendant dt
sur la trajectoire de P. Sa norme $ds = \|d\vec{r}\| = \|\vec{v}\|.dt = v.dt$, correspond donc à la distance
parcourue pendant dt par la particule.



Sens du vecteur vitesse

On a $ds = v.dt \Rightarrow v = \frac{ds}{dt}$, en utilisant le repère de Frenet : $\vec{v} = v\vec{T} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$
L'abscisse curviligne $s(t)$ correspond à la distance parcourue par la particule entre t_0 et t : $s(t) = \int_{t_0}^{t} v.dt$

Vecteur accélération

Par définition, le vecteur accélération et la dérivée du vecteur vitesse.

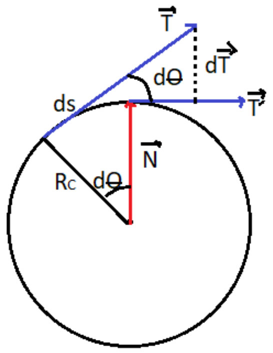
$\vec{a} = \vec{a}_{P/R} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, en coordonnées cartésiennes l'accélération se décompose en : $\vec{a} = \vec{a}_{P/R} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$, où $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ et $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$
Dans le repère de Frenet, nous avons :
$\vec{v} = v\vec{T} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d(v\vec{T})}{dt} = \frac{d(v)}{dt}\vec{T} + v\frac{d(\vec{T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v^2\frac{d\vec{T}}{ds}$
$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v^2\frac{d\vec{T}}{ds} \Rightarrow$ **,** pour trouver la relation finale de l'accélération il faut déterminer la direction et la valeur scalaire du vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$ dans le repère de Frenet.

La direction de $\frac{d\vec{T}}{ds}$

On peut facilement vérifier que $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est perpendiculaire à ($\perp \vec{T}$) donc parallèle à ($\parallel \vec{N}$) dans le repère de Frenet.
$\vec{T}$ est un vecteur unitaire ($\vec{T}^2 = 1$), $0 = \frac{d\vec{T}^2}{ds} = \frac{d(\vec{T}.\vec{T})}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds}.\vec{T} + \vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 2\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds}$
$\Rightarrow \vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{T} \perp \frac{d\vec{T}}{ds}$ et donc $\frac{d\vec{T}}{ds} \parallel \vec{N}$

La valeur scalaire de $\frac{d\vec{T}}{ds}$

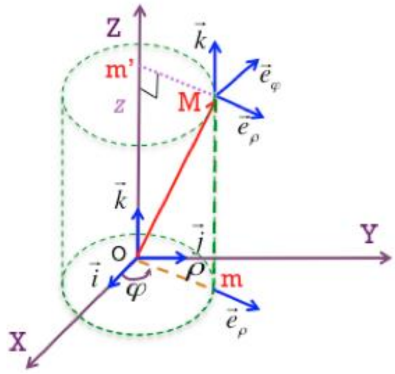
En utilisant toujours le repère de Frenet on peut aussi calculer facilement la valeur scalaire de $\frac{d\vec{T}}{ds}$:
$d\vec{T} = \|\vec{T}\|d\theta$ et $ds = R_C d\theta \Rightarrow \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R_C}\vec{N}$
Et par conséquent : $\vec{a} = \frac{d(v)}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R_C}\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{1}{R_C}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$
$\vec{a}_T$: Composante tangentielle (colinéaire à $\vec{v}$)
$\vec{a}_N$: Composante normale (nulle pour $Rc = \infty$)



calcul géométrique de l'accélération normale dans le repère de Frenet

Coordonnées cylindriques (base mobile)

Définition: Dans ce système la position du point est repérée par la donnée de la composante z(comme dans les coordonnées cartésiennes) et de ses coordonnées polaires qui permettent de repérer la position de la projection orthogonale m du point M sur le plan horizontale.



D'après la figure précédente, on a donc

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{Om}\| \quad , \quad 0 \leq \rho < +\infty & \text{rayon polaire,} \\ \varphi = (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{Om}}) \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi & \text{angle polaire} \\ z = \|\overrightarrow{mM}\| = \|\overrightarrow{Om'}\| \quad , -\infty < z < +\infty & \text{cote.} \end{cases}$$

m est la projection de M sur le plan (xOy) et

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ z = z \end{cases} \text{Ou inversement} \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

On associe la base orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$aux coordonnées cylindriques,

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = cos\varphi.\vec{\imath} + sin\varphi.\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\varphi = -sin\varphi.\vec{\imath} + cos\varphi.\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Vecteur position: $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$

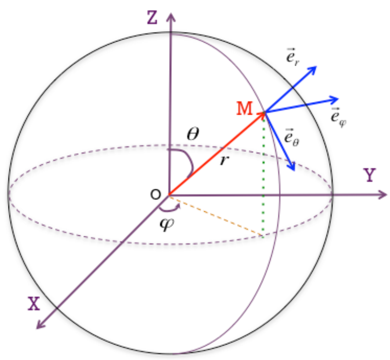
Vecteur déplacement élémentaire: $d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}$

Elément de volume: $dV = \rho.d\rho.d\varphi.dz$

Vecteur vitesse: $\vec{V} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$

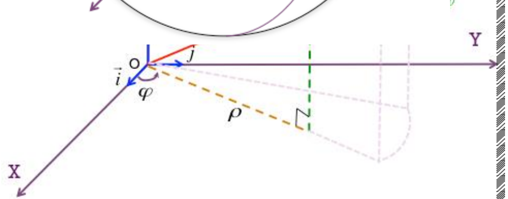
Vecteur accélération: $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$

Coordonnées sphériques : (base sphérique est mobile)



$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OM}\|, \quad 0 \leq r \leq +\infty & \textit{rayon vecteur} \\ \varphi = (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{Om}}), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi & \textit{azimuth} \\ \theta = (\widehat{\vec{k}, \overrightarrow{OM}}), \quad 0 \leq \theta \leq \pi & \textit{colatitude} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r.sin\theta.cos\varphi \\ y = r.sin\theta.sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$



La base orthonormée associée aux coordonnées sphériques est notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Cette base est reliée à la base des coordonnées cartésiennes par les relations:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{\imath} + sin\theta.sin\varphi.\vec{\jmath} + cos\theta.\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = cos\theta.\cos\varphi.\vec{\imath} + cos\theta.sin\varphi.\vec{\jmath} - sin\theta.\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{\imath} + cos\varphi.\vec{\jmath} \end{cases}$$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r.sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$

Volume élémentaire : $dV = dr.rd\theta r.sin\theta.d\varphi = r.dr.sin\theta.d\theta.d\varphi$

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

$$\vec{V}_{(M/_R)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta.\vec{e}_\varphi$$

Vecteur accélération en coordonnées sphériques:

$$\vec{a}_{(M/_R)} = \left(r - r\dot{\theta}^2\ddot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta.cos\theta\right)\vec{e}_\theta$$
$$+ \left(2\dot{r}\dot{\varphi}.sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$$

Dynamique du point matériel

Définition : La dynamique est une science qui étudie la cause de mouvement d'une particule (c.à.d. la force $\vec{F}$).

Quantité de mouvement : notée $\vec{P}$
Pour une particule M de masse m en mouvement dans un référentiel R, la quantité de Mouvement est : $\vec{P}_{M/(R)} = m\vec{v}_{M/(R)}$

Lois de Newton

1ere loi de Newton : Le Principe d'inertie : «Tout corps persévère dans l'état de repos ou l'état de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelques forces n'agissent sur lui, et ne le contraigne à changer d'état»
Pour le principe d'inertie, $\vec{P}_{M/(R)} = \overrightarrow{cte}$ donc $\vec{v}_{M/(R)} = \overrightarrow{cte}$.

- Un référentiel R où le principe d'Inertie est vérifié est appelé référentiel Galiléen.
- Tout référentiel R_1 en translation uniforme par rapport à un référentiel R_0Galiléen est considéré aussi Galiléen.

L'inertie : Est le refus de l'objet de changer ses grandeurs cinématiques.

2eme loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique (P.F.D.)

Par rapport à un R_0 (Galiléen), le mouvement de la particule M de masse m soumis à une résultante de force $\vec{f}$;

La variation de la quantité de mouvement du point matériel pendant une intervalle de temps Δt est $\Delta\vec{p} = \vec{f}.\Delta t$.

Pour Δt très petit ; $\Delta t \to dt \Rightarrow \Delta\vec{p} \to d\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Dans le cas particulier où la masse est constante : $d\vec{p} = d(m\vec{v}) = md\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

3eme loi de Newton : Principe des actions réciproques
Pour une particule M_1 de masse m_1 et une particule M_2 de masse m_2**,** si M_1 exerce une force $f_{1\to2}$ sur M_2alors M_2 exerce aussi une force $f_{2\to1}$ de telle sorte que $f_{1\to2} = -f_{2\to1}$.

Travail et Energie :
Travail w : Le travail élémentaire réalisé par la force $\vec{f}$ sur le point matériel lors d'un déplacement $d\vec{l}$ si le point matériel se déplace de point A au point B sur une trajectoire :

$$w_{AB}=\int_A^B \vec{f}\,.d\vec{l}=\int_A^B f\,.dl.\cos\left(\widehat{\vec{f},d\vec{l}}\right)$$

L'énergie cinétique : Nous nous proposons de calculer le travail fournis par la résultante des forces $\vec{F}$ sur un point matériel lors d'un déplacement $d\vec{l}$ sur une trajectoire de A à B ;

$$w_{AB}=\int_A^B \vec{f}\,.d\vec{l}=\int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt}.d\vec{l}=\int_A^B d\vec{p}.\frac{d\vec{l}}{dt}$$

Si $m=cte\Rightarrow w_{AB}=m\int_A^B \vec{v}.d\vec{v}=\frac{1}{2}m\left(\vec{v}_B{}^2-\vec{v}_A{}^2\right)$

$$\Rightarrow w_{AB}=\frac{1}{2}m\vec{v}_B{}^2-\frac{1}{2}m\vec{v}_A{}^2 \qquad \Rightarrow w_{AB}=\Delta E_C\ .$$

On appelle la quantité $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$ énergie cinétique du point matériel au point C de la trajectoire.

Théorème de l'énergie cinétique Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique entre deux positions est égale au travail de la force résultante appliquée entre ces deux positions.

$$\Delta E_c=W_{12}(\vec{F}_{ext})$$

L'énergie potentielle : Nous nous proposons de calculer le travail fourni par une force gravitationnelle $\vec{f}=-\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r\Rightarrow\ w_{AB}=-GMm\int\frac{\vec{u}_r}{r^2}.d\vec{r}$.

où $d\vec{r}=rd\theta\vec{u}_\theta+dr\vec{u}_r$.

$\Rightarrow w_{AB}=-GMm\int\frac{\vec{u}_r}{r^2}.(rd\theta\vec{u}_\theta+dr\vec{u}_r)=-GMm\int\frac{1}{r^2}.(rd\theta\vec{u}_r.\vec{u}_\theta+dr\vec{u}_r.\vec{u}_r)$

Or $\{\vec{u}_r,\vec{u}_\theta\}$ est une base orthonormée $\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_r\perp\vec{u}_\theta\ \Rightarrow\ \vec{u}_r.\vec{u}_\theta=0\\ \quad\vec{u}_r.\vec{u}_r=1\end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$w_{AB}=-GMm\int_{r_A}^{r_B} r^{-2}dr=-GMm\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_A}^{r_B}=\frac{GMm}{r_B}-\frac{GMm}{r_A}$$

$\Rightarrow w_{AB}=\left(-\frac{GMm}{r_A}\right)-\left(-\frac{GMm}{r_B}\right)=E_P(A)-E_P(B)=-\Delta E_P$

ΔE_P est la variation de l'énergie potentiel entre les points A et B.

Si la particule part du point A pour acquérir une vitesse $\vec{v}_B$ en B, son énergie cinétique passe de $E_C(A)$ à l'énergie $E_C(B)$, on dit que cette énergie est la transformation d'une énergie *emmagasinée* dans la particule en A qui se transforme en énergie cinétique. On appelle cette énergie emmagasinée énergie potentielle et on écrit : $\Delta E_P=-\Delta E_C$.

D'autre part, $\Delta E_P = -w_{AB}(\vec{f}) \Rightarrow \Delta E_P = -\int \vec{f}.d\vec{r} \Rightarrow \int_A^B dE_P = -\int_A^B \vec{f}.d\vec{r}$

Donc $dE_P = -\vec{f}.d\vec{r} \Rightarrow \vec{f} = -\frac{dE_P}{d\vec{r}} = -\vec{\nabla}E_P$

On peu déduire que $E_P = -\vec{f}.d\vec{r}$

On dit que E_P est *primitive* de $\vec{f}$, $\vec{f}$ est une dérivée de l'énergie potentielle $\Rightarrow \vec{f}$ dérive d'un potentiel.

Energie mécanique totale E_m : Le théorème de l'énergie cinétique peut être écrit de façon équivalente en décomposant la somme des les forces en trois groupes:

- ✓ Forces qui dérivent d'un potentiel (conservatives)$\vec{F}_C$.
- ✓ Forces qui ne travaillent pas ($\vec{F} \perp$ au déplacement).
- ✓ Forces non-conservatives (dissipatives) $\vec{F}_{NC}$.

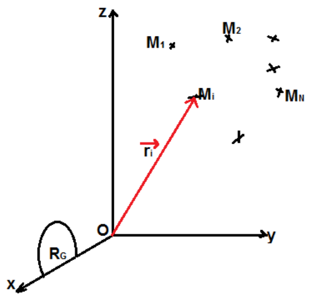
$\Delta E_c = W_{\vec{F}_C} + W_{\vec{F}_{NC}}$, avec$\Delta E_P = -W_{\vec{F}_C}$,

$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_P = W_{\vec{F}_C} + W_{\vec{F}_{NC}} - W_{\vec{F}_C} = W_{\vec{F}_{NC}} \Rightarrow \Delta E_m = W_{\vec{F}_{NC}}$

D'où le théorème d'énergie mécanique : La variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives. L'énergie totale est conservée si le système est soumit uniquement à des forces conservatives.

Système à N particules et forces extérieures

Soit un système de N particules dont les interactions mutuelles sont régies par la 3ème loi de Newton (principe de l'action et de la réaction).
Le centre de masse G est défini par:



$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i.\overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i.\overrightarrow{OM_i}}{M},$$

$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ est la masse totale du système de points matériels.

En termes de coordonnées,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i.\overrightarrow{OM_i} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i.x_i \\ y_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i.y_i, \\ z_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i.z_i \end{cases}$$ (pour un système discret).

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\int_S dm.\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{M}\int_{syst} dm.x_{(dm)} \\ y_G = \frac{1}{M}\int_{syst} dm.y_{(dm)}, \\ z_G = \frac{1}{M}\int_{syst} dm.z_{(dm)} \end{cases}$$ (pour un système continu).

La quantité de mouvement d'un système de N points matériels: La quantité de mouvement totale du système est: $\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i} = M.\overrightarrow{V_G}$; on dit que le point G résume le système point de vue cinématique.

Théorème de centre de masse: Appliquant le P.F.D à chacun des points du système:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_{ext\to i} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i}$$

- $\vec{f}_{ext\to i}$: la force extérieur qui s'exerce sur la particule i.
- $\sum_{i\neq j} \vec{f}_{j\to i}$: la force interne qui s'exerce par chaque particule j du systèmesur la particule i.

Par l'additionner des équations précédentes sur toutes les particules i du système:

$$\sum_{i=1}^{N} m_{\boldsymbol{i}} . \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{f}_{ext\to i} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_{ext\to i} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i};$$

$\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_{ext\to i} = \vec{f}_{ext\to syst}$: est la somme vectorielle des forces extérieures qui s'appliquent sur tout le système où n'importe où s'appliquent ces forces; et $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i} = \sum_{1\leq i\leq j}^{N} \left(\vec{f}_{j\to i} + \vec{f}_{i\to j}\right) = \vec{0}$: grâce à la troisième loi du Newton.

Tel que: $\sum_{i=1}^{N} m_{\boldsymbol{i}} . \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_{\boldsymbol{i}} . \vec{v}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(M.\overrightarrow{V_G}\right) = M.\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt}$

Alors le théorème de centre de masse est par conséquent: $M.\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \vec{f}_{ext\to syst}$ Ou $\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{f}_{ext\to syst}$

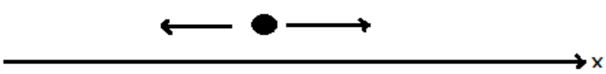
On dit que le point G résume le système point de vue dynamique et comporte comme n'importe quel point matériel obéit au P.F.D. Le théorème de centre de masse permet de traiter la mécanique macroscopique sans occuper d'autre chose que de point G.

Le moment cinétique d'un système de N points matériels: $\vec{\sigma}_{tot/O} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\sigma}_{i/O} = \sum_{i=1}^{N} \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{p_i}\right)$

L'énergie cinétique d'un système de N points matériels: $E_{Ctot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v_i}^2$

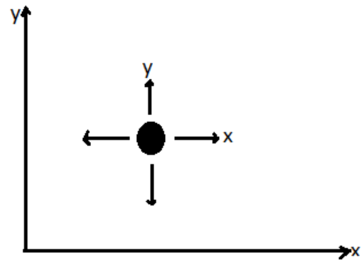
Le nombre de degrés de liberté

Un système physique à $1,2,3,4, \dots \dots, N$ degrés de liberté.
Le degré de liberté est la généralisation du nombre de directions indépendantes selon lesquelles une particule peut se déplacer dans l'espace physique.
Ainsi, une particule pouvant se déplacer dans une direction possède un degré de liberté.



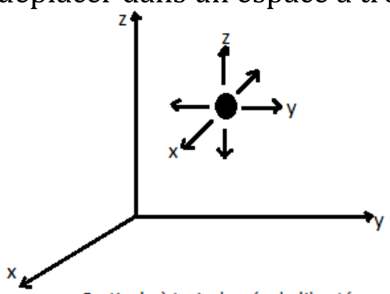
Particule à un degré de liberté

Une particule est libre de se déplacer dans un espace à deux dimensions, elle possède deux degrés de liberté.



Particule à deux degrés de liberté

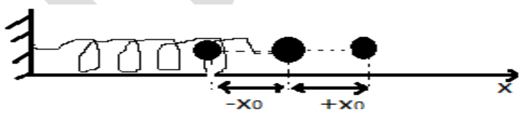
Une particule est libre de se déplacer dans un espace à trois dimensions, elle possède trois degrés de liberté.



Particule à trois degrés de liberté

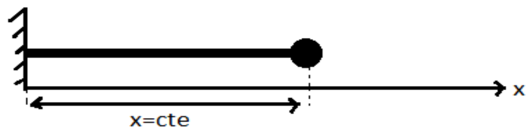
La contrainte où la liaison peut réduire ou supprimer au moins un degré de liberté.

Exemple : Particule libre sur un axe (ox) :
Si une force $F = -k.x$ agit sur la particule,
$\Rightarrow$ le degré de liberté est réduit de –x0 à +x0



Particule à un degré de liberté réduit de -x0 à +x0

Si le ressort est remplacé par une tige, la particule perd son degré de liberté.



Particule à 0 degré de liberté

Chapitre 2 : Formalisme de Lagrange

Introduction : La méthode de Newton utilise les vecteurs pour décrire les systèmes physiques, cette méthode devient difficile si les systèmes physiques deviennent complexe.

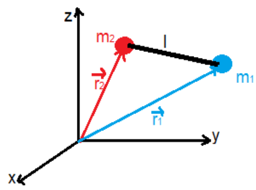
Lagrange propose une méthode analytique pour étudier le mouvement des systèmes physiques. Le Lagrangien permet d'étudier une vaste gamme de problèmes en mécanique. En se sens il est équivalent au formalisme de newton mais, il a sur se dernier un certain nombre d'avantages, d'abord il est fondé sur un principe théorique fondamental et élégant. Il utilise des quantités scalaires plutôt que vectorielles et en ce sens, sa forme est indépendante des coordonnées utilisées.

Les liaisons : Un mobile est dit lié s'il subit des contraintes de la part du milieu dans lequel il est en mouvement.

Liaison géométriques : C'est la liaison qui impose des conditions sur les coordonnées du mobile.

Exemple 1 : Deux masses reliées par une tige.

$$m_1\begin{cases}x_1\\y_1\\z_1\end{cases};\ m_2\begin{cases}x_2\\y_2\\z_2\end{cases}, \text{or} : l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



$$\Rightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l^2=0$$

Exemple 2 : Une bille qui se déplace dans un tube circulaire de rayon R, si le tube est posé sur un plan horizontal : $x^2+y^2=R^2, z=cte$.

On peut écrire : $\begin{cases}f(x,y)=x^2+y^2-R^2=0\\ z=cte\end{cases}$

Exemple 3 : Une bille se déplace à l'intérieur d'une sphère de rayon R ; $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ et on écrit $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2\leq 0$. Où x, y et z sont mesurées par rapport au centre de la sphère.

Liaison cinématique : C'est la liaison qui impose des conditions sur la vitesse du mobile.

Exemple : La vitesse d'un parachute diminue jusqu'à atteindre une vitesse limite ;

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=v_l\Rightarrow f(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}-v_l=0.$$

- On appelle liaison stable toute liaison dont l'expression est donnée par une équation:

$$\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0\end{cases}$$

- On appelle liaison instable toute liaison dont l'expression est donnée par une inégalité.
- La liaison idéale est la liaison dont le travail de ses réactions est nul.

La liaison holonome : C'est la liaison géométrique ou cinétique intégrable stable.

Un système soumit à des liaisons holonomes est dit système holonome.

Travail virtuel :

Déplacement réel: L'hors d'un déplacement réel, on a besoin de suivre la variation de la position de la particule dans le temps. D'une façon générale, le déplacement infinitésimal est due à une variation explicite dans le temps: le temps t apparait explicitement dans l'expression du vecteur position: $\vec{r} = \vec{v}t$. L'expression du déplacement possible ne peut être extraite qu'à partir de l'expression de la liaison c.à.d. à partir de

$$f(x, y, z, t) = f(\vec{r}, t) = o \quad \text{et} \quad df = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Déplacement virtuel: Nous allons intéresser aux systèmes holonomes seulement.

A chaque fois on applique une force efficace on obtient du déplacement possible.

$$\left.\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ df &= \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d\vec{r}\,' + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \end{aligned}\right\} \ldots (2) - (1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} (d\vec{r} - d\vec{r}\,') = 0$$

On appelle $\delta\vec{r} = d\vec{r} - d\vec{r}\,'$ le déplacement virtuel. $\delta\vec{r}$ représente donc un glissement de la trajectoire possible (1) vers la trajectoire possible (2).

Le déplacement virtuel est un déplacement infinitésimal atemporel (théorique ou mathématique et non-physique) qui ne nécessite pas de temps. Ce déplacement décrit le passage d'une configuration d'équilibre du système à une autre configuration d'équilibre sans pour autant considérer le temps de passage: C'est un déplacement dans l'espace de configuration.

Le nombre de degré de liberté:

Définition: Le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de variables indépendantes (dites coordonnées généralisées) nécessaires et suffisantes pour décrire son évolution d'une façon <u>unique</u> et <u>complète</u>.

Le nombre de degrés de liberté (n) =

le nombre de paramètres de configuration – le nombre de contrainte (liaisons) (k)

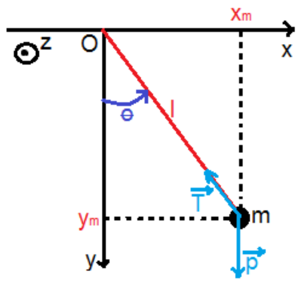
- Un point matériel: le nombre de paramètres de configuration est 3;

$$ddl = 3 - k$$

- Un système de N points matériels: le nombre de paramètres de configuration est $3N$;

$$ddl = 3N - k$$

Exemple : pendule simple



Pour déterminer le mouvement de la masse m il faut calculer $\left(x_m(t), y_m(t)\right)$. Mais dans ce cas on peut juste calculer une coordonnée et déduire l'autre à partir de l'équation de la liaison. Le système est dit système a ''un'' degré de liberté ;

Le nombre de paramètres de configuration est $n = 2$ (mouvement dans le plan).

Le nombre de contrainte (liaisons) est $k = 1$; $f(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$

$$\Rightarrow n - k = 2 - 1 = 1$$

$\Rightarrow$ Une manière plus élégante d'étudier le mouvement de la masse serait de choisir l'angle θ que fait la tige avec la verticale comme variable de mouvement; nommée par coordonnée généralisée, notée par $q_1 = \theta$.

Les coordonnées généralisées : Ce sont les coordonnées que nous devons calculer pour déterminer les équations de mouvement du système physique. La coordonnée généralisée est définie d'une manière générale ; elle peut être mesurée en ''mètre, radian, courant…''.

Le nombre de coordonnées généralisées est égale au nombre de degrés de liberté.

On paramétrise un système par « les coordonnées généralisées » supposées indépendantes, notés q_i et par leurs dérivées temporelles $\dot{q}_i$ pour $i \in 1, \dots, n$ **,** appelées « vitesse généralisées ».
L'espace qui caractérise l'état du système à un instant t donné est « l'espace de configuration » de coordonnées $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n)$
Exemple : Une particule, en coordonnées cartésiennes :
$(q_1, q_2, q_3) = (\mathrm{r}, \theta, \varphi)$ et $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = (\dot{\mathrm{r}}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$
Il est possible d'exprimer le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{oM}$ de la particule en fonction de la coordonnée généralisée q par : $\vec{r} = \vec{r}\,(q)$.
Soit $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces agissant sur la particule. Le principe fondamental de la dynamique nous donne: $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, où $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ est vitesse de la particule.

C'est le principe du travail virtuel, et il est exprimé par la condition:

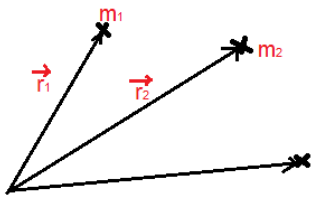
$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \,.\, \delta\vec{r} = 0 \text{ avec } \delta\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta\, q_i$$

Le travail virtuel prend la forme :
$$\left(\vec{F} - \frac{d\vec{P}}{dt}\right).\,\delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\vec{F} - \frac{d\vec{P}}{dt}\right).\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\delta q_i\right] = 0\ ;\ \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} m . \frac{d\vec{v}}{dt} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i$$

Le premier terme: $\vec{F} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = Q_i$ est la i^{eme} composante de la force généralisée. (Peut être une force ou un moment de force).

S'il y a n coordonnées généralisées il ya nQ_i. $\vec{F}_\alpha$ Ici est la force sur la composante α du système, qui par les lois newtoniennes est $m\vec{a}_\alpha = m\ddot{\vec{r}}_\alpha$.



$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{3} \vec{F}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = \vec{F}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_i} + \vec{F}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_i} + \vec{F}_3 \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial q_i}$$

Le deuxième terme: $\frac{d\vec{v}}{dt} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$

On a : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$; alors: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}$

Or, $\frac{d}{dt}\left(\vec{v} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \vec{v} . \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \vec{v} . \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) - \vec{v} . \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} . \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \vec{v} . \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}$$

Le terme $\vec{v} . \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}$ peut s'écrire sous la forme: $\vec{v} . \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial \dot{q}_i}$

De même pour le terme: $\vec{v} . \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial q_i}$ $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{v}}{dt} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial q_i}$

Remplaçons par ces expressions dans le deuxième terme, on obtient:

$\sum_{i=1}^{n} m . \frac{d\vec{v}}{dt} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} m . \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial q_i}\right) \delta q_i \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} m . \frac{d\vec{v}}{dt} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m . \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{1}{2} m . \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial q_i}\right) \delta q_i$$

Or $\frac{1}{2} m . \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i}$ et $\frac{1}{2} m . \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial q_i} = \frac{\partial E_C}{\partial q_i}$; on obtient: $\sum_{i=1}^{n} Q_i . \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i}\right) \delta q_i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i}\right) - Q_i\right] \delta q_i = 0$$

Les coordonnées généralisées sont indépendantes, alors que les δq_i sont aussi indépendantes;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} = Q_i$$

Cette dernière équation est l'équation de Lagrange en termes de l'énergie cinétique.

Pour une force conservatrice: $\vec{F}_\alpha = -\vec{\nabla}_\alpha E_P(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_\alpha) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_\alpha} E_P(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_\alpha)$

notation: $(F_\alpha)_k = -\frac{\partial}{r_{\alpha,k}} E_P(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_\alpha)$; $k = 1, 2, 3$ et $\alpha = 1, 2, \dots, N$

Le travail effectué pour changer l'état du système de $\vec{r}_\alpha$ à $\vec{r}'_\alpha$ est: $E_P(\vec{r}_\alpha) - E_P(\vec{r}'_\alpha)$

La dérivée du potentiel par rapport à q_i peut se faire de la manière suivante:

$$\frac{\partial E_P}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial E_P}{\partial \vec{r}_\alpha} . \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial E_P}{\partial \vec{r}_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha . \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = -Q_{ic}$$

On suppose dans ce cas que parmi les forces extérieures qui s'exercent sur chacune des particules il y a des forces dérivent d'un potentiel E_P, et que ce potentiel ne dépend que des coordonnées généralisées $E_P(q_i)$. Les composantes de la force généralisée peuvent se mettre sous la forme:

$Q_i = \sum_\alpha^N \vec{F}_\alpha . \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = \sum_\alpha^N (\vec{F}_{c\to\alpha} + \vec{F}_{Nc\to\alpha}) \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \Rightarrow Q_i = \sum_\alpha^N \vec{F}_{c\to\alpha} . \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \sum_\alpha^N \vec{F}_{Nc\to\alpha} . \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\frac{\partial E_P}{\partial q_i} + Q_{iNc}$

Revenons à l'équation de Lagrange précédente; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} = -\frac{\partial E_P}{\partial q_i} + Q_{iNc}$

Et comme $\frac{\partial E_P}{\partial \dot{q}_i} = 0$, on peut écrire: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (E_C - E_P)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial (E_C - E_P)}{\partial q_i} = Q_{iNc}$

Par définition : $E_C - E_P \equiv \mathcal{L}$ est appelé le lagrangien du système, et les équations d'Euler-Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_{iNc}$$

Pour un système qui possède n degrés de liberté, on a un ensemble de n équations différentielle de 2^{eme} ordre.

Exemples:

1. **Pendule simple:**

Les équations de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} = Q_i$

La force généralisée Q_i: $Q_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ext} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$; avec : $q_1 = \theta$ $(n = 1)$.

Le vecteur position en fonction de la coordonnée généralisée est: $\vec{r} = l cos\theta \vec{\imath} + l sin\theta \vec{\jmath}$

Considérons un déplacement virtuel $\delta\vec{r}$: $\delta\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \delta\theta = (-l sin\theta . \vec{\imath} + l cos\theta \vec{\jmath})\delta\theta = l\delta\theta . \vec{u}_\theta$

Le travail virtuel est donné par:

$$\delta W = m\vec{g}.\delta\vec{r} = (mgcos\theta\, \vec{u}_r - mgsin\theta\, \vec{u}_\theta).l\delta\theta.\vec{u}_\theta = -mgl\delta\theta sin\theta$$

La seule force qui travail est le poids, ($\vec{T} \perp \delta\vec{r}$).

Et comme: $\delta W = Q_\theta.\delta\theta \Rightarrow Q_\theta = -mglsin\theta$.

L'énergie cinétique E_C: $E_C = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$;

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \dot{\theta}(-lsin\theta.\vec{\imath} + lcos\theta\vec{\jmath}) \Rightarrow \vec{v}^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_C}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial E_C}{\partial\theta} = 0 \end{cases}$$

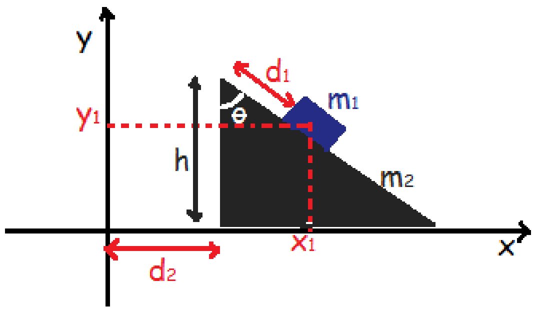
Donc l'équation de Lagrange s'écrit: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\theta} = Q_\theta \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -mglsin\theta$

Et l'équation du mouvement est: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 sin\theta = 0\ ;\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

2. Un plan incliné, en mouvement:

Nous choisirons des variables dynamiques pour décrire le système $m_1(x_1 \quad y_1 \quad z_1)$ et $m_2(x_2 \quad y_2 \quad z_2)$. Les contraintes:



- ✓ Le mouvement a lieu dans un plan, donc $z_1 = z_2 = cte$.
- ✓ $y_2 = cte$.
- ✓ $\begin{cases} x_1 = d_2 + d_1 sin\theta \\ y_1 = h - d_1 cos\theta \end{cases} \Rightarrow tg\theta = \frac{y_1}{d_2 - x_1}$

On a 4 contraintes $\Rightarrow ddl = 6 - 4 = 2$

On choisit comme coordonnées généralisées: $q_1 = d_1$ et $q_2 = d_2$.

L'énergie cinétique du système: $T = T_1 + T_2$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1{}^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{d}_1{}^2 + \dot{d}_2{}^2 + 2\dot{d}_1\dot{d}_2\, sin\theta\right) \\ T_2 = \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2{}^2 = \frac{1}{2}m_2\dot{d}_2{}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m_2\dot{d}_2{}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\dot{d}_1{}^2 + \dot{d}_2{}^2 + 2\dot{d}_1\dot{d}_2\, sin\theta\right)$$

L'énergie potentielle du système: $V = V_1 + V_2$

$$\begin{cases} V_1 = mg(h - d_1cos\theta) \\ V_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow V = mg(h - d_1cos\theta)$$

Le lagrangien du système:$L = T - V$

$$\Rightarrow L = \tfrac{1}{2} m_2 \dot{d_2}^2 + \tfrac{1}{2} m_1 \left(\dot{d_1}^2 + \dot{d_2}^2 + 2\dot{d_1}\dot{d_2}\, sin\theta\right) - \ mg(h - d_1 cos\theta)$$

Dans l'expression du lagrangien en tenant pas les termes qui sont constants ($mgh = cte$), donc le lagrangien peut s'écrire:

$$L = \frac{1}{2} m_2 \dot{d_2}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{d_1}^2 + \dot{d_2}^2 + 2\dot{d_1}\dot{d_2}\, sin\theta\right) + \ mgd_1 cos\theta$$

Les équations de Lagrange sont: $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial d_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial d_2} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{d_1} + m_1 \dot{d_2} sin\theta - \ mgsin\theta = 0 \\ (m_1 + m_2)\ddot{d_2} - \ m_1 \dot{d_1}\ sin\theta = 0 \end{cases}$$

Moment Conjugué:

Considérons un système mécanique à $n\, ddl$, décrit par le Lagrangien $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$. On définit le moment conjugué p_i comme: $\boldsymbol{p_i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

L'équation d'Euler-Lagrange est donnée par: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$.

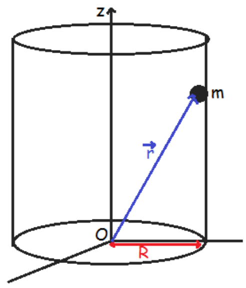
Si L est indépendant de q_i cela signifie que le moment correspondant p_i doit être une constante au cours du temps ou dans d'autres mots est conservé.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \\ \frac{d\vec{\sigma}_{/O}}{dt} = \vec{\tau}_{/O}(\vec{f}) \end{cases}$$

Coordonnée Cyclique : Dans le cas d'un système qui ne subit que des forces conservative, et si le lagrangien du system ne dépend pas de la coordonnée généralisée $q_i \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, alors ; $p_i = cte$

p_i est dit constante du mouvement ou une intégrale première, et la coordonnéeq_i est appelée une coordonnée cyclique.

Exemple 1:



Mouvement d'une masse m subit à une force $\vec{F} = -k\vec{r}$ sur la surface latérale d'un cylindre de rayon R.

Les cordonnées généralisées φ et z.

L’énergie cinétique: $T = \frac{1}{2} m\, \vec{v}^2$

$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\, \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$; $\rho = R = cte \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \;\Rightarrow\; T = \frac{1}{2} m\, (\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$

L’énergie potentielle: $\vec{F} = -k\vec{r} = -\vec{\nabla} V \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} V = \frac{dV}{dr}\vec{e}_r = k\, r\vec{e}_r$

$$dV = k\, r\, dr \Rightarrow V(r) = \frac{1}{2} k\, r^2 = \frac{1}{2} k(R^2 + z^2)$$

Le lagrangien est: $L = T - V \Rightarrow L = \frac{1}{2} m\, (\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k(R^2 + z^2)$

Les moments conjugués aux coordonnées généralisées φ et z sont:

$$\begin{cases} p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \\ p_z = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \end{cases}$$

Nous interprétons $p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}$ comme le moment angulaire, et $p_z = m\dot{z}$ le moment linéaire (la quantité du mouvement) de la masse ponctuelle m.

p_φ et p_z sont les moments généralisés conjugués aux coordonnées φ et z respectivement, (p_φ et p_z sont appelés aussi les moments canoniques).

Les équations d’Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \ldots\ldots (1) \\ \ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(1) : Le moment angulaire est conservé.

(2) : Équation différentielle de $2^{ème}$ ordre qui a la forme standard de l’équation d’un simple oscillateur harmonique.

Le mouvement de m: la particule orbite autour d'un cylindre en constante vitesse angulaire où verticalement le mouvement est ce d’un oscillateur harmonique simple.

Question: Y a-t-il une coordonnée cyclique et par conséquent une intégrale première?

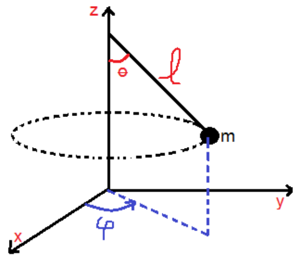
On a $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + kz = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = -kz \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(p_\varphi) = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{d}{dt}(p_z) \neq 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = -kz \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_\varphi = cte \ \ \varphi \ \text{ est une coordonnée cyclique} \\ p_z \neq cte \quad z \ \ n'est \ \ pas \ une \ coordonnée \ cyclique \end{cases}$$

$\Rightarrow p_\varphi$ est constant, on dit que p_φ est une intégrale première.

Exemple 2: Le pendule sphérique:



Nous avons 3 paramètres de configuration, mais nous avons aussi une contrainte$l = cte$.

$\Rightarrow$ diminuer les degrés de la liberté à deux.

$$ddl = 3 - 1 = 2 \Rightarrow (q_1, q_2) \equiv \ (\theta, \varphi)$$

Écrire l'énergie cinétique en fonction des coordonnées généralisées (θ, φ):

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \ \dot{z}^2) \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\underbrace{\dot{l}}_{=0}\ \vec{e}_r + l\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta + l.\dot{\varphi}.sin\theta\ \vec{e}_\varphi\right)^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + \ l^2.\dot{\varphi}^2.sin^2\theta\right)$$

L'énergie potentielle: $V = mgl\,(1 - cos\theta)$. Nous pouvons éliminer le terme mgl d'expression du lagrangien parce qu'il est un constant.

Le lagrangien sera: $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + \ l^2.\dot{\varphi}^2.sin^2\theta\right) + \ mglcos\theta$

Question: Y a-t-il une coordonnée cyclique?

Réponse: Oui, φ est une coordonnée cyclique, d'où $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, nous pouvons immédiatement obtenir que: $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\,\underbrace{\dot{\varphi}sin^2\theta}_{=S} = cte \Rightarrow p_\varphi = ml^2$; S: Est le spin.

θ: N'est pas une coordonnée cyclique; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

$$\Rightarrow ml^2\dot{\varphi}^2 sin\theta.cos\theta - mgl\,sin\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \ \frac{g}{l}\ sin\theta - \dot{\varphi}^2 sin\theta.cos\theta = 0$$

Or, $\dot{\varphi}sin^2\theta = cte = S \Rightarrow \ddot{\theta} + \ \frac{g}{l}sin\theta - S^2\,\frac{cos\theta}{sin^3\theta} = 0$

Mécanique de Hamilton; (Formalisme de Hamilton)

1- Fonction de Hamilton (L'hamiltonien d'un système):

On considère un système dynamique avec un nombre de degrés de liberté égal à n, imaginons que la dynamique est gouverné par le Lagrangien $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$. La dérivation de lagrangien $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ par rapport au temps:

$$\frac{d\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

Or, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = p_i$, et $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i$

Donc,

$$\frac{d\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

Et comme: $\frac{d}{dt}(p_i.\dot{q}_i) = \dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i$, alors:

$$\frac{d\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(p_i.\dot{q}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}(p_i.\dot{q}_i) - \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)\right]$$

Si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps; c.-à-d.: $\boldsymbol{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0}$, donc:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}(p_i.\dot{q}_i) - \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)\right] = 0$$

Dans ce cas la quantité $\sum_{i=1}^{n}(p_i.\dot{q}_i) - \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)$ est conservée.
Nous définissons le hamiltonien de ce système:

$$H = \sum_{i=1}^{n}(p_i.\dot{q}_i) - \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) \equiv H(q_i,\dot{q}_i;p_i;t)$$

Si $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ le hamiltonien est conservé; $\frac{dH}{dt} = 0$

Si $\vec{r}_i$ ne dépend que des q_i, mais pas en temps t c.-à-d.: $\vec{r} = \vec{r}(q_i)$, alors:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

Et l'énergie cinétique du système sera:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{x}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\underbrace{m\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)}_{p_k}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}p_i\dot{q}_i$$

$H = \sum_{i=1}^{n}(p_i.\dot{q}_i) - \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = 2T - (T - V) \Rightarrow H = T + V$

Les équations canoniques; les équations de Hamilton:

H dépend des variables $q_i, \dot{q}_i, p_i$et t, donc la différentielle totale de la fonction $H(q_i,\dot{q}_i;p_i;t)$ est:

$$dH(q_i,\dot{q}_i;p_i;t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p}dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Et à partir de la définition du l'hamiltonien: $H = \sum_{i=1}^{n}(p_i.\dot{q}_i) - \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)$, on peut écrire aussi:

$$dH(q_i,\dot{q}_i;p_i;t)=\sum_{i=1}^{n}dp_i.\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}p_i.d\dot{q}_i-d\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)$$

Or, $d\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$, donc:

$$\begin{aligned}dH(q_i,\dot{q}_i;p_i;t)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p}dp_i+\frac{\partial H}{\partial t}\\&=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,dp_i+\sum_{i=1}^{n}p_i\,d\dot{q}_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\end{aligned}$$

Or, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=\dot{p}_i$ et $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}=p_i$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p}dp_i+\frac{\partial H}{\partial t}\\=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,dp_i+\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\,d\dot{q}_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\,dq_i-\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\,d\dot{q}_i\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\\=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,dp_i-\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\,dq_i-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p}dp_i+\frac{\partial H}{\partial t}\\=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,dp_i-\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\,dq_i-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}+0.d\dot{q}_i\end{aligned}$$

Identifié une correspondance (par rapport aux termes), nous obtenons:

$$\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot{p}_i\\\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i\end{cases}\quad\text{Et}\quad\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial\dot{q}_i}=0\\\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\end{cases}$$

L'ensemble de $2n$ équations $\left\{\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot{p}_i;\ \frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i\right\}$ sont appelées les équations du mouvement de Hamilton ou les équations canoniques. Ces équations sont équivalentes aux équations de Lagrange.

- Pour le formalisme d'Euler-Lagrange: il y a n équations différentielles de mouvement de $2^{ème}$ ordre.
- Pour le formalisme de Hamilton: il y a $2n$ équations différentielles de mouvement de 1^{er} ordre.
  Et en particulier, il y a exactement les mêmes conditions initiales (données) requises pour spécifier une solution.

Exemple 1: Pendule Sphérique

- L'énergie cinétique est donnée par: $T=\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2+\ l^2.\dot{\varphi}^2.sin^2\theta\right)$,
- L'énergie potentielle est donnée par: $V=mgl\,(1-cos\theta)$
- Le Lagrangien sera:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta\right) + mgl\cos\theta,$$

- Les moments conjugués: $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$; $\dot{q}_i = \dot{\theta}, \dot{\varphi}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \\ p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta \end{cases}$$

- Le temps t est ignorable$\Rightarrow$ L'hamiltonien est l'énergie totale du système:

$$H = \sum_{i=1}^{2}(p_i.\dot{q}_i) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$= p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta\right) - mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow H = \frac{{p_\theta}^2}{2ml^2} + \frac{{p_\varphi}^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta$$

On aura donc $2n = 2.2 = 4$ équations de Hamilton:

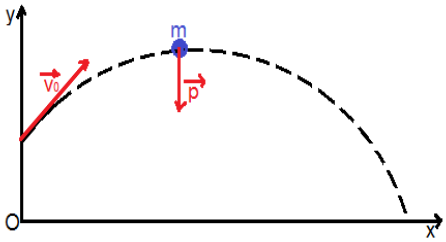
$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{{p_\varphi}^2\cos\theta}{ml^2\sin^3\theta} - mgl\sin\theta \end{cases} ; \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\theta}{ml^2\sin^2\theta} \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow p_\varphi = cte$$

Donc l'équation du mouvement:

$$\dot{p}_\theta = ml^2\ddot{\theta} \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = \frac{{p_\varphi}^2\cos\theta}{ml^2\sin^3\theta} - mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta - \frac{{p_\varphi}^2\cos\theta}{m^2l^4\sin^3\theta} = 0$$

Exemple 2: Mouvement d'un Projectile



L'énergie cinétique et potentielle sont:

$T = \frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{2m}$ et $V = mgy$

t est ignorable $\Rightarrow H = T + V$

$$\Rightarrow H = \frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{2m} + mgy$$

Les équations du mouvement sont:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_x = m\dot{x} \\ \dot{p}_x = m\ddot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_x = m\dot{x} \\ \ddot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow p_x = m\dot{x} = cte$$

... Mouvement rectiligne uniforme suivant l'axe (Ox).

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_y = m\dot{y} \\ \dot{p}_y = -mg = m\ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_y = m\dot{y} \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow p_y = m\dot{y} \neq cte$$

...Mouvement rectiligne changeant régulièrement suivant l'axe (Oy).

L'espace de phases et le portrait de phase:

Dans la formulation Hamiltonienne est l'espace (q_i, p_i) de $2n$-dimension, connu comme l'espace de phase du système; une précise d'un point dans l'espace de phase peut spécifier un état du système,

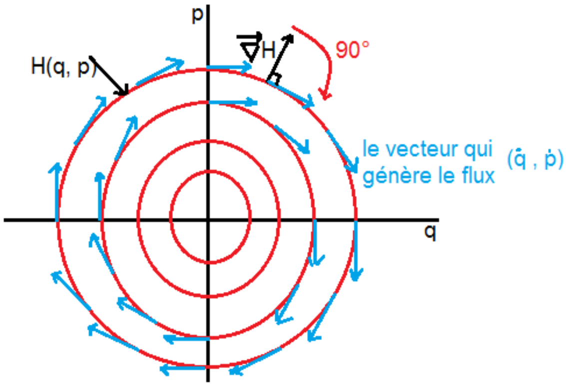
Exemple 1: Problème à 1-dimension, dont l'hamiltonien est donné par:

$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = cte$

Nous imaginons un espace de phase de $2.dim$; (q, p).

$p^2 + q^2 = 2H$: Un cercle de rayon $\sqrt{2H}$ dans l'espace de phase.
Alors le mouvement du système se trouve en voyant $(\dot{q}, \dot{p})$ qui sont des points dans la direction du vecteur perpendiculaire au vecteur $\vec{\nabla}H$.
$(\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) = (p, -q)$est le flux hamiltonien ;

↳ La dynamique est un flux sur l'espace de phase.



Les Crochets de Poisson:

Considérons deux fonctions de l'espace de phase: $f(p_i, q_i)$ et $g(p_i, q_i)$, on définit les crochets de Poisson par:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

Propriétés: Soient α ,βsont des constantes, f, g et h sont des fonctions de l'espace de phase ; alors :

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$: les crochets de Poisson sont antisymétriques.
- $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$: les crochets de Poisson sont linéaires.
- $\{f.g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$; Règle de Leibnitz.
- $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$; L'identité de Jacobi.

Les crochets fondamentaux de Poisson :

- $\{q_i, q_j\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik}.0 - 0.\delta_{jk}) = 0$
- $\{p_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (0.\delta_{jk} - \delta_{ik}.0) = 0$
- $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, si & i = j \\ 0, si & i \neq j \end{cases}$, δ_{ij} est le symbole de Kronicker.

Tel que:

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik}.\delta_{jk} - 0.0) = \delta_{ij}$$

Imaginons que nous avons une certaine fonction $F(q, p, t)$ dans l'espace de phase, comment cette fonction changer dans le temps?
On calcule la différentielle totale de cette fonction, alors:

$$dF = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right) dt$$

$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \dot{p}_i\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$; Or, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ et $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

On trouve que : $\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}.\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}.\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \equiv \{F,H\}$$

$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Donc, F est une constante de mouvement; c.-à-d. $\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases}\{F,H\} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t} = 0\end{cases}$

Transformations canoniques:

Une transformation canonique est un changement de coordonnées (nouveau choix) :

$$\begin{cases} q_i & \rightarrow & Q_i(q_i, p_i) \\ p_i & \rightarrow & P_i(q_i, p_i) \end{cases}$$

qui préserve les crochets de Poisson entre p et q: $\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}$

Exemple: la transformation canonique la plus simple:

$$\begin{cases} q_i & \rightarrow Q_i(q_i) \\ p_i & \rightarrow P_i(q_i, p_i) \end{cases}$$

Ainsi; $\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}}_{=0}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\delta_{ik}\delta_{jk}) = \delta_{ij}$

Remarque:

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)}_{matrice}\underbrace{\left(\frac{\partial P_j}{\partial p_k}\right)}_{matrice} = \underbrace{\delta_{ij}}_{identité}$$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial P_j}{\partial p_k}\right) = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_j^{-1} \Rightarrow P_j = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_{j\,k}^{-1} p_k + \underbrace{f_j(q)}_{cte\ in\ p}$

$\Rightarrow P_j = P_j(q,p)$n'est pas seulement une fonction de p, il a une certaine indépendance de q ainsi.

Exemple: Une autre transformation canonique

$$\begin{cases} q & \rightarrow Q = p \\ p & \rightarrow P = -q \end{cases}$$

$$\{Q, P\} = \{p, -q\} = -\{p, q\} = \{q, p\} = 1$$

Fonction Génératrice:

Il existe une méthode systématique de construire une transformation canonique, appelée la fonction génératrice.

Nous pouvons générer des transformations canoniques de types :

- $F(q, Q) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial q} = \mathrm{p}$ et $-\frac{\partial F}{\partial Q} = \mathrm{P}$

- $F(q, P) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial q} = p$ et $\frac{\partial F}{\partial P} = Q$
- $F(p, Q) \Rightarrow -\frac{\partial F}{\partial p} = q$ et $-\frac{\partial F}{\partial Q} = P$
- $F(p, P) \Rightarrow -\frac{\partial F}{\partial p} = q$ et $\frac{\partial F}{\partial P} = Q$

Ces différentes transformations sont connues les fonctions génératrices de 1^{er}, $2^{\text{è}me}$, $3^{\text{è}me}$ et $4^{\text{è}me}$ type respectivement, utiles dans la construction de transformations canoniques.