Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Ferhat Abbas .Sétif
3ème Année licence maths .EDO.2023-2024.

Serie1

Théorème d'existence et d'unicité

Exercice 1:Etudier les exemples suivants en utilisant les conditions du théorème:

- (a) $y' = \frac{1}{y^2}$, $\quad y(x_0) = 0.$
- (b) $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$, $\quad y(x_0) = 0.$

Exercice 2 :Trouver les solutions communes aux deux équations suivantes:

- $y' = y^2 + 2x - x^4$ et $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$

Exercice 3 : Déterminer des régions dans lesquelles l'unicité est vérifiée:

- $y' = x^2 + y^2$ $\qquad y' = \sqrt{x-y}$ $\qquad y' = \frac{x}{y}$

Exercice 4 : Montrer que la solution n'est unique en aucun point de l'axe (ox):
$y' = \sqrt{|y|}$
Exercice 5 :Trouver la courbe intégrale passant par l'origine pour l'équation:
$y' = \sin xy$
Exercice 6 :Trouver par la méthode des approximations la solution du problème:
$y' = y$ avec $y(0) = 1$
Exercice 7 :Trouver par la méthode des approximations une solution approchée pour:
$y' = x^2 + y^2$, avec $y(0) = 0$, $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$
Exercice 8 :Trouver les trois premières approximations pour les équations suivantes:

- $y' = x^2 - y^2$, avec : $y(-1) = 0$
- $y' = x + y^2$, avec: $y(0) = 0$
- $y' = x + y$, avec : $y(0) = 1$

Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Ferhat Abbas .Sétif
3ème Année licence maths .EDO.2023-2024.

Serie 2 : E D O du premier ordre

Exercice 1: Equations à variables séparables et équations s'y ramenant :

- $(3e^x \tan y)\,dx + (2-e^x)\,\frac{1}{\cos^2 x}dy = 0$
- $(1+e^x)\,yy' = e^x$ avec $y(0) = 1$
- $y' \sin x = y \ln y$ avec $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ puis $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $x^3 y' \sin y = 2$ avec $y \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to \infty$
- Trouver l'équation d'une courbe passant par le point $(0,-2)$ et telle que la pente de la tangente

en chaque point soit égale à l'ordonné de ce point augmentéé de 3.
Exercice 2 : Equations homogènes et équations s'y ramenant :

- $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$
- $(x+y-2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 0$
- $(x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$
- $\left(x^2y^2-1\right)dy + 2xy^3dx = 0$.On pose : $y = z^\alpha$

Exercice 3 : Edo linéaires

- $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ $\cdot y' = \frac{1}{2x-y^2}$ $\cdot x(x-1)\,y' + y = x^2(2x-1)$ avec $y(2) = 4$
- Trouver la solution générale de $y' + p(x)\,y = q(x)$ connaissant deux solutions particulières $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

Exercice 4 : Edo de Bernoulli

- $y' - xy = -xy^3$ $\cdot xy' + y + y^2 \ln x$
- $x\int_0^x y(t)\,dt = (x+1)\int_0^x ty(t)\,dt$ $\cdot y(x) = e^x + \int_0^x y(t)\,dt.$

Exercice 5 : Equations aux différentielles totales:

- $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(y^3+yx^2\right)dy=0.$
- $x\left(2x^2+y^2\right)+yy'\left(2y^2+x^2\right)=0.$
- $\left(3x+2y+y^2\right)dx+\left(x+4xy+5y^2\right)dy=0.$

Trouver un facteur intégrant de la forme $\mu=\phi\left(x+y^2\right)$
Exercice 6 : Edo non résolues par rapport à la dérivée:

- $yy'^2+(x-y)\,y'=x.2y'^2-2xy'-2y+x^2=0.$
- $y=y'^2+{y'}^3.y^{\frac{2}{3}}+y'^{\frac{2}{3}}=1.$
- $x=y'+{y'}^2.\quad y=y'^2e^{y'}.\ \ x=y'^2-2y'+2.\quad y'=e^{\frac{y'}{y}}$

Exercice 7 : Edo de Lagrange et Clairaut:

- $y=2xy'+\ln y'.\quad y=xy'+\frac{1}{y'}.\ \ y=xy'^2-\frac{1}{y'}.\quad x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{y'^2}$

Exercice 8 : Edo de Riccati:

- $y'-y^2+2ye^x=e^{2x}+e^x$ avec $y_1\left(x\right)=e^x$ solution particulière .
- $y'=\frac{1}{x^4}-y^2$ avec $y_1\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ et $y_1\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ solutions particulières.
- $x^2y=x^2y^2+xy+1$ avec $y_1\left(x\right)=-\frac{1}{x}$ solution particulière.

Exercice 9: Etablissement des Edo pour les courbes suivantes :

- $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1.\quad y=a\left(1-e^{-\frac{x}{a}}\right)$
- $y=ax^2+bx+c\qquad y^2=2ax+a^2\qquad y=a\sin\left(x+b\right)$
- Former l'équation différentielle de la famille de droite passant à une distance égale à l'unité de l'origine.

Exercice 10 :Trajectoires orthogonales pour les familles:

- $y=kx$. $\qquad x^2+y^2=2ax.\qquad y=ax^2.$

Exercice 11 : Solutions singulières pour les equations :

- $xy'+y'^2-y=0$
- $xy'^2-2yy'+4x=0$, avec $(x\langle 0)$
- $2y\left(y'+2\right)-xy'^2=0$
- $y'^2=4x^2$
- $y'^2\left(2-3y\right)^2=4\left(1-y\right)$
- $3y=2xy'-\frac{2}{x}y'^2$

Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Ferhat Abbas .Sétif
3ème Année licence maths .EDO.2023-2024.

Série 3 : Edo d'ordre 2 et plus

Exercice 1 : On donne l'équation $y'' = 2\sqrt{y'}$.

- Montrer qu'elle possède deux solutions qui vérifient $y(0) = y'(0) = 0$.
- Pourquoi ce résultat n'est il pas en contradiction avec le théorème d'existence et d'unicité .

Exercice 2 : Intégrer les équations suivantes : Abaissement de l'ordre .

- $y''' = 0$.
- $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$, avec $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ et $y''(1) = 2$.
- $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$.
- $xy^{(V)} - y^{(IV)} = 0$.
- $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.
- $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.
- $x^3 y'' = (y - xy')^2$.
- $y'' = 2y^3$,avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

Exercice 3 : Etudier l'indépendance linéaire pour les familles suivantes:

- $\left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\}$.
- $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$.
- $\left\{\sin x, \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right), \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right\}$.
- $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$
- $\{x, | x |\}$.
- $y_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ et $y_2(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$
- $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = 2x$ sur $[0, 1]$ .Utiliser le déterminant de Gram.

Exercice 4 : Edo linéaires homogènes à coefficients constants.

- $y''' - 2y'' - 3y' = 0$
- $y''' + 2y'' + y' = 0$
- $y''' + 4y'' + 13y' = 0$
- $y^{(V)} - 2y^{(IV)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$
- $y^{(IV)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$

Exercice 5 :Edo linéaires non homogènes à coefficients constants.

- $y''' - y'' + y' - y = x + x^2$
- $y''' - y'' = 6x + 12x^2$
- $y'' + y' = 4x^2 e^x$
- $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$
- $y'' + 3y' + 2y = x \sin x$
- $y'' + y = x \cos x$
- $y'' + 4y = \sin 2x$
- $y'' - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x}$.

Exercice 6 : Edo d'Euler

- $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$.
- $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$.

Exercice 7 : Edo linéaires à coefficients variables.

- $xy'' + 2y' + xy = 1$.
- $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
- $x^2 (1 - \ln x) y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}$,si $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = \ln x$ sont deux solutions particulières.

Exercice 8 : Etablir l'équation différentielle linéaire homogène à partir du système fondamental .

- $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$.
- $y_1(x) = e^{x^2}$, $y_2(x) = e^{-x^2}$
- $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{3x}$.

Exercice 9 : Etablir l'équation différentielle linéaire homogène connaissant son équation caractéristique et écrire leurs solutions générales:

- $\left(\lambda^2+1\right)^2=0$
- $\lambda^3=0$
- $\lambda\left(\lambda^2+1\right)^2=0$

Exercice 10 : Etablir l'équation différentielle linéaire homogène connaissant les racines de l'équation caractéristique et écrire leurs solutions générales:

- $\lambda_1=1, \lambda_2=3+i, \lambda_3=3-i$
- $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=3$
- $\lambda_1=\lambda_2=3+i, \lambda_3=\lambda_4=3-i$

Exercice 11 : Intégrer en utilisant les séries.

- $y''-xy'-2y=0.$
- $y''=e^{xy},$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$
- $y''+y=0$, avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

Exercice 12 :

Déterminer la forme de la solution particulière de l'équation différentielle linéaire non homogène connaissant les racines de son équation caractéristique et son second membre:

- $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ et $f(x)=ax^2+bx+c$
- $\lambda_1=0, \lambda_2=1$ et $f(x)=ax^2+bx+c$
- $\lambda_1=\lambda_2=0$ et $f(x)=ax^2+bx+c$
- $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$ et $f(x)=(ax+b)e^{-x}$
- $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ et $f(x)=(ax+b)e^{-x}$
- $\lambda_1=i, \lambda_2=-i$,$\lambda_3=1$,et $f(x)=\sin x+\cos x$
- $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ et $f(x)=ax^2+bx+c$

Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Ferhat Abbas .Sétif
3ème Année licence maths .EDO.2023-2024.

Série 4 : Systèmes linéaires

Exercice 1 : Résoudre par la méthode des éliminations successives.

- $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -x - 3y \\ x(0) = 6, y(0) = -2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} tx' = -x + yt \\ t^2 y' = -2x + yt \end{cases}$

Exercice 2 : Résoudre les systèmes par la méthode d'Euler.

- $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = -x + 5y - z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 8y \\ y' = -2z \\ z' = 2x + 8y - 2z \end{cases}$
- $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases}$

Exercice 3 : Résoudre par la méthode de la variation des constantes .

- $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$

Exercice 4: Résoudre par la méthode des coefficients indéterminées

- $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = x - 2y + e^t \\ y' = x + 4y + e^{2t} \end{cases}$

Exercice 5 : Résoudre par la méthode de D'Alembert.

- $\begin{cases} x' = 5x + 4y + e^t \\ y' = 4x + 5y + 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} tx' = -2x + 2y + t \\ t^2 y' = -x - 5y + t^2 \end{cases}$

Exercice 6 : Résoudre en utilisant L'exponentielle d'une matrice .

- $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$
- $\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = -x + y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = ax + by + cz8y \\ y' = ay + bz \\ z' = az \end{cases}$

Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Ferhat Abbas .Sétif
3ème Année licence maths .EDO.2023-2024.

Série 5 : Introduction à la stabilité

- Exercice 1 : En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov ,étudier la stabilité d'une solution de l'équation : $y' = 1+x-y, y(0) = 0$.La solution est elle asymptotiquement stable.

- Exercice 2 : En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov ,étudier la stabilité de la solution $y = 0$ de l'équation : $y' = \sin^2 y$

- Exercice 3 : Etudier la stabilité de la solution triviale $y = 0$ de l'équation : $y'''' + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0$.

- Exercice 4 : Etudier la stabilité de la solution de l'équation dégénérée

$\cdot\ \varepsilon y' = y(e^y - 2) \cdot\ \varepsilon y' = (y-x)^2 \cdot\ \varepsilon y' = y^2 - 4y - 5 \cdot\ \varepsilon y' = y - x^2$.

- Exercice 5 : Etablir la différence entre les solutions des équations sur $[0,1]$ avec $y(0) = 0.1$

$\cdot \begin{cases} x' = \frac{y}{1+x} + x^2 \\ y' = \frac{y}{1+x} + x^2 + 0.01 \sin x \end{cases} \quad \cdot \begin{cases} x' = \frac{1}{3} \arctan xy \\ y' = \frac{1}{3} \arctan xy + 0,001 e^{-x^2} \end{cases}$

- Exercice 6 : En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov , montrer qu'une solution du système : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ qui satisfait aux conditions $x(0) = 0, y(0) = 0$ est stable mais non asymptotiquement .

- Exercice 7 : Définir la nature du point de repos $(0,0)$ des systémes suivants:

$\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = 2x + y \end{cases}, \ldots\ldots \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -2x + y \end{cases}, \ldots\ldots\ldots \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}.$

$$\begin{cases} x' = -x + z \\ y' = -2y - z \\ z' = y - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x + y + 5z \\ y' = -2y + z \\ z' = 3 - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2x - y \\ z' = x + y - z \end{cases}$$

- Exercice 8 : Pour quelles valeurs de α le point de repos $(0,0)$ est il stable pour les systèmes :

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -3x + \alpha y \\ y' = 2x + y \end{array} \right. . \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + \alpha y \\ y' = -2x + y \end{array} \right.$$

- Exercice 9 : Définir la nature du point de repos $(0,0)$ pour l'équation :

$\cdot\ y'' + 2\alpha y' + \beta^2 y = 0.$ avec $\alpha \succ 0$

- Exercice 10: Etudier la stabilité en première approximation de la solution nulle $x = 0, y = 0$.

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = x + 2y - \sin^2 y \\ y' = -x - 3y + x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) \end{array} \right. \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -x + 3y + x^2 \sin y \\ y' = -x - 4y + 1 - \cos^2 y \end{array} \right.$$

- Exercice 11 : Etudier la stabilité de la solution $(0,0)$ par la méthode des fonctions de Liapounov .

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -3y - 2x^3 \\ y' = 2x - 3y^3 \end{array} \right. \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -xy^4 \\ y' = yx^4 \end{array} \right. \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = x + 2y^2 \\ y' = -2y + 4yx^2 \end{array} \right. .$$

- Exercice 12 : Etudier la stabilité en première approximation de la solution nulle.

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = x + 2y - \sin^2 y \\ y' = -x - 3y + x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) \end{array} \right. \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -x + 3y + x^2 \sin y \\ y' = -x - 4y + 1 - \cos^2 y \end{array} \right.$$

Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Ferhat Abbas .Sétif
3ème Année licence maths .EDO.2023-2024.

Exercices de révision

- Intégrer les équations suivantes:

$\cdot \cos y' = 0.$ $\quad \cdot\ y'' = e^y$
$\cdot\ e^{y'} = 1.$ $\quad \cdot\ yy'' = y' + y'^2.$
$\cdot \left(1 + y'^2\right) y^2 - 4yy' - 4x = 0.$ $\quad \cdot y'' = e^y, y(0) = 0, y'(0) = \sqrt{2}.$
$\cdot\ y'^2 - yy' + e^x = 0.$ $\quad \cdot\ y'' = 0, y(0) - y(\pi) = 1, y'(0) + y'(\pi) = 0.$
$\cdot\ y' = \frac{1}{2x-y}.$ $\quad \cdot y'' + 2025y = 4, y(0) - y(\pi) = 1, y'(0) + y'(\pi) = 0.$
$\cdot\ y' = \sqrt{x+y}.$ $\quad \cdot\ y' = |y|$ $\quad \cdot\ y' = |y-1|$

- Trouver les trois premiers termes du développement en série :

$\cdot\ y' = 1xy, y(0) = 0.\cdot\ y' = \sin xy, y(0) = 1.\cdot\ y'' + x \sin y, y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = 0.$

- Intégrer à l'aide de séries les équation suivantes :

$\cdot\ y' - 2xy = 0, y(0) = 1.$ $\quad \cdot\ y'' - xy + y - 1 = 0, y(0) = y'(0) = 0.$

- Intégrer les systèmes suivants :

$$\cdot \begin{cases} x' = 8y - x \\ y' = x + y \end{cases}, \begin{cases} x' = y + x + 1 \\ y' = -2x + 4y + t \end{cases}.$$
$$\cdot \begin{cases} x' = -y + 2x + z \\ y' = x + z \\ z' = y - 2z - 2x \end{cases}, \begin{cases} x' = -y + 2x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = -y + 2z + x \end{cases}.$$

- Etudier la stabilité des équations et des systèmes :

$\cdot\ y' = 1 - y^2.$
$\cdot\ y' = 1 + x - y$,avec $y(0) = 0.$
$\cdot\ y' = \sin^2 y.$
$\cdot \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$,avec $x(0) = y(0) = 0.$