Canevas du module EDO
3ème année Licence mathématiques,

Chapitre 1 : EDO du premier ordre.

A : Résultats principaux.

B: Existence locale , globale et unicité.

C : Dépendance par rapport aux conditions initiales.

D : Exercices.

Chapitre 2 : EDO du second ordre et plus.

A : Méthodes de résolution.

B : Exercices.

Chapitre 3 : Systèmes linéaires.

A : Exponentielle d'une matrice.

B : Systémes sans second membres.

C: Systémes avec second membres.

D : Exercices.

Chapitre 4 : Stabilité.

A : Introduction sur la notion de stabilité.

B: Exercices.

Chapitre 1: Equations différentielles ordinaires du premier ordre

Notions fondamentales et définitions.

- On appelle équation différentielle ordinaire une relation entre une variable x,la fonction cherchée $y(x)$ et ses derivées $y', y'', ..., y^{(n)}$ ie une relation de la forme $F\left(x, y, y', y'', ...y^{(n)}\right) = 0$.Comme par exemple: $y' + xy = 0, y'' + y' + x - \cos x = 0, \left(x^2 - y^2\right) dx + (x + y)\, dy = 0$.

- Son ordre est l'ordre de la dérivée la plus élevée par exemple:

$y' + xy = 0$,son ordre est 1.
$y''' + y' + x - \cos x = 0$,son ordre est
3. $\left(x^2 - y^2\right) dx + (x + y)\, dy = 0$.son ordre est 1.

- Sa solution sur un intervalle $I = [a, b]$ est une fonction $y = \varphi(x)$ définie anisi que toutes ses dérivées sur cet intervalle et verifie l'équation donnée.Par exemple $y = \cos x + \sin x$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

- La courbe d'une solution s'appelle courbe intégrale .

- La forme générale de l'équation différentielle du premier ordre est :

$F(x, y, y') = 0$.

- Si on parvient à résoudre l'équation $F(x, y, y') = 0$ par rapport à y' on obtient la forme $y' = f(x, y)$.

- Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y = \varphi(x)$ de l'équation $y' = f(x, y)$ qui satisfait à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Théorème d'existence et d'unicité.

Soit donnée une équation différentielle $y' = f(x, y)$ où la fonction $f(x, y)$ est définie dans un certain domaine D du plan xoy contenant le point (x_0, y_0) .Si la fonction $f(x, y)$ satisfait aux deux conditions :

(a) $f(x, y)$ est une fonction continue des deux variables x et y dans D.

(b) $f(x, y)$ possède une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ bornée dans D.

Alors : Il existe un intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ sur lequel cette équation admet une solution et une seule $y = \varphi(x)$ satisfaisant à la condition de Cauchy $y(x_0) = y_0$.

Remarque : Le théorème fournit des conditions suffisantes d'existence de l'unique solution du problème de Cauchy pour l'équation $y' = f(x, y)$ mais ne sont pas nécessaires.En effet l'équation $y' = f(x, y)$ peut posseder une solution unique satisfaisant à la condition de Cauchy $y(x_0) = y_0$ sans que les deux conditions (a) ou (b) ou les deux à la fois soient remplies au point (x_0, y_0).

Exemples :

- $y' = \frac{1}{y^2}$. On a : $f(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$. Aux points $(x_0, 0)$ de l'axe ox les deux conditions du théorème ne sont pas remplies car $f(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont discontinues et ne sont pas bornées pour $y \to \infty$ mais par chaque point de l'axe ox il passe l'unique solution $y(x) = \sqrt[3]{x - x_0}$.

- $y\prime = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ on a $f(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ est continue dans $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \to \infty$ quand $y = 0, ie$ sur l'axe ox .De sorte que pour $y = 0$ la condition (b) du théorème n'est pas remplie .On vérifie que $y(x) = \frac{(x+c)^3}{8}$ est solution de l'&quation donnée.D e plus $y(x) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ est solution aussi. Ainsi par chaque point de l'axe ox il passe au moins deux courbes puis par recollement on en déduit une infinité .

Remarque : La condition $\frac{\partial f}{\partial y}$ bornée peut être affaiblie et remplacée par la condtion suivante dite de Lipschitz.

Définition : On dit qu'une fonction $f(x,y)$ définie dans un certain domaine D satisfait à la condition de Lipschitz en y s'il existe une constante L telle que :

$\forall y_1, y_2 \in D$ et $\forall x \in D$ on a :$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$.

Remarque : L'existence dans D d'une dérivée bornée$\frac{\partial f}{\partial y}$ est suffisante pour que f vérifie dans D la condition de Lipschitz mais la réciproque est fausse en général.Il suffit de prendre comme contre exemple la fonction $f(x,y) = 2|y|\cos x$ qui n'est pas dérivable par rapport à y aux points $(x_0, 0)$ avec $\mathrm{x}_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,mais la condition de Lipschitz est satisfaite au voisinage de ce point .

En effet on a :

$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |2|y_2|\cos x - 2|y_1|\cos x| = |2\cos x| . ||y_2| - |y_1|| \leq 2|y_2 - y_1|$.

Ainsi la condition de Lipschitz est satisfaite avec$L = 2$.

Théorème : Si la fonction $f(x,y)$ est continue et satisfait à une condition de Lipschitz en y dans D ,alors le problème de Cauchy $y' = f(x,y)$ avec $y(x_0) = y_0$ à une solution unique.

Remarque :La condition de Lipschitz est essentielle pour l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

Exemple : Considérons l'exemple

$$y' = f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2 y}{x^4+y^2} \text{ si } x^4 + y^2 \succ 0 \\ 0 \text{ si } x = y = 0 \end{cases} .$$

f est continue et $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = \frac{4x^2(x^4 - y_1 y_2)}{(x^4+y_2^2)(x^4+y_1^2)}(y_2 - y_1)$. Si $y_1 = \alpha x^2$ et $y_2 = \beta x^2$ alors $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = \frac{4(1-\alpha\beta)}{\|x\|(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}(y_2 - y_1)$ et la condition de Lipschitz n'est remplie dans aucune région contenant l'origine parce que le facteur de $(y_2 - y_1)$ se trouve non bornée quand $x \to 0$.Cette équation admet une solution $y(x)$

$= C^2 - \sqrt{x^4 + C^4}$.On déduit qu'il existe une infinité de solutions passant par l'origine.

Définition : On appelle solution générale de l'équation $y' = f(x,y)$ une fonction $y = \varphi(x, C)$ dépendant de la seule constante C et telle que :

(1) elle satisfait à l'équation $y' = f(x, y)$ pour toute valeur admissible de la constante C .

(2) quelle que soit la condition initiale $y(x_0) = y_0$ on peut choisir une telle valeur C_0 de C telle que la solution $y = \varphi(x, C_0)$ satisfasse à la condition initiale donnée.

Définition : On appelle solution particulière de l'équation $y\prime = f(x, y)$ une solution obtenue à partir de la solution générale $y = \varphi(x, C)$ pour une valeur quelqonque de C.

Exemples :

(1) vérifier que $y(x) = x + C$ est la solution générale de l'équation $y' = 1$ puis trouver une solution particulière qui vérifie $y(x) = 0$.En effet on a $[y(x)]' = (x + C)' = 1$ donc $y(x) = x + C$ est la solution générale.La condition $y(0) = 0$ donne $C = 0$ et la solution particulière dans ce cas est donnée par $y_p(x) = x$.

(2) vérifier que $y(x) = Ce^x$ est la solution générale de l'équation $y' = y$ puis trouver une solution particulière qui vérifie $y(0) = -1$.En effet on a $[y(x)]' = (Ce^x)' = Ce^x = \ y(x)$ donc $y(x) = Ce^x$ est la solution générale .La condition $y(0) = -1$ donne $C = -1$ et la solution particulière dans ce cas est donnée par $y_p(x) = -e^x$.

Exemples : En utilisant une condition suffisante quelconque d'unicité déterminer des régions dans lesquelles la solution est unique.

(1) $y' = \frac{x}{y}$.

$f(x, y) = \frac{x}{y}$ est continue pour $y \neq 0$ ie $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des x.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}$ est bornée si $-My^2 \leq x \leq My^2$.

(2) $y' = x^2 + y^2$. On a $f(x, y) = x^2 + y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ est bornée $\Leftrightarrow |y| \leq a$.

Méthode des approximations successives : Picard.

Soit à chercher la solution $y = y(x)$ d'une équation différentielle $y' = f(x, y)$ avec $y(x_0) = y_0$.

Supposons que dans un certain rectangle $D = \{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ de centre au point (x_0, y_0) l'équation $y' = f(x, y)$ satisfait aux conditions du théorème d'existence et d'unicité.

Construisons la suite $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt$ avec $n = 1, 2, ...n$.

Pour approximation d'ordre zéro $y_0(x)$ on peut prendre toute fonction continue au voisinage de x_0 en particulier $y_0(x) = y_0$.On peut démontrer que sous les hypothèses faites sur l'équation $y' = f(x, y)$ les approximations successives $(y_n(x))$ convergent vers la solution exacte de l'équation donnée avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ dans un certain intervalle $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ où $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$ et l'erreur est donnée par: $|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n$.

Exemple :

$y' = y$ avec $y(0) = 1$.

$y_0(x) = 1$

$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0(t)\, dt = 1 + x$

$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(t)\, dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

.

.

$y_{n-1}(x) = 1 + \int_0^x y_{n-2}(t)\,dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$

$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)\,dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n.$

On a $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = e^x = y(x)$ et cette limite est une solution.

Exemple :

$y' = x^2 + y^2$; avec $y(0) = 0$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\right\}$.

$|f(x,y)| = \left|x^2 + y^2\right| \leq 2$ donc $M = 2, h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right), N = \max_D \frac{\partial f}{\partial y} = \max_D |2y| = 2$. Les $y_n(x)$ convergent dans $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.et on a :

$y_0(x) = 0$

$y_1(x) = \int_0^x \left(t^2 + y_0^2\right) dt = \frac{1}{3}x^3$

$y_2(x) = \int_0^x \left(t^2 + y_1^2\right) dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7.$

$y_3(x) = \int_0^x \left(t^2 + y_2^2\right) dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}.$

On a : $|y_3(x) - y(x)| \leq \frac{2}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 .2^2 = \frac{1}{6} = 0.16666666.$

Remarque : La continuité de la fonction f ne suffit pas pour la convergence des approximations successives :

$$\text{Soit } f(x,y) = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } x = 0, y \in \mathbb{R} \\ 2x \text{ si } 0 < x \leq 1, y < 0 \\ 2x - \frac{4}{x}y \text{ si } 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x \text{ si } 0 < x \leq 1, x^2 < y < +\infty \end{array}\right|$$

Sur l'ensemble $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\right\}$,la fonction est continue et bornée par le nombre 2.Pour le point initial $(0,0)$ les approximations pour $0 \leq x \leq 1$ sont de la forme :

$y_0(x) = 0.$

$y_1(x) = \int_0^x f(t, y_0(t))\,dt = x^2.$

$y_2(x) = \int_0^x f(t, y_1(t))\,dt = -x^2.$

$y_{2n-1}(x) = x^2.$

$y_{2n}(x) = -x^2;$

Donc pour $x \neq 0$ la suite $(y_n(x))$ n'a pas de limite, et même les deux sous-suites $(y_{2n}(x)), (y_{2n-1}(x))$ ne convergent pas vers la solution.On a : $y'_{2n-1}(x) = 2x \neq f\left(x, x^2\right) = -2x$ et $y'_{2n}(x) = -2x \neq f\left(x, -x^2\right) = 2x.$

Dans le cas où les approximations successives convergent il se peut que la solution obtenue ne soit pas unique .

Exemple :

$y' = \sqrt{y}$ et $y(0) = 0$, on a : $f(x,y) = \sqrt{y}$ avec $y_0(x) = 0$.Puis on obtient que :

$y_1(x) = \int_0^x f(t, y_0(t))\,dt = 0$

$y_2(x) = \int_0^x f(t, y_1(t))\,dt = 0.$

$y_{n-1}(x) = 0.$

$y_n(x) = 0.$

Donc $y_n \to 0$ qui est une solution du problème mais elle n'est pas unique car y$(x) = \left(\frac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

est aussi une solution pour $x \geq 0$.

Serie1

Exercice 1 : Etudier les exemples suivants en utilisant les conditions du théorème:

- (a) $y' = \frac{1}{y^2}$, $\quad y(x_0) = 0.$
- (b) $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$, $\quad y(x_0) = 0.$

Exercice 2 :Trouver les solutions communes aux deux équations suivantes:

- $y' = y^2 + 2x - x^4$ $\quad$ et $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$

Exercice 3 : Déterminer des régions dans lesquelles l'unicité est vérifiée:

- $y' = x^2 + y^2$ $\qquad$ $y' = \sqrt{x - y}$ $\qquad$ $y' = \frac{x}{y}$

Exercice 4 : Montrer que la solution n'est unique en aucun point de l'axe (ox):
$y' = \sqrt{|y|}$

Exercice 5 :Trouver la courbe intégrale passant par l'origine pour l'équation :
$y' = \sin xy$

Exercice 6 :Trouver par la méthode des approximations la solution du problème:
$y' = y$ avec $y(0) = 1$

Exercice 7 :Trouver par la méthode des approximations une solution approchée pour :
$y' = x^2 + y^2$, avec $y(0) = 0$, $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$

Exercice 8 :Trouver les trois premières approximations pour les équations suivantes:

- $y' = x^2 - y^2$, avec : $y(-1) = 0$
- $y' = x + y^2$, avec: $y(0) = 0$
- $y' = x + y$, avec : $y(0) = 1$

Chapitre 2 : Etude de quelques équations du premier ordre 2

Equations à variables séparables et équations s'y ramenant.

- Séparées : $\varphi(y)\,dy = \psi(x)\,dx \quad \Rightarrow \int \varphi(y)\,dy = \int \psi(x)\,dx$
- séparables : $\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx = \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy \Rightarrow \int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy,$

$(\varphi_2(x)\,\psi_1(y) = 0)$ à etudier à part.

- $y' = f(ax + by + c)\,, a, b, c, \in \mathbb{R}.$

On pose $z = ax + by + c \Rightarrow z' = a + by' = a + bf(z) \Rightarrow \frac{dz}{a+bf(z)} = dx,$
c'est une équation séparée.
Exemple :
$3e^x \tan y dx + (2 - e^x)\,.\frac{1}{\cos^2 y}dy = 0$
$\Rightarrow \frac{3e^x}{2-e^x}dx = \frac{1}{\tan y \cos^2 y}dy$
$\Rightarrow \int \frac{3e^x}{2-e^x}dx = \int \frac{1}{\tan y \cos^2 y}dy$
$\Rightarrow -3\ln|2 - e^x| + \ln|\tan y| = C$
$\Rightarrow \frac{|\tan y|}{|2-e^x|^3} = e^C$
$\Rightarrow \frac{\tan y}{(2-e^x)^3} = \pm e^C = K.$
Ainsi on trouve:

$$\tan y - K(2 - e^x)^3 = 0$$

$(\tan y = 0 \Rightarrow y = k\pi)$ et $(2 - e^x = 0 \Rightarrow x = \ln 2)$ sont des solutions prticulières obtenues pour $K = 0$ et $K = \infty$.

(2) Equations homogènes et équations s'y ramenant :

- Une fonction f est dite homogène de degré n si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)\,.$
- Une équation de la forme $y' = f(x, y)$ est dite homogène si f est homogène de degré 0 ie $f(tx, ty) = f(x, y)$.
- Une équation homogène est de la forme $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.En effet $y' = f(x, y) = f\left(x\left(1, \frac{y}{x}\right)\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$

On pose $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = \varphi(u) \Rightarrow u'x = \varphi(u) - u \Rightarrow \frac{1}{\varphi(u)-u}du = \frac{1}{x}dx$ qui est une équation à variables séparées.Etudier Le cas $\varphi(u) - u = 0$.Si $\varphi(u_0) = u_0$,alors u_0 ou $y = u_0 x$ est une solution.On peut poser directement $y = ux$.

Equations s'y ramenant .

$(A)\quad y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$
Si $c = c_1 = 0$, alors on a une équation homogène.
Si c ou c_1 est $\neq$ de 0 :

(1) $\begin{vmatrix} a & , & b \\ a_1 & , & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$,on pose $x = \xi + h$ et $y = \eta + k$,on remplace et on choisit h et k pour que :$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\alpha_1\xi+\beta_1\eta}\right)$.

(2) $\begin{vmatrix} a & , & b \\ a_1 & , & b_1 \end{vmatrix} = 0$,alors $a = \alpha a_1$ et $b = \alpha b_1$ de sorte que $y' = f\left(\frac{\alpha(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ et en posant $z = a_1x + b_1y$, on obtient une équation différentielle à variables séparables.

- $(x + y - 2)\, dx + (x - y + 4)\, dy = 0 \Rightarrow$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & , & 1 \\ 1 & , & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$
On pose $x = \xi - 1$ et $y = \eta + 2$
$\Rightarrow (\xi + \eta)\, d\xi + (\xi - \eta)\, d\eta = 0$, qui est homogène .
On pose : $\eta = \mu\xi \Rightarrow (\xi + \xi\mu)\, d\xi + (\xi - \xi\mu)\,(\xi d\mu + \mu d\xi) = 0$
$\Rightarrow \left(1 + 2\mu - \mu^2\right) d\xi + \xi\,(1 - \mu)\, d\mu = 0.$
$\Rightarrow \frac{d\xi}{\xi} + \frac{1-\mu}{1+2\mu-\mu^2} d\mu = 0.$
$\Rightarrow \ln|\xi| + \frac{1}{2}\ln\left|1 + 2\mu - \mu^2\right| = \ln C.$
$\Rightarrow \xi^2\left(1 + 2\mu - \mu^2\right) = C.$
$\Rightarrow \xi^2\left(1 + 2\mu - \mu^2\right) = C.$
$\Rightarrow (x+1)^2\left(1 + 2\frac{y-2}{x+1} - \left(\frac{y-2}{x+1}\right)^2\right) = C.$

- $(x + y + 1)\, dx + (2x + 2y - 1)\, dy = 0$

$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & , & 1 \\ 2 & , & 2 \end{vmatrix} = 0.$
On pose : $z = x + y$
$\Rightarrow (z + 1)\,(dx) + (2z - 1)\,(dz - dx) = 0,$
$\Rightarrow (2z - 1)\, dz + (-z + 2)\, dx = 0,$
$\Rightarrow \frac{2z-1}{-z+2} dz + dx = 0,$
$\Rightarrow x - 2z - 3\ln|z - 2| = C,$
$\Rightarrow x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C.$

(B) Parfois on utilise le changement $y = z^\alpha$ et oncherche α pour que l'équation donnée soit homogène.

Soit l'équation $\left(x^2y^2 - 1\right) dy + 2xy^3dx = 0$,en faisant le changement $y = z^\alpha$, on obtient $y' = \alpha z^{\alpha-1}z'$,puis l'équation
$\left(x^2z^{2\alpha} - 1\right)\alpha z^{\alpha-1}dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
$\Rightarrow \alpha\left(x^2z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1}\right) dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0.$

Cette équation est homogène si : $2+3\alpha-1 = \alpha-1 = 3\alpha+1 \Rightarrow \alpha = -1$,et le changement $y = \frac{1}{z}$ donne comme équation homogène : $\left(z^2 - x^2\right) dz+2xzdx = 0.$

Equations linéaires du premier ordre .

Ce sont les équations de la forme $y' + p\,(x)\, y = q\,(x)$ .Si $q\,(x)$ est identiquement nulle alors l'équation est dite linéaire homogène à variables séparables ayant pour solutions générales $y_H\,(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$.

Recherche d'une solution générale de l'équation non homogène :

Première méthode : Variation de la constante C dans $y_H(x)$ et on a $y_G(x) = C(x)\,e^{-\int p(x)dx}$.

Exemple : $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

On a $y' + 2xy = 0$ donc $y_H(x) = Ce^{-x^2}$ et $y_G(x) = C(x)\,e^{-x^2} \Rightarrow y_G'(x) = C'(x)\,e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2}$,on remplace dans l'équation on trouve $C'(x) = 2x$ puis $C(x) = x^2 + K$ et $y_G(x) = C(x)\,e^{-x^2} = \left(x^2 + K\right)e^{-x^2} = x^2e^{-x^2} + Ke^{-x^2} = y_P + y_H$.

Deuxième méthode : $y_G = y_H + y_P$.

Soit $y_P(x)$ une solution particulière et y_G la solution générale.On a les deux équations $y_P(x)' + p(x)\,y_P(x) = q(x)$ et $y_G(x)' + p(x)\,y_G(x) = q(x)$.En retranchant les deux équations on trouve $(y_G(x) - y_P(x))' + p(x)\,(y_G(x) - y_P(x)) = 0$,de sorte que $(y_G(x) - y_P(x))$ est une solution de l'équation de léquation homogène et par suite $y_G(x) - y_P(x) = y_H$ et on obtient à la fin que : $y_G = y_H + y_P$.

Il se peut qu'une edo puisse être aussi linéaire en x en tant que fonction de y.

Exemple 1 : $y' = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$.

$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y \Rightarrow x' - x\cos y = \sin 2y \Rightarrow$ on a une équation linéaire en x comme fonction de y, .Ainsi on trouve $x' - x\cos y = 0 \Rightarrow x_H = Ce^{\sin y}$ et $x_G = C(y)\,e^{\sin y} \Rightarrow C'(y)\,e^{\sin y} = \sin 2y$,et en intégrant par parties on trouve : $C(y) = -2e^{\sin y}(1 + \sin y) + K$ ce qui donne : $x_G(y) = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y) = x_H(y) + x_P(y)$.

Troisième méthode . On pose $y(x) = u(x)\,v(x)$,après dérivation on trouve : $vu\prime + (pv + v')\,u = q(x)$ .On cherche une fonction v telle que $pv + v' = 0$ et on obtient $u\prime = \frac{q(x)}{v(x)}$.

Exemple 2 : $x(x-1)\,y' + y = x^2(2x-1)$ et $y(2) = 4$.

$x(x-1)(u'v + uv') + uv = x^2(2x-1) \Rightarrow x(x-1)\,u'v + (x(x-1)\,v' + v)\,u = x^2(2x-1)$ .On prend $x(x-1)\,v' + v$ par exemple $v(x) = \frac{x}{x-1}$ et $u' = 2x - 1 \Rightarrow u(x) = x^2 - x + C$ et on obtient $y_G = \frac{Cx}{x-1} + x^2, C \in \mathbb{R}$.La condition $y(2) = 4 = 2C + 4 \Rightarrow C = 0$ et $y_P(x) = x^2$.

Interprétation géométrique :

Soit C_α une famille de courbes intégrales de l'équation $y' + p(x)\,y = q(x)$ .On montre qu'en des points homologues les tangentes aux courbes se coupent en un point unique $S\left(x + \frac{1}{p(x)}, \frac{q(x)}{p(x)}\right)$. Points homologues ceux qui sont situés sur une même droite parallèle à l'axe des ordonnées. L'élimination de x entre $\xi = x + \frac{1}{p(x)}$,et $\eta = \frac{q(x)}{p(x)}$ donne l'équation du lieu géométrique des point S : $f(\xi, \eta) = 0$.

Equations de Bernoulli : $y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n$,où $n \neq (0,1)$.

Pour $n = 0$,on a une équation linéaire.$y' + p(x)\,y = q(x)$.

Pour $n = 1$,on a une équation linéaire homogène $y' + [p(x) - q(x)]\,y = 0$.

Pour $n \neq (0,1)$.

On pose : $z = y^{1-n}$

$\Rightarrow z' = (1-n)\, y' y^{-n}$,
$\Rightarrow \frac{y'}{y^n} + p(x) \frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$,
$\Rightarrow \frac{z'}{(1-n)} + p(x)\, z = q(x)$
$\Rightarrow z' + (1-n)\, p(x)\, z = (1-n)\, q(x)$ qui est linéaire en z.

Equations aux différentielles totales

Léquation $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ s'appelle aux différentielles totales si son premier membre représente une différentielletotale d'une certaine fonction $u(x,y)$ ie $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

Théorème : Pour que l'équation $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ soit une équation aux différentielles totales il faut et il suffit que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Exemple : $(\sin xy + xy \cos xy)\, dx + \left(x^2 \cos xy\right) dy = 0$.
$\frac{\partial M}{\partial y} = x \cos xy + x \cos xy - x^2 y \sin xy = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy$,
$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy$,
donc $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ on a une équation aux différentielles totales.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} = \sin xy + xy \cos xy \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos xy \end{array} \right. .$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin xy + xy \cos xy \Rightarrow u(x,y) = x \sin xy + \varphi(y)$,
$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos xy = \frac{\partial (x \sin xy + \varphi(y))}{\partial y} = x^2 \cos xy + \varphi'(y)$,

Ainsi on a $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = K$ et par suite $u(x,y) = x \sin xy + K$ et l'intégrale générale est donnée par : $x \sin xy = C$.

Facteur intégrant : Si $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ n'est pas totale on cherche une fonction μ telle que $[\mu M(x,y)]\, dx + [\mu N(x,y)]\, dy = 0$ soit une différentielle totale.

$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \Rightarrow N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \mu$,D'où :

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si $\mu = \mu(x) \Rightarrow \frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ et $\mu(x)$ existe $\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ne dépend pas de y.

Si $\mu = \mu(y) \Rightarrow \frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ et $\mu(y)$ existe $\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ne dépend pas de x..

Exemple : $\left(x + y^2\right) dx - 2xydy = 0$.

On a : $M = x + y^2$, $N = -2yx$ et $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y+2y}{-2xu} = -\frac{2}{x}$ et par suite $\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{2}{x}$ et $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$,donc l'équation devient: $\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} - \left[\frac{-y^2 dx + 2xydy}{x^2}\right] = 0 \Rightarrow d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right) = 0 \Rightarrow \ln|x| - \frac{y^2}{x} = C \Rightarrow x = e^{\frac{y^2}{x}}$.

Equations du premier ordre non résolues par rapport à $\mathbf{y'}$.

- **Equations du premier ordre de degré n en y' :**

$y'^n + p_1(x,y)\, y'^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x,y)\, y' + p_n(x,y) = 0$.
On cherche $y'_1 = f_1(x,y)$, ..., $y'_k = f_k(x,y)$ avec $k \leq n$

Exemple 1 : $yy'^2 + (x-y)\,y' - x = 0.$

On a $y' = \frac{y-x\pm\sqrt{(x-y)^2+4xy}}{2y}$ et $y' = 1$ et $y' = -\frac{x}{y}$. Après intégration on trouve : $y = x+1$ et $y^2 + x^2 = C^2, (C \in \mathbb{R})$

Exemple 2 : $2y'^2 - 2xy' - 2y + x^2 = 0$

On a : $y = y'^2 - xy' + \frac{1}{2}x^2$,posons $y' = p$

$\Rightarrow y = p^2 - xp + \frac{1}{2}x^2,$

$\Rightarrow dy = 2pdp - pdx - xdp + xdx = pdx$

$\Rightarrow (2p-x)\,(dp - dx) = 0$

$\Rightarrow$ soit $2p - x = 0$ soit $dp - dx = 0$

$\Rightarrow p = \frac{x}{2}$ou $p = x + C$

$\Rightarrow y\,(x) = Cx + C^2 + x^2$ ou $y\,(x) = \frac{x^2}{4}.$

- **Equations de la forme** $f\,(y, y') = 0$ **et** $f\,(x, y') = 0.$

Si les deux équations sont résolubles par rapport à y' alors on obtient des ed à variables séparables sinon on aura deux cas;

$[A]$ $f\,(y, y') = 0$ résoluble par rapport à y ie $y = \varphi\,(y')\,.$

Posons $y' = p$,alors $y = \varphi\,(p)$ et $dy = pdx = \varphi'\,(p)\,dp \Rightarrow dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p}$ et $x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C$ ce qui donne finalement une solution paramétrée

$$x\,(p) = \int \frac{\varphi'\,(p)\,dp}{p} + C, y\,(p) = \varphi\,(p)$$

Exemple 1 :. $y = ay'^2 + by'^3$

Posons : $y' = p \Rightarrow dy = pdx.$

On a : $y\,(p) = ap^2 + bp^3$

$\Rightarrow pdx = 2apdp + 3bp^2dp$

$\Rightarrow dx = 2adp + 3bpdp$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x\,(p) &= 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C, \\ y\,(p) &= ap^2 + bp^3 \end{aligned}$$

$[B]$ $f\,(y, y') = 0$ n'est pas résoluble par rapport à y et y' mais admet une expression de y et y'par un certain paramètre t ie $y = \varphi\,(t)\,, y' = \psi\,(t)\,.$On a $dy = pdx = \psi\,(t)\,dx = \varphi'\,(t)\,dt \Rightarrow x\,(t) = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$,ainsi on a une soluion sous forme paramétrique

$$\begin{aligned} x\,(t) &= \int \frac{\varphi'\,(t)\,dt}{\psi\,(t)}, \\ y &= \varphi\,(t)\,. \end{aligned}$$

Exemple 2 :.$y^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1$

On a : $\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(y'^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1.$

Posons $y(t) = \cos^3 t$ et $y'(t) = p(t) = \sin^3 t$
$\Rightarrow dx = \frac{dy}{p} = \frac{-3\sin t\cos^2 t}{\sin^3 t}dt = \frac{-3\cos^2 t}{\sin^2 t}dt$
$\Rightarrow x = \int \left(3 - 3\frac{1}{\sin^2 t}\right) dt = 3t + 3\,(ctg)\,t + C$
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(t) &= 3t + 3\,(ctg)\,t + C, \\ y(t) &= \cos^3 t. \end{aligned}$$

$[C]$ Si $f(x, y') = 0$ est résoluble par rapport à $x.ie$ $x = \varphi(y')$.
On pose $y' = p$
$\Rightarrow dy = pdx$ et $x = \varphi(p)$
$\Rightarrow dx = \varphi'(p)\,dp$
$\Rightarrow dy = p\varphi'(p)\,dp$
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} y &= \int p\varphi'(p)\,dp + C, \\ x &= \varphi(p) \end{aligned}$$

Exemple 3 :. $ay' + by'^2 = x$.On pose $y' = p$.
$\Rightarrow x = ap + bp^2, dx = adp + 2bpdp$ et $dy = pdx = apdp + 2bp^2dp$
$\Rightarrow$

$$x = ap + bp^2, y = \frac{a}{2}p^2 + \frac{2}{3}bp^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

Equations de Lagrange et Clairaut

- **Equations de Lagrange :** $y = x\varphi(y') + \psi(y')$

On pose $y' = p$ et en dérivant par rapport à x et en remplaçant dy par pdx on ramène cette équation à une équation linéaire par rapport à x en tant que fonction de p.On cherche la solution $x = r(p, C)$ et on obtient la solution générale

$$\begin{aligned} x &= r(p, C), \\ y &= r(p, C)\,\varphi(p) + \psi(p) \end{aligned}$$

En outre l'équation de Lagrange peut posseder des solutions singulières de la forme $y = x\varphi(c) + \psi(c)$,où c est une racine de l'équation $c = \varphi(c)$.
Exemple 1 : $y = 2xy' + \ln y'$
$y' = p \Rightarrow y = 2xp + \ln p$
$\Rightarrow pdx = 2px + 2xdp + \frac{dp}{p}$,
$\Rightarrow p\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{p^2}$,
$\Rightarrow$

$$x(p) = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p},\ y(p) = \ln p + \frac{2C}{p} - 2$$

$c = \varphi(c)$ donne $2c = c$,donc $c = 0, y = \varphi(0)\,x + \psi(0)$ qui est non définie donc aucune solution singulière.

- **Equations de Clairaut** : $y = xy' + \psi(y')$.C'est un particulier de Lagrange.

$y = xy' + \psi(y) = xp + \psi(p)$
$\Rightarrow dy = xdp + pdx + \psi'(p)\,dp$
$\Rightarrow pdx = xdp + pdx + \psi'(p)\,dp$
$\Rightarrow \big(\psi'(p) + x\big)\,dp = 0$
$\Rightarrow dp = 0$ ie $p = C$ et $y = Cx + \psi(C)$ comme solution générale ou bien
$\psi'(p) + x = 0$ et $y = xp + \psi(p)$ qui est la solution singulière.
Exemple 1 :.$y = xy' + \frac{1}{y'} = xp + \frac{1}{p}$
$\Rightarrow dy = pdx = pdx + xdp - \frac{dp}{p^2}$
$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{p^2}\right) dp = 0$ ce qui donne soit $dp = 0, p = C$,et $y = Cx + \frac{1}{C}$ comme solution générale soit $x - \frac{1}{p^2} = 0$,donc
$x = \frac{1}{p^2}$ et $y = xp + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$ et $y^2 = 4x$ comme solution singulière.

Riccati equation

A Riccati equation is an ordinary differential equation of the form $y' = a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x)$ where a, b and c are three functions, often chosen continuous on a common interval with real values. It bears this name in honor of Jacopo Francesco Riccati ($1676-1754$) and his son Vincenzo Riccati ($1707-1775$). There is in general no method to solve by quadrature such an equation, nevertheless this is possible as soon as one knows a particular solution.

Resolution methods

- First method

If y_1 is a particular solution of the Riccati equation $y' = a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x)$ then we put $y = y_1 + \frac{1}{z}$and we obtain a Bernoulli equation.

- Second method

If y_1 and $y_2$are two particular solutions of the Riccati equation $y' = a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x)$, then we get the solution in the form :

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{\int a(x)(y_2 - y_1)dx}$$

where C is a real constant.

- Third method

We put $y = -\frac{z'}{a(x)z}$ and we get that $z'' + A(x)\,z' + B(x)\,z = 0$.

- Fourth method

We put $y = \frac{1}{A(x)u(x)+B(x)}$ and we choose A and B in such a way that the Riccati equation is written in the form $u' = u^2 + v(x)$ and by applying the third method by setting $u = -\frac{z'}{z}$, we get the Sturm equation $z'' + v(x)\,z = 0$.

Etablissement des équations différentielles des familles de courbes.

Soit $y = \varphi(x, C)$ une famille de courbes dépendant d'un paramétre C.En dérivant par rapport à x on obtient $y' = \varphi'((x, C))$ .On élimine C entre ces deux équations on obtient une équation différentielle de la forme $F(x, y, y') = 0$.Si une famille de courbes à un parametre est définie par une équation $\Phi(x, y, C) = 0$,l'équation différentielle de cette famille sera obtenue en éliminant C entre les deux équations $\Phi(x, y, C) = 0$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y' \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$.

Soit maintenant une relation $\Phi(x, y, C_1, C_2, ...C_n) = 0$.On dérive n fois par rapport à x et en éliminant $C_1, C_2, ...C_n$ entre cette équation et les dérivées obtenues on trouve $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ qui est l'équation cherchée.

Exemple : $\frac{x^2}{C^2} - \frac{y^2}{1} = 1$.

En dérivant par rapport à x on trouve $\frac{2x}{C^2} - 2yy' = 0, \Rightarrow yy' = \frac{x}{C^2} \Rightarrow xyy' = \frac{x^2}{C^2} = 1 + y^2$ et l'équation ainsi obtenue est donnée par : $xyy' = 1 + y^2$.

Problèmes sur les trajectoires $\Phi(x, y, C) = 0$.

(1) **Trajectoires orthogonales :** On établie l'équation différentielle de la famille donnée $F(x, y, y') = 0$. L'équation différentielle de la famille orthogonale est donnée par $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$.

(2)**Trajectoires isogonales faisant un angle** α **tel que** $\tan \alpha = k$

On établie l'équation différentielle de la famille donnée $F(x, y, y') = 0$. L'équation différentielle de la famille isogonale est donnée par $F\left(x, y, \frac{y'-k}{1+ky'}\right) = 0$ .Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$alors $k \to \infty$ et $\frac{y'-k}{1+ky'} \to -\frac{1}{y'}$ et on obtient les trajectoires orthogonales.

Exemple 1 :Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de lignes $y = kx$

$y = kx \Rightarrow y' = k \Rightarrow y = xy'$,ainsi l'équation de la famille est $y - xy' = 0$,donc $F(x, y, y') = y - xy'$ et l'équation de la famille orthogonale est $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 = y + \frac{x}{y'} \Rightarrow yy' + x = 0$,ie $x^2 + y^2 = C^2$,donc on a une famille de cercles centrés à l'origine et de rayon $|C|$.

Exemple 2 : $x^2 + y^2 = 2ax, (x-1)^2 + y^2 = a^2$,

$2x + 2yy' - 2a = 0 \Rightarrow x + yy' - a = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x(x + yy') \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$.

On remplace y' par $-\frac{1}{y'} \Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$, c'est une équation homogèneet sa solution est $x^2 + y^2 = Cy$ qui sont exactement des cercles dont les centres sont sur l'axe (oy) et qui sont tangents à l'axe (ox).

Solutions maximales et globales : $y' = f(x, y)$ avec $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

Si $(y_1, I_1), (y_2, I_2)$ sont deux solutions de l'équation,on dit que (y_2, I_2) est un prolongement de (y_1, I_1) si $I_1 \subset I_2$ et $\forall x \in I_1$,on a $y_1(x) = y_2(x)$.

- On dit que que la solution $(y,\ I)$ est maximale si elle n'admet pas de prolongement.
- On dit que que la solution $(y,\ I)$ est une solution globale sielleest définie dans I tout entier.

- Remarque : globale $\Rightarrow$ maximale mais la réciproque est fausse en générale.

Exemple : $y' = y^2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{C-x}$, et $y(x) = 0$,
On a donc
$y_1(x) = 0$ est globale et par conséquent maximale.
$y_2(x) = \frac{1}{C-x}$ sur $]C, +\infty[$ est maximale mais non globale
$y_3(x) = \frac{1}{C-x}$ sur $]-\infty, C[$, est maximale mais non globale .
Solutions singulières
Soit $F(x, y, y') = 0$ .On dit que que la solution $y = \varphi(x)$ est singulière s'il n'y a d'unicité en aucun de ses points ie si par chacun de ses points (x_0, y_0) il passe en plus de cette solution encore une autre solution qui a au point (x_0, y_0) la même tangente que la que la solution $y = \varphi(x)$ mais qui ne coincide pas avec cette solution dans un voisinage aussi petit que l'on veut du point (x_0, y_0) .Le graphique de cette solution s'appelle courbe intégrale singulière.
Méthodes pour trouver les solutions singulières

- Toute solution singulière vérifie aussi l'équation $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$, donc pour trouver la solution singulière il faut éliminer y' entre les équations :$F(x, y, y') = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$,et l'équation ainsi obtenue est $\varphi(x, y) = 0$.
- Interprétation géométrique : La courbe intégrale s'appelle enveloppe.L'unicité n'est verifiée en aucun point de cette courbe.Si $\Phi(x, y, C) = 0$ est l'intégrale générale de l'équation donnée ,l'enveloppe de la famille de courbes si elle existe sera une courbe intégrale singulière de cette équation.Pour trouver l'enveloppe on élimine C dans les deux équations $\Phi(x, y, C) = 0$,et $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$.

Exemple : $xy' + y'^2 - y = 0$
(1) $F(x, y, y') = xy' + y'^2 - y$
$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = x + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{2}$,et $y(x) = -\frac{x^2}{4}$.
(2) $y_G(x) = Cx + C^2 \Rightarrow \frac{\partial y_G}{\partial C} = x + 2C = 0 \Rightarrow C = -\frac{x}{2} \Rightarrow y_S(x) = -\frac{x^2}{4}$.
Soit (x_0, y_0) et $y_1(x) = Cx + C^2, y_2(x) = -\frac{x^2}{4}$.De la définition d'une solution singulière on a le système :

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cx_0 + C^2 = -\frac{x_0^2}{4} \\ C = -\frac{x_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{on a une identité.}$$

Ainsi en tout point de la courbe $y(x) = -\frac{x^2}{4}$ il existe une autre courbe $y_1(x) = -\frac{x_0}{2}x + \frac{x_0^2}{4}$qui lui est tangente

Serie 2

Exercice 1: Equations à variables séparables et équations s'y ramenant :

- $(3e^x \tan y)\, dx + (2 - e^x)\, \frac{1}{\cos^2 x} dy = 0$
- $(1 + e^x)\, yy' = e^x$ avec $y(0) = 1$
- $y' \sin x = y \ln y$ avec $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ puis $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $x^3 y' \sin y = 2$ avec $y \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to \infty$
- Trouver l'équation d'une courbe passant par le point $(0, -2)$ et telle que la pente de la tangente

en chaque point soit égale à l'ordonné de ce point augmentéé de 3.
Exercice 2 : Equations homogènes et équations s'y ramenant :

- $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$
- $(x + y - 2)\, dx + (x - y + 4)\, dy = 0$
- $(x + y + 1)\, dx + (2x + 2y - 1)\, dy = 0$
- $\left(x^2 y^2 - 1\right) dy + 2xy^3 dx = 0$.On pose : $y = z^\alpha$

Exercice 3 : Edo linéaires

- $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
- $y' = \frac{1}{2x - y^2}$
- $x(x - 1)\, y' + y = x^2 (2x - 1)$ avec $y(2) = 4$
- Trouver la solution générale de $y' + p(x)\, y = q(x)$ connaissant deux solutions particulières $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

Exercice 4 : Edo de Bernoulli

- $y' - xy = -xy^3$
- $xy' + y + y^2 \ln x$
- $x \int_0^x y(t)\, dt = (x + 1) \int_0^x ty(t)\, dt$
- $y(x) = e^x + \int_0^x y(t)\, dt.$

Exercice 5 : Equations aux différentielles totales:

- $\left(x^3 + xy^2\right) dx + \left(y^3 + yx^2\right) dy = 0.$
- $x\left(2x^2 + y^2\right) + yy'\left(2y^2 + x^2\right) = 0.$
- $\left(3x + 2y + y^2\right) dx + \left(x + 4xy + 5y^2\right) dy = 0$. Trouver un facteur intégrant de la forme $\mu = \phi\left(x + y^2\right)$

Exercice 6 : Edo non résolues par rapport à la dérivée:

- $yy'^2 + (x - y)\, y' = x.$
- $2y'^2 - 2xy' - 2y + x^2 = 0.$
- $y = y'^2 + y'^3.$
- $y^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1.$
- $x = y' + y'^2.$
- $y = y'^2 e^{y'}.$
- $x = y'^2 - 2y' + 2.$
- $y' = e^{\frac{y'}{y}}$

Exercice 7 : Edo de Lagrange et Clairaut:

- $y = 2xy' + \ln y'.$
- $y = xy' + \frac{1}{y'}.$
- $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}.$
- $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$

Exercice 8 : Edo de Riccati:

- $y' - y^2 + 2ye^x = e^{2x} + e^x$ avec $y_1(x) = e^x$ solution particulière .
- $y' = \frac{1}{x^4} - y^2$ avec $y_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ et $y_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ solutions particulières.
- $x^2 y = x^2 y^2 + xy + 1$ avec $y_1(x) = -\frac{1}{x}$ solution particulière.

Exercice 9: Etablissement des Edo pour les courbes suivantes :

- $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1.$
- $y = a\left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)$
- $y = ax^2 + bx + c$

- $y^2 = 2ax + a^2$
- $y = a \sin(x + b)$
- Former l'équation différentielle de la famille de droite passant à

une distance égale à l'unité de l'origine.
Exercice 10 :Trajectoires orthogonales pour les familles:

- $y = kx$.
- $x^2 + y^2 = 2ax$.
- $y = ax^2$.

Exercice 11 : Solutions singulières pour les equations :

- $xy' + y'^2 - y = 0$
- $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$, avec $(x\langle 0)$
- $2y(y' + 2) - xy'^2 = 0$
- $y'^2 = 4x^2$
- $y'^2 (2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$
- $3y = 2xy' - \frac{2}{x}y'^2$

Chapitre 3 : Equations différentielles ordinaires d'ordre 2 et plus

Notions fondamentales et définitions

- Une équation différentielle d'ordre n est de la forme $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$,ou si elle est résolue par rapport à $y^{(n)}$: $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$.
- Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y = \varphi(x)$ qui vérifie $y(x_0) = y_{0,}\ y'(x_0) = y'_{0,}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,}^{n-1}$.
- Théorème d'existence et d'unicité:

Si la fonction f :
(a) est continue par rapport à $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ dans D.
(b) possède dans D des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$,
Alors il existe un intervalle $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ dans lequel l'équation une solution unique vérifiant :
$y(x_0) = y_{0,}\ y'(x_0) = y'_{0,}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,}^{n-1}$.

- Pour $n = 2$ on a : $y^{''} = f(x, y, y')$ et $y(x_0) = y_{0,}\ y'(x_0) = y'_{0,}$.
- Exemple : $y'' = \sin y' + e^{-x^2 y}$,et $y(x_0) = y_{0,}\ y'(x_0) = y'_{0,}$.

$f(x, y, y') = \sin y' + e^{-x^2 y}$ est une fonction définie et continue pour toutes les valeurs de x, y, y'.Ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$ sont partout continues et bornées par suite il existe une solution unique qui satisfait à ces conditions.

- On appelle solution générale $y = \varphi(x, C_1, C_1, ..., C_{n,}) = 0$.Si on donne des valeurs pour $C_1, C_1, ..., C_{n,}$ on obtient une solution particulière.
- $\Phi(x, y, C_1, C_1, ..., C_{n,}) = 0$ s'appelle intégrale générale de cette équation et son graphique s'appelle courbe intégrale.

Exemple 1 : $y(x) = C_1 x + C_2$ est solution de l'équation différentielle du second ordre : $y'' = 0, y(x_0) = y_{0,}\ y'(x_0) = y'_{0,} \Rightarrow y_0 = C_1 x_0 + C_2$ et $C_1 = y'_{0,} \Rightarrow C_1 = y'_{0,}$et $C_2 = -y'_{0,} x_0 + y_0$
$\Rightarrow$

$$y(x) = y'_0 x - -y'_{0,} x_0 + y_0$$

géométriquement :Par chaque point donné $M_0(x_0, y_0)$,du plan xoy il ne passe qu'une seule courbe dont la pente de la tangente a la même valeur donnée $y'_{0,}$.

Exemple 2 : $y'' = 2\sqrt{y'}$ possède deux solutions $y_1(x) = 0$,et $y_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$ qui vérifient toutes les deux $y(x) = y'(0) = 0$.

Pourquoi ce résultat n'est-il pas en contradiction avec le théorème d'existence et d'unicité?.

on a $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y'}}$ qui n'est pas continue en 0.

Equations différentielles admettant un abaissement de l'ordre

(1) : $y^{(n)} = f(x)$. On intégre n fois et on obtient :$y = \int\int .... \int f(x)\, dxdxdx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_{(n-1)}x + C_n$.

(2) : **Lorsque l'équation ne contient ni y ni ses dérivées jusqu'à l'ordre** $(k-1)$ **y compris :** $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$.Dans ce cas l'ordre peut être réduit de k unités par la substitution $y^{(k)} = p$,et l'équation s'écrit : $F\left(x, p, p', ..., p^{(n-k)}\right) = 0$,on déduit : $p = f\left(x, C_1, C_1, ..., C_{(n-k),}\right)$, et on intègre k fois pour obtenir : $y^{(k)} = f\left(x, C_1, C_1, ..., C_{(n-k),}\right)$.

(3) **Léquation ne contient pas la variable** x : $F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$.Dans ce cas on pose : $y' = \frac{dy}{dx} = p$,donc $dy = pdx$ et $y\prime = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \frac{dy}{dx} + p^2\frac{d^2p}{dy^2} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$.

(4) **L'équation** $F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ **est homogène ie** $F\left(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}\right) = t^k F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)$.

Dans ce cas l'ordre d'une telle équation peut être abaissé d'une unité par la sibstitution : $y = e^{\int zdx}$,où z est une nouvelle fonction inconnue de x.

(5) **Léquation écrite en différentielle** $F\left(x, y, dx, dy.d^2y, .., d^ny\right) = 0$,**avec** F **une fonction homogène par rapport à** $x, ydx, dy, ...d^ny$.

Si on considère que x et dx sont du premier degré et $y, dy.d^2y, .., d^ny$,sont de degré m ,alors $\frac{dy}{dx}$sera de degré $(m-1)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ de degré $(m-2)$, etc.Pour abaisser l'ordre on pose $x = e^t, y = ue^{mt}$, ainsi on obtient une équation différentielle entre u et t qui ne contient pas $t$sous forme explicite .

Exemple 1 : $y''' = \sin x + \cos x$

$y'' = -\cos x + \sin x + C_1$

$y' = -\sin x - \cos x + C_1x + C_2$

$y = \cos x - \sin x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$.

Exemple 2 : $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$, $y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 2$.

$y'' = \int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1$,

$y' = -\frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x + C_1x + C_2$,

$y(x) = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$,

Les conditions initiales donnent : $\frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0, C_1 + C_2 = 1, -1 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 3, C_2 = -2, C_3 = \frac{1}{2}$,et la solution est donnée par : $y_p(x) = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.

Exemple 3 : $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$.

On pose : $y'' = p \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \sqrt{1+p^2}$

$\Rightarrow p = \frac{e^{(x+C_1)} - -e^{-(x+C_1)}}{2}$

$\Rightarrow y' = \frac{e^{(x+C_1)} + e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2$,

$\Rightarrow y(x) = \frac{e^{(x+C_1)} - -e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2x + C_3 = \sinh(x + C_1) + C_2x + C_3$.

Exemple 4 : $xy^{(V)} - y^{(IV)} = 0$.

Elle ne contient pas de fonction cherchée y ni ses dérivées y', y'', y'''.

On pose : $y^{(IV)} = p \Rightarrow xp' - p = 0 \Rightarrow p = C_1x$.

$y^{(IV)} = C_1 x$
$\Rightarrow y''' = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$
$\Rightarrow y'' = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2 x + C_3$
$\Rightarrow y' = \frac{C_1}{24}x^4 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$
$\Rightarrow y(x) = \frac{C_1}{120}x^5 + \frac{C_2}{6}x^3 + \frac{C_3}{2}x^2 + C_4 x + C_5,$
$\Rightarrow$

$$y(x) \quad = \alpha_1 x^5 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \in \mathbb{R}$$

Exemple 5 : $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

L'équation ne contient pas x,on pose : $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$,et on trouve une équation de Bernoulli $p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$.

On pose $z = p^2$,et on obtient une équation linéaire $\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y}$,dont la solution générale est $z = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}$.

En remplaçant z par $p^2 = y'^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}.} \Rightarrow x + C_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1}$,et on trouve à la fin que :

$$e^y + \tilde{C}_1 = (x + C_2)^2$$

Exemple 6 : $x^2 y y'' = (y - xy')^2$.

L'équation est homogène par rapport à y, y' et y'',L'ordre se trouve réduit d'une unité en posant :

$y = e^{\int z dx} \Rightarrow y' = z e^{\int z dx}$ et $y'' = \left(z' + z^2\right) e^{\int z dx}$.

En remplaçant l'équation devient : $x^2 \left(e^{\int z dx}\right) . \left(z' + z^2\right) \left(e^{\int z dx}\right) = \left(e^{\int z dx} - x z e^{\int z dx}\right)^2$.

Après simplification on trouve l'équation linéaire :

$x^2 z' + 2xz = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$
$\left(x^2 z\right)' = 1 \Rightarrow x^2 z = x + C_1 \Rightarrow z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$
$\Rightarrow \int z dz = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right) dx = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln C_2$
$\Rightarrow$

$$y(x) = e^{\int z dx} = e^{\ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln C_2} = C_2 |x| e^{-\frac{C_1}{x}} = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$$

Exemples 7 : $x^3 y'' = (y - xy')^2$ .C'est une équation homogène généralisée.

En considérant x, y, y' et y''comme étant de degré $1, m, m-1, m-2$, on trouve

$3 + m - 2 = 2m \Rightarrow m = 1$. On pose alors $x = e^t$ et $y = ue^t$ et on obtient :

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{du}{dt} + u\right)e^t}{e^t} = \frac{du}{dt} + u,$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}}{e^t} = e^{-t}\left(\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}\right),$

On remplace ,on trouve après simplification $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{dt}\right)^2$ ou $y'' + y' = y'^2$.

En posant $p = \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2} = p\frac{dp}{du}$,on obtient $p\frac{dp}{du} + p = p^2$,d'où : $p = 0$ et $\frac{dp}{du} + 1 = p$.

L'intégration de $\frac{dp}{du}+1=p \Rightarrow p=1+C_1e^u \Rightarrow \frac{du}{dt}=1+C_1e^u \Rightarrow u=\ln\frac{e^t}{C_2+C_1e^t}$.

En revenant aux variables x et y, on obtient $y(x)=x\ln\frac{x}{C_2+C_1x}$.

Le cas $p=0$ donne $u=C$ ou $y=Cx$ qui est une solution particulière obtenue pour $C_1=e^{-C}$ et $C_2=0$.

Remarque : En résolvant le problème de Cauchy pour les équations d'ordre supérieur il est raisonable de déterminer les constantes.

Exemple 8 : $y''=2y^3, y(0)=1, y'(0)=1$,

$y'=p \Rightarrow p\frac{dp}{dy}=2y^3 \Rightarrow pdp=2y^3dy \Rightarrow \frac{p^2}{2}=\frac{y^4}{2}+C$

$\Rightarrow p^2=y^4+C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sqrt{y^4+C_1}$

$\Rightarrow x+C_2=\pm\int\frac{1}{\sqrt{y^4+C_1}}dy$,

qui est impossible de intégrer mais si on on utilise $y(0)=1, y'(0)=1$,

$\Rightarrow 1=\sqrt{1+C_1} \Rightarrow C_1=0$,et on aura : $\frac{dy}{dx}=\pm y^2$,on obtient : $\frac{dy}{y^2}=\pm dx$,et aprés intégration on trouve:

$y_1(x)=\frac{1}{1-x}$et $y_2(x)=\frac{1}{1+x}$.

De plus on a :

$y_1(x)=\frac{1}{1-x} \Rightarrow y_1'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y_1''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=2y^3$ avec $y_1(0)=1, y_1'(0)=1$

$y_2(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow y_2'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow y_2''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}=2y^3$ avec $y_2(0)=1, y_2'(0)=-1$

qui ne convient pas .

Equations différentielles linéaires d'ordre n

Indépendance linéaire : Soit donné un système fini de n fonctions $y_1,,,,,y_n$.

Ces fonctions sont linéairement dépendants sur l'intervalle $[a,b]$ s'il existe des costantes $\alpha_1,,,,,\alpha_n$ non toutes nulles et telles que $\forall x\in[a,b]$ on ait l'identité $\alpha_1y_1+.......+\alpha_ny_n=0$.

Si cette identité n'est vérifiée que pour $\alpha_1=..=\alpha_n=0$ alors les fonctions sont linéairement indépendantes sur l'intervalle $[a,b]$.

Exemple 1 : $1,x,x^2,x^3$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$.Soit l'équation $\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\alpha_4x^3=0$.

Posons $x=0 \Rightarrow \alpha_1=0$, dérivons par rapport à x et posons $x=0$ on trouve $\alpha_2=0$,dérivons par rapport à x et posons $x=0$ on trouve $\alpha_3=0$,dérivons par rapport à x et posons $x=0$ on trouve $\alpha_4=0$,donc $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ et les fonctions $1,x,x^2,x^3$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : e^x,e^{2x},e^{3x}, sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$.

Soit l'équation $\alpha_1e^x+\alpha_2e^{2x}+\alpha_3e^{3x}=0$.On a : $\alpha_1+\alpha_2e^x+\alpha_3e^{2x}=0$.Dérivons par rapport à $x \Rightarrow \alpha_2e^x+2\alpha_3e^{2x}=0 \Rightarrow \alpha_2+2\alpha_3e^x=0$,Dérivons par rapport à $x \Rightarrow 2\alpha_3e^x=0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.et les fonctions e^x,e^{2x},e^{3x} sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 : $e^x\sin x, e^x\cos x$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$.

Soit l'équation $\alpha_1e^x\sin x+\alpha_2e^x\sin x=0. \Rightarrow \alpha_1\sin x+\alpha_2\sin x=0$.On pose $x=0$ puis $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_2=0$ et $\alpha_1=0$ et les fonctions $e^x\sin x, e^x\cos x$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4 : $\sin x, \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$,sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$.

Soit l'équation $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) + \alpha_3 \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) = 0$.On pose $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ puis $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_2 \sin\frac{\pi}{8} - \alpha_3 \sin\frac{\pi}{8} = 0, \\ \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \alpha_2 \sin\frac{3\pi}{8} + \alpha_3 \sin\frac{\pi}{8} = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin\frac{5\pi}{8} + \alpha_3 \sin\frac{3\pi}{8} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \cos\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ une une infinité de solutions par exemple $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ et $\alpha_1 = -2\cos\frac{\pi}{8}$,ainsi les trois fonctions sont linéairement dépendantes.

Remarque : Deux fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si le rapport $\frac{y_1}{y_2}$n'est pas constant.

Exemple 5 :$\cdot \frac{\tan x}{\cot x} = \tan^2 x$ n'est pas constant sur $0 \prec x \prec \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow$ les fonction $\tan x$ et $\cot x$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6 : $\cdot \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2 \Rightarrow$ les fonctions $\sin 2x$ et $\sin x \cos x$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{R}$.

Exemple 7 : $\cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\frac{\pi}{8}\sin x \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) - 2\cos\frac{\pi}{8}\sin x = 0 \Rightarrow$ les fonctions $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right), \sin x$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{R}$.

Définition: Soient $y_1,,,,,y_n$ n fonctions possédant des dérivées d'ordre $(n-1)$ .Le déterminant :

$$\mathrm{W}(y_1,,,,,y_n) = \begin{vmatrix} y_1,,,,,y_n \\ y_1',,,,,y'_n \\ ' \\ ' \\ y_1^{(n-1)},,,,,y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \text{ s'appelle Wronskien.}$$

Exemple 1 :$\cdot$ $e^x, e^{2x}, e^{3x} \Rightarrow W(y_1,y_2,y_3) = \begin{vmatrix} e^x, e^{2x}, e^{3x} \\ e^x, 2e^{2x}, 3e^{3x} \\ e^x, 4e^{2x}, 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x}$

Exemple 2 : $\cdot \sin x, \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

$$\Rightarrow W(y_1,y_2,y_3) = \begin{vmatrix} \sin x, \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos x, \cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin x, -\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right), -\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Théorème :

Si un systéme de fonctions $y_1,,,,,y_n$ est linéairement dépendant sur l'intervalle $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ alors le Wronskien est isdentiquement nul.

$\cdot$ Cette condition est nécessaire mais non suffisante.

Exemple :

$$y_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}, y_2(x) = \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Ce systéme est linéairement indépendant car $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Pourtant :

Sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ $W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} 0, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \\ 0, 2x-1 \end{vmatrix} = 0$.

Sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ $W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2, 0 \\ 2x-1, 0 \end{vmatrix} = 0$.

Ainsi $W(y_1,y_2) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Définition : Soit donné un systéme de fonctions $(y_1,,,,,y_n)$ définies sur l'intervalle $[a,b]$.

Posons **:** $(y_i,y_j) = \int_a^b y_i(x)\,y_j(x)\,dx$ pour $i,j = 1,2,3,,,,,,n.$

Le déterminant $\Gamma(y_1,,,y_n) = \begin{vmatrix} (y_1,y_1),(y_1,y_2),,,(y_1,y_n) \\ (y_2,y_1),(y_2,y_2),,,(y_2,y_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ (y_n,y_1),(y_n,y_2),,,(y_n,y_n) \end{vmatrix}$,

s'appelle déterminant de Gram.

- Théorème :

Le systéme de fonctions $(\mathbf{y}_1,,,,,\mathbf{y}_n)$ est linéairement indépendant si et seulement si Γ est non nul.

Exemple : $\mathbf{y}_1 = x, \mathbf{y}_2 = 2x$.

$(y_1,y_1) = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$

$(y_1,y_2) = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}$

$(y_2,y_1) = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}$

$(y_2,y_2) = \int_0^1 4x^2dx = \frac{4}{3}$

$\Gamma(x,2x) = \begin{vmatrix} (x,x),(x,2x) \\ (2x,x),(2x,2x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0,$

Par conséquent les fonctions $\mathbf{y}_1 = x, \mathbf{y}_2 = 2x$,sont linéairement dépendantes :$\frac{\mathbf{y}_2.}{\mathbf{y}_1} = \frac{\mathbf{2x.}}{\mathbf{x}} = 2.$

Equations linéaires homogènes à coêfficients constants.

Considérons l'équation $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots\dots + a_{(n-1)}y' + a_ny = 0, a_i \in \mathbb{R}.$

$\cdot$ Cherchons son équation caractéristique $P(\lambda) = a_0\lambda^{n;} + a_1\lambda^{n-1} + \dots\dots + a_{(n-1)}\lambda + a_n.$

$\cdot$ Cherchons les racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots\lambda_n$.

$\cdot$ D'après la nature des racines écrivant la solution particulière .

(a) A chaque racine réelle simple λ,correspond la solution : $e^{\lambda x}$.

(b) A chaque couple de racines conjuguées simples $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ correspondent les solutions: $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x.$

(c) A chaque racine réelle λ de multiplicité s correspondent les s solutions: $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots\dots, x^{(s-1)}e^{\lambda x}$.

(d) A chaque couple de racines conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, de multiplicité s correspondent $2s$ solutions:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots\dots\dots, x^{(s-1)}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots\dots\dots, x^{(s-1)}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Le nombre de solutions particulières ainsi construites est égal à l'ordre de cette équation.Toutes les solutions contruites sont linéairement indépendantes et forment un systéme fondamental de solutions.

Exemple 1 : $y''' - 2y'' - 3y' = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$

$\Rightarrow y_1 = 1, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{3x}$

$\Rightarrow$

$$y_{g.h} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$$

Exemple 2 : $y''' + 2y'' + y' = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$\Rightarrow y_1 = 1, y_2 = e^{-x}, y_3 = xe^{-x}$

$\Rightarrow$

$$y_{g.h} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$$

Exemple 3 : $y''' + 4y'' + 13y' = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 + 3i, \lambda_3 = -2 - 3i$

$\Rightarrow y_1 = 1, y_2 = \cos 3x e^{-2x}, y_3 = \sin 3x e^{-2x}$

$\Rightarrow$

$$y_{gh} = C_1 + C_2 \cos 3x e^{-2x} + C_3 \sin 3x e^{-2x}$$

Exemple 4 : $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 2)\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = i, \lambda_4 = \lambda_5 = -i$

$\Rightarrow y_1 = e^{2x}, y_2 = \cos x, y_3 = x \cos x, y_4 = \sin x, y_5 = x \sin x$

$\Rightarrow$

$$y_{gh} = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x$$

Exemple 5 : $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0, \Rightarrow \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$

$\Rightarrow \left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i,$

$\Rightarrow y_1 = e^{-x} \cos x, y_2 = e^{-x} x \cos x, y_3 = e^{-x} \sin x, y_4 = e^{-x} x \sin x,$

$\Rightarrow$

$$y_{gh} = e^{-x} (C_1 + C_2 x) \cos x + e^{-x} (C_3 + C_4 x) \sin x$$

Equations linéaires non homogènes à coêfficients constants

Considérons l'équation $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{(n-1)} y' + a_n y = f(x)$.

Théorème :

La solution générale de cette équation y_G est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène y_{gh} et d'une solution particulière de l'équation avec second membre y_{pn} :

$$y_G = y_{gh} + y_{pn}$$

Problème : Comment chercher une solution particulière ? .On a deux méthodes

· (1)Variation des constantes.

· (2)Pour les seconds membres de forme spéciale la solution particulière peut être obtenue plus simplement par la méthode des coêfficients indéterminés.La forme générale pour laquelle on peut appliquer cette méthode est :

$$f(x) = e^{\alpha x} \left(P_l(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x\right)$$

avec P_l polynôme de degré l, Q_m polynôme de degré m.

Dans ce cas on cherche y_{pn} sous la forme :

$y_{pn} = x^s e^{\alpha x} \left(\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x \right)$,où $k = \max(l, m)$, $\tilde{P}_k$ et $\tilde{Q}_k$ des polynômes de degré k et s est la multiplicité de la racine $\lambda = \alpha + i\beta$ de l'équation caractéristique .Si $\alpha \pm i\beta$ n'est pas racine alors $s = 0$.

Exemple 1 : $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 (\lambda - 1) + (\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \left(\lambda^2 + 1\right)(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$

$\Rightarrow y_1 = e^{-x} \cos x, y_2 = e^{-x} x \cos x, y_3 = e^{-x} \sin x, y_4 = e^{-x} x \sin x,$

$\Rightarrow y_{gh} = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

$\Rightarrow y_{pn} = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, y'_{pn} = 2A_0 x + A_1, y''_{pn} = 2A_0.$

Après avoir remplacé dans l'équation donnée on trouve :$y_{pn} = -x^2 - 3x - 1$ et

$$y_G = -x^2 - 3x - 1 + C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

Exemple 2 : $y''' - y'' = 12x^2 + 6x \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2 (\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$

$\Rightarrow y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^x,$

$\Rightarrow y_{gh} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$

Le nombre $0 = \alpha + i\beta$ est solution de l'équation caractéristique donc : $y_{pn} = x^2 \left(A_0 x^2 + A_1 x + A_2\right) = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2$

$\Rightarrow y'_{pn} = 4A_0 x^3 + 3A_1 x^2 + 2A_2 x, y''_{pn} = 12A_0 x^2 + 6A_1 x + 2A_2, y'''_{pn} = 24A_0 x + 6A_1.$

$D^\circ (y''' - y'') = \sup(n - 2, n - 3) = n - 2 = 2 \Rightarrow n = 4,$

En introduisant dans l'équation donnée on trouve $y_{pn} = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$ et

$$y_G = -x^4 - 5x^3 - 15x^2 + C_1 + C_2 x + C_3 e^x$$

Exemple 3 : $y'' + y' = 4x^2 e^x$.

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = e^{-x}, \Rightarrow$

$$y_{gh} = C_1 + C_2 e^{-x},$$

et puisque $\alpha = 1$,n'est pas racine de l'équation caractéristique la solution particulière y_{pn} de l'équation non homogène sera de la forme : $y_{pn} = \left(A_1 x^2 + A_2 x + A_3\right) e^x$.

En dérivant et en remplaçant dans l'équation donnée on trouve :

$A_1 = 2, A_2 = -6, A_3 = 7. \Rightarrow y_{pn} = \left(2x^2 - 6x + 7\right) e^x \Rightarrow$

$$y_G = \left(2x^2 - 6x + 7\right) e^x + C_1 + C_2 e^{-x}$$

Exemple 4 : $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x} \Rightarrow \lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -5$

$\Rightarrow y_1 = e^{-5x}, y_2 = xe^{-5x} \Rightarrow y_{gh} = (C_1 + C_2 x) e^{-5x},$

et puisque $\alpha = -5$ est racine de multiplicité $s = 2$ de l'équation caractéristique la solution y_{pn} sera cherchée sous la forme :$y_{pn} = Bx^2 e^{-5x}$

$\Rightarrow y'_{pn} = B\left(2x - 5x^2\right) e^{-5x}, y''_{pn} = B\left(2 - 20x + 25x^2\right) e^{-5x}.$

En remplaçant dans l'équation on trouve :$y_{pn} = 2x^2 e^{-5x}$
$\Rightarrow$

$$y_G = 2x^2 e^{-5x} + (C_1 + C_2 x) e^{-5x}$$

Exemple 5 : $y'' + 3y' + 2y = x \sin x \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$
$\Rightarrow y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-2x}, \Rightarrow y_{gh} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x},$

Puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique la solution y_{pn} sera cherchée sous la forme : $y_{pn} = (A_1 x + A_2) \cos x + (B_1 x + B_2) \sin x$,après identification on trouve :

$y_{pn} = \left(\frac{-3}{10} x + \frac{17}{30}\right) \cos x + \left(\frac{1}{10} x + \frac{3}{25}\right) \sin x$, et on trouve enfin :

$$y_G = \left(\frac{-3}{10} x + \frac{17}{30}\right) \cos x + \left(\frac{1}{10} x + \frac{3}{25}\right) \sin x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Exemple 6 : $y'' + 4y = \sin 2x \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i$
$\Rightarrow y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x, \Rightarrow y_{gh} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$

Pour y_{pn} on pose $y_{pn} = x (a \sin 2x + b \cos 2x)$,après dérivation et identification on trouve :

$y_{pn} = -\frac{1}{4} x \cos 2x \Rightarrow$

$$y_G = -\frac{1}{4} x \cos 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Tableau récapitulatif de formes des solutions particulières pour les différentes formes des seconds membres

$N°$	Second membre	Racine de l'équation caractéristique	Forme de la solution particulière
I	$P_n(x)$	(1), 0 n'est pas racine (2), 0 racine de multiplicité s	$(1)\ \tilde{P}_n(x)$ $(2)\ x^s \tilde{P}_n(x)$
II	$P_n(x) e^{\alpha x}$	(1), α n'est pas racine (2), α racine de multiplicité s	$(1)\ \tilde{P}_n(x) e^{\alpha x}$ $(2)\ x^s \tilde{P}_n(x) e^{\alpha x}$
III	$P_n(x) \cos \beta x$ $+Q_m(x) \sin \beta x$	(1), $\pm i\beta$ n'est pas racine (2), $\pm i\beta$ racine de multiplicité s	$(1)\ \tilde{P}_k(x) \cos \beta x$ $+Q_k(x) \sin \beta x$ $(2)\ x^s \tilde{P}_k(x) \cos \beta x$ $x^s Q_k(x) \sin \beta x$
IV	$e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x$ $+e^{\alpha x} Q_m(x) \sin \beta x$	(1), $\alpha + i\beta$ n'est pas racine (2), $\alpha + i\beta$ racine de multiplicité s	$(1)\ e^{\alpha x} \tilde{P}_k(x) \cos \beta x$ $+e^{\alpha x} \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x$ $(2)\ x^s e^{\alpha x} \tilde{P}_k(x) \cos \beta x$ $+x^s e^{\alpha x} \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x$

· Les cas $(I), (II)$ et (III) sont des cas particuliers de (IV)

Principe de superposition

Si y_k est une solution particulière de l'équation $a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_n(x) y = f_k, k = 1, 2, \ldots.n$,alors $y_1 + y_2 + \ldots\ldots y_n$, est solution de l'équation $a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_n(x) y = f_1 + f_1 + \ldots\ldots f_n, .$

Exemple 1 : $y'' - 6y + 9y = 4e^{x} - 16e^{3x}$
$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$
$\Rightarrow y_{gh} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$,

Pour trouver une solution particulière on cherche une solutions particulière pour chacune des équations suivantes:
(1) $y'' - 6y + 9y = 4e^{x} \Rightarrow y_1 = ae^{x} \Rightarrow y_1 = e^{x}$
(2) $y'' - 6y + 9y = -16e^{3x} \Rightarrow y_2 = bx^2 e^{3x} \Rightarrow y_2 = -8x^2 e^{3x}$
$\Rightarrow y_{pn} = y_1 + y_2 = e^{x} - 8x^2 e^{3x}$
$\Rightarrow y_G = e^{x} - 8x^2 e^{3x} + (C_1 + C_2 x) e^{3x}$.

Equations d'Euler

Pour degré n : $a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} + ... + a_{(n-1)} x y' + a_0 y = 0$.

Pour degré 2 : $a_0 x^2 y^{''} + a_1 x y' + a_2 y = 0$.

On pose $x = e^{t}$, et on trouve l'équation

Pour degré n : $b_0 y^{(n)}(t) + b_1 y^{(n-1)}(t) + ... + b_{(n-1)} y'(t) + b_n y(t) = 0. \Rightarrow$ équation d'Euler d'ordre n.

Pour degré 2 : $b_0 y^{''}(t) + b_1 y'(t) + b_2 y(t) = 0. \Rightarrow$ équation d'Euler d'ordre 2.

Exemple : $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$.On pose : $x = e^{t}$
$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{e^{t}} = e^{-t} y'(t)$
$\Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\left(-e^{-t} y'(t) + e^{-t} y''(t)\right) = e^{-2t}\left(-y'(t) + y''(t)\right)$

On remlace et trouve la nouvelle équation : $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0$.
$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$
$\Rightarrow y_{gh} = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} \Rightarrow$

$$y_G = C_1 \left(e^{t}\right)^{-3} + C_2 \left(e^{t}\right)^2 = C_1 x^{-3} + C_2 x^2 = \frac{C_1}{x^3} + C_2 x^2$$

Equations linéaires à coëfficients variables

$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_n(x) y = 0$.

Si on connait une solution $y_1(x)$ on cherche une deuxième $y_2(x) = C(x) y_1(x)$

Pour l'équation d'ordre deux : $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$.

On a : $y_2(x) = C(x) y_1(x)$
$\Rightarrow y_2'(x) = C'(x) y_1(x) + C(x) y_1'(x)$ et $y_2^{''}(x) = C^{''}(x) y_1(x) + 2C'(x) y_1'(x) + C(x) y_1''(x)$,

On remplace dans l'équation on trouve :
$C^{''}(x) y_1(x) + C'(x)\left(2y_1'(x) + p_1 y_1(x)\right) = 0$
$\Rightarrow \frac{C''}{C'} = \frac{2y_1' + p_1 y_1}{y_1} \Rightarrow \int \frac{C''}{C'} dx = \int \frac{2y_1' + p_1 y_1}{y_1} dx$,

et on cherche un C et une fonction $y_2(x)$ qui soit linéairement indépendante avec $y_1(x)$.

Méthode de Lagrange pour l'équation $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x)$.

On a : $y_{gh} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,

Pour trouver y_G on utilise la méthode de Lagrange (variation des constantes) qui suppose les deux constantes sont des fonctions *ie* $y_G = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$,et on trouve le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = f(x) \end{array} \right.$$

On cherche $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$,puis $C_1(x)$ et $C_2(x)$ et on les remplace dans y_G et trouve ainsi la solution générale.

Exemple 1 : $xy'' + 2y' + xy = 0$.

On a une solution $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$,cherchons une deuxième sous la forme :

$y_2(x) = z(x) \frac{\sin x}{x}$. $\Rightarrow y_2'(x) = z'(x)\, y_1(x) + z(x)\, y_1'(x)$ et

$y_2^{''}(x) = z^{''}(x)\, y_1(x) + 2z'(x)\, y_1'(x) + z(x)\, y_1''(x)$.

En remplaçant dans l'équation on trouve l'équation

$z^{''}(x)\, y_1(x) + z'(x)\,(2y_1'(x) + p_1 y_1(x)) = 0$,

$y_1(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y_1'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$

$\Rightarrow z^{''}(x) \sin x + 2z'(x) \cos x = 0 \Rightarrow \frac{z''}{z'} = -2\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \int \frac{z''}{z'} dx = \int -2\frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\Rightarrow (\ln|z| + 2\ln|\sin x|)' = 0 \Rightarrow \ln|z| + 2\ln|\sin x| = \ln C \Rightarrow z' \sin^2 x = C_1 \Rightarrow z' = \frac{C_1}{\sin^2 x}$

$\Rightarrow z = -C_1 \cot x + C_2$,

et par suite $y_2(x) = z(x) \frac{\sin x}{x} = (-C_1 \cot x + C_2) \frac{\sin x}{x} = -C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}$,

on prend par exemple $C_1 = -1$ et $C_2 = 0$ et on aura $y_2(x) = \frac{\cos x}{x}$ et la solution générale est :

$$y_{gh} = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$$

Exemple 2 : $y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x}$.

La solution générale de l'équation homogène est $y_{gh} = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$.

$y_1 = \frac{\sin x}{x}, y_2 = \frac{\cos x}{x}$ est un système fondamental.

On a : $\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$

$\Rightarrow C_1'(x) = \cos x, C_2'(x) = -\sin x \Rightarrow C_1(x) = \sin x + \tilde{C}_1, C_2(x) = \cos x + \tilde{C}_2$
$\Rightarrow$

$$y_G = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}$$

Etablissement d'une équation différentielle

Soient $y_1, y_2, ..., y_n$ linéairement indépendantes sur $[a, b]$ alors l'équation :

$$\left| \begin{array}{c} y_1, y_2, ..., y_n, y \\ y_1', y_2', ..., y_n', y' \\ .... \\ .... \\ .... \\ y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, ..., y_n^{(n)}, y^{(n)} \end{array} \right| = 0$$

est une équation différentielle linéaire dont le système fondamental est exactement $y_1, y_2, ..., y_n$.

Exemple 1 : $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$.

$\cdot W(y_1, y_2) = \left| \begin{array}{c} e^x, e^{-x} \\ e^x, -e^x \end{array} \right| = -2 \neq 0$,donc y_1, y_2 sont linéairement indépendantes.

$\cdot\begin{vmatrix} e^x, e^{-x}, y \\ e^x, -e^{-x}, y' \\ e^x, e^{-x}, y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,1,y \\ 1,-1,y' \\ 1,1,y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,1 \\ 1,-1 \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} 1,1 \\ 1,1 \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} 1,-1 \\ 1,1 \end{vmatrix} y =$
$-2y'' + 2y' = 0,$

est l'équation est :

$$y'' - y = 0$$

Exemple 2 : $y_1 = e^{x^2}, y_2 = e^{-x^2}$.

$\cdot W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{x^2}, e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2}, -2xe^{-x^2} \end{vmatrix} = -4x \neq 0$, pour $x \neq 0$.

$\cdot\begin{vmatrix} e^{x^2}, & e^{-x^2}, & y \\ 2xe^{x^2}, & -2xe^{-x^2}, & y' \\ (2+4x^2)\, e^x & (4x^2-2)\, e^{-x^2}, & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ,1, & y \\ 2x & ,-2x, & y' \\ (2+4x^2) & ,(4x^2-2) & ,y'' \end{vmatrix} =$
0

et on obtient l'équation : $xy'' - y' - 4x^2y = 0$, ou bien $y'' - \frac{y'}{x} - 4xy = 0$.

Intégration par les séries

Soit l'équation $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$.

$y'' + (a_0 + a_1x + ... + a_n)\, y' + (b_0 + b_1x + ... + b_n)\, y = 0$.

On cherche $y(x)$ sous la forme :

$y(x) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} c_kx^k \Rightarrow y'(x) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} kc_kx^{k-1} \Rightarrow$

$y''(x) = \sum_{k=2}^{k=+\infty} k(k-1)\, c_kx^{k-2}$.

On remplace dans l'équation et on obtient :

$\sum_{k=2}^{k=+\infty} k(k-1)\, c_kx^{k-2} + \left(\sum_{k=0}^{k=+\infty} a_kx^k\right)\left(\sum_{k=1}^{k=+\infty} kc_kx^{k-1}\right) +$

$\left(\sum_{k=0}^{k=+\infty} b_kx^k\right)\left(\sum_{k=0}^{k=+\infty} c_kx^k\right) = 0 \Rightarrow$

$(2.1.c_2 + a_0c_1 + b_0c_0)\, x^0 + (3.2c_3 + 2a_0c_2 + a_0c_2 + b_0c_1 + b_1c_0)\, x^1 + (...)\, x^2 +$
$....... + (....)\, x^n = 0,$

En pratique on cherche y_1 et y_2 en choisissant $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$ pour $y_1(x)$ et $c_0 = 0$ et

$c_1 = 1$ pour $y_2(x)$,ce qui est équivalent aux conditions initiales suivantes $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ et $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$,et toute solution sera combinaison de y_1 et y_2.

Si les conditions initiales sont de la forme $y(0) = A, y'(0) = B$,il est évident que :

$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$.

Exemple 1 : $y'' - xy' - 2y = 0$.

$\cdot\, y_1(x) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} c_kx^k \Rightarrow y_1'(x) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} kc_kx^{k-1} \Rightarrow y_1''(x) = \sum_{k=2}^{k=+\infty} k(k-1)\, c_kx^{k-2}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{k=+\infty} k(k-1)\, c_kx^{k-2} - \sum_{k=1}^{k=+\infty} kc_kx^k - 2\sum_{k=0}^{k=+\infty} c_kx^k = 0.$

On pose : $p = k-2 \Rightarrow$

$\sum_{p=0}^{p=+\infty} (p+1)(p+2)\, c_{p+2}x^p - \sum_{k=1}^{k=+\infty} kc_kx^k - 2\sum_{k=0}^{k=+\infty} c_kx^k = 0.$

$\sum_{k=0}^{k=+\infty} (k+1)(k+2)\, c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{k=+\infty} kc_kx^k - 2\sum_{k=0}^{k=+\infty} c_kx^k = 0.$

$(1.2.c_2 - 2c_0) + \sum_{k=1}^{k=+\infty} [(k+1)(k+2)\, c_{k+2} - kc_k - 2c_k]\, x^k = 0$

Posons : $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 1$ et $c_1 = 0$, et on obtient :

$(1.2.c_2 - 2.c_0)\, x^0 + (2.3.c_3 - c_1 - 2.c_1)\, x^1 + ... = 0 \Rightarrow$

$1.2.c_2 - 2c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = c_0 = 1.$
$2.3.c_3 - c_1 - 2.c_1 \Rightarrow c_3 = 0$
$(k+1)(k+2)c_{k+2} - (k+2)c_k = 0 \Rightarrow (k+1)c_{k+2} = c_k \Rightarrow c_{k+2} = \frac{c_k}{(k+1)}.$
$\Rightarrow c_{2k+1} = 0$, et $c_{2k} = \frac{c_{2k-2}}{(2k-1)}$,pour $k = 1, 2, , , , n.$
Ainsi $c_1 = c_3 = ... = c_{2k+1} = 0$ et $c_0 = 1, c_2 = 1, c_4 = \frac{c_2}{3} = \frac{1}{3}, c_6 = \frac{c_4}{5} = \frac{1}{15}$
$\Rightarrow$

$$y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{15}x^6 + ...$$

De façon analogue en prenant
$\cdot\ y_2(x) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} c_k x^k$ avec $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1 \Rightarrow c_0 = 0$ et $c_1 = 1$,
et on obtient après dérivation et remplacement :
$\sum_{k=2}^{k=+\infty} (k)(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{k=+\infty} (k+2)c_k x^k = 0$
$\sum_{k=0}^{k=+\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{k=+\infty} (k+2)c_k x^k = 0$
$\sum_{k=0}^{k=+\infty} [(k+1)c_{k+2} - c_k]x^k = 0 \Rightarrow$
$1.2.c_2 - 2c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = c_0 = 0 \Rightarrow$
$(k+1)c_{k+2} - c_k = 0 \Rightarrow c_{k+2} = \frac{c_k}{(k+1)}$,pour $k = 0, 1, ...$
Donc $c_2 = c_4 = ... = c_{2k} = 0$ et $c_1 = 1, c_3 = \frac{1}{2}, c_5 = \frac{1}{2.4}$,
et on obtient :

$$y_2(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.4}x^5 + .. = x\sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} = xe^{\frac{x^2}{2}},$$

et la solution générale est $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ où $y_1(x)$,$y_2(x)$,
sont données par les formules trouvées et $y(0) = A, y'(0) = B.$
Exemple 2 : $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
On a : $y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + .+ = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n.$
$y'' + y = 0 \Rightarrow y''' = -y' = 0 \Rightarrow y'''' = -y'' = 1 \Rightarrow y^{(2k+1)}(0) = 0$ et $y^{(2k)}(0) = (-1)^k$
$\Rightarrow$

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - ..... + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = \cos x$$

Exemple 3 : $y'' = e^{xy}, y(0) = 1$ et $y'(0) = 0 \Rightarrow$
$y''(0) = 1, y''' = (e^{xy})' = (y + xy')e^{xy} \Rightarrow y'''(0) = 1$
$y'''' = [(y + xy')e^{xy}]' = (y' + y' + xy'')e^{xy} + (y + xy')^2 e^{xy} \Rightarrow y''''(0) = 1 \Rightarrow$

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ...$$

Exemple 4 **:** $y'' - xy' - 2y = 0.$
Posons: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Rightarrow$
$(1.2.c_2 - 2c_0) + \sum_{k=1}^{k=+\infty} (k+2)[(k+1)c_{k+2} - c_k]x^k = 0 \Rightarrow$

$c_2 = c_0, c_{k+2} = \frac{c_k}{k+1}$.
On trouve : $c_0, c_1, c_2 = c_0, c_3 = \frac{c_1}{2}, c_4 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3}$ et

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_0 x^2 + \frac{c_1}{2} x^3 + \frac{c_0}{3} x^4 + \frac{c_1}{4.2} x^5 + ...$$

Série 3 : Edo d'ordre 2 et plus

Exercice 1 : On donne l'équation $y'' = 2\sqrt{y'}$.

- Montrer qu'elle possède deux solutions qui vérifient $y(0) = y'(0) = 0$.
- Pourquoi ce résultat n'est il pas en contradiction avec le théorème d'existence et d'unicité .

Exercice 2 : Intégrer les équations suivantes : Abaissement de l'ordre .

- $y''' = 0$.
- $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$, avec $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ et $y''(1) = 2$.
- $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$.
- $xy^{(V)} - y^{(IV)} = 0$.
- $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.
- $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.
- $x^3 y'' = (y - xy')^2$.
- $y'' = 2y^3$,avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

Exercice 3 : Etudier l'indépendance linéaire pour les familles suivantes:

- $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$.
- $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- $\{\sin x, \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right), \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\}$.
- $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$
- $\{x, \mid x \mid\}$.
- $y_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$ et $y_2(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$
- $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = 2x$ sur $[0, 1]$ .Utiliser le déterminant de Gram.

Exercice 4 : Edo linéaires homogènes à coefficients constants.

- $y''' - 2y'' - 3y' = 0$
- $y''' + 2y'' + y' = 0$
- $y''' + 4y'' + 13y' = 0$

- $y^{(V)} - 2y^{(IV)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$
- $y^{(IV)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$

Exercice 5 :Edo linéaires non homogènes à coefficients constants.

- $y''' - y'' + y' - y = x + x^2$
- $y''' - y'' = 6x + 12x^2$
- $y'' + y' = 4x^2e^x$
- $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$
- $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$
- $y'' + y = x\cos x$
- $y'' + 4y = \sin 2x$
- $y'' - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x}$.

Exercice 6 : Edo d'Euler

- $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.
- $x^2y'' - xy' + 2y = 0$.

Exercice 7 : Edo linéaires à coefficients variables.

- $xy'' + 2y' + xy = 1$.
- $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
- $x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}$,si $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = \ln x$ sont deux solutions particulières.

Exercice 8 : Etablir l'équation différentielle linéaire homogène à partir du système fondamental .

- $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$.
- $y_1(x) = e^{x^2}$, $y_2(x) = e^{-x^2}$
- $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{3x}$.

Exercice 9 : Etablir l'équation différentielle linéaire homogène connaissant son équation caractéristique et écrire leurs solutions générales:

- $\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0$
- $\lambda^3 = 0$

- $\lambda\left(\lambda^2+1\right)^2=0$

Exercice 10 : Etablir l'équation différentielle linéaire homogène connaissant les racines de l'équation caractéristique et écrire leurs solutions générales:

- $\lambda_1=1, \lambda_2=3+i, \lambda_3=3-i$
- $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=3$
- $\lambda_1=\lambda_2=3+i, \lambda_3=\lambda_4=3-i$

Exercice 11 : Intégrer en utilisant les séries.

- $y''-xy'-2y=0.$
- $y''=e^{xy}$, avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$
- $y''+y=0$, avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$..

Exercice 12 : Déterminer la forme de la solution particulière de l'équation différentielle linéaire non homogène connaissant les racines de son équation caractéristique et son second membre:

- $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ et $f(x)=ax^2+bx+c$
- $\lambda_1=0, \lambda_2=1$ et $f(x)=ax^2+bx+c$
- $\lambda_1=\lambda_2=0$ et $f(x)=ax^2+bx+c$
- $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$ et $f(x)=(ax+b)e^{-x}$
- $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ et $f(x)=(ax+b)e^{-x}$
- $\lambda_1=i, \lambda_2=-i$,$\lambda_3=1$,et $f(x)=\sin x+\cos x$
- $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ et $f(x)=ax^2+bx+c$

Chapitre 4 : Systèmes linéaires

On appelle système linéaire à coefficients constants d'ordre deux le système suivant :
$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$,avec a_1, b_1, a_2, b_2 des contantes réelles , c_1, c_2 deux fonctions de la variable t,et $x(t), y(t)$ les deux fonctions à chercher.

Méthode des éliminations successives.

Exemple 1 : $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$. On a $y = x' - 1 \Rightarrow y' = x'' \Rightarrow x'' - x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^t + C_2e^{-t} - 1, \\ y(t) &= C_1e^t - C_2e^{-t} - 1. \end{aligned}$$

Exemple 2 : $\begin{cases} x' = 3x + 8y + 1 \\ y' = -x - 3y \end{cases}$,avec $x(0) = 6, y(0) = -2.$

On a : $x = -y' - 3y \Rightarrow x' = -y'' - 3y'$

$\Rightarrow y'' - y = 0 \Rightarrow x(t) = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t}, y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}.$

Les conditions$x(0) = 6, y(0) = -2. \Rightarrow -4C_1 - 2C_2 = 6$ et $C_1 + C_2 = -2$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = -1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(t) &= 4e^t + 2e^{-t}, \\ y(t) &= -e^t - e^{-t} \end{aligned}$$

Exemple 3 :

$\begin{cases} tx' = -x + ty \\ t^2y' = -2x + ty \end{cases}$ .On a : $y = x' + \frac{x}{t} \Rightarrow y' = x'' + \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2}$ et

$t^2\left(x'' + \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2}\right) = -2x + t\left(x' + \frac{x}{t}\right)$

$\Rightarrow t^2x'' = 0 \Rightarrow x''(t) = 0 \Rightarrow$ pour $t \neq 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 + C_2t, \\ y(t) &= 2C_2 + \frac{C_1}{t} \end{aligned}$$

Intégration des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants par la méthode d'Euler.

Dimension deux :

$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y \\ y' = a_2x + b_2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$X' = AX$,avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$

· On cherche les valeurs propres de la matrice A.

· Si la matrice a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et $\lambda_2$on cherche deux vecteurs propres V_1, V_2 linéairement indépendants et la solution est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1V_1e^{\lambda_1 t} + C_2V_2e^{\lambda_2 t}.$$

Dimension trois:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$X' = AX$,avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, X^{'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$

(A) Supposons que les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 sont réelles et distinctes.On cherche trois vecteurs propres linéairement indépendants V_1, V_2 et V_3.La solution est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1V_1e^{\lambda_1 t} + C_2V_2e^{\lambda_2 t} + C_3V_3e^{\lambda_3 t}$$

Exemple 1 : $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = -x + 5y - z \\ z' = x - y + 3z \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda, -1, 1 \\ -1, 5-\lambda, -1 \\ 1, -1, 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 6$.

$\cdot\ \lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0, x = -z, \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$\cdot\ \lambda_1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z, \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\cdot\ \lambda_1 = 6 \Rightarrow \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z, y = -2z, \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

La solution esr donc donnée par :

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1V_1e^{\lambda_1 t} + C_2V_2e^{\lambda_2 t} + C_3V_3e^{\lambda_3 t} =$

$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$

Exemple 2 : $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda, -5 \\ 2, -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 39 \Rightarrow \lambda_1 = 3i,\ \lambda_2 = -3i$.

$\cdot\ \lambda_1 = 3i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (1-3i)\,x - 5y = 0 \\ 2x + (-1-3i)\,y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}.$

$\cdot\ \lambda_2 = -3i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (1+3i)\,x - 5y = 0 \\ 2x + (-1+3i)\,y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix}.$

La solution est donnée par :

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$

$= C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{3it} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{-3it} =$

$\left\{ \begin{array}{c} x(t) = 5C_1 e^{3it} + 5C_2 e^{-3it} \\ y(t) = (1-3i)\,C_1 e^{3it} + (1+3i)\,C_2 e^{-3it} \end{array} \right. \Rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{c} x(t) = 5C_1(\cos 3t + i \sin 3t) + 5C_2(\cos 3t - i\sin 3t) \\ y(t) = (1-3i)\,C_1(\cos 3t + i\sin 3t) + (1+3i)\,C_2(\cos 3t - i \sin 3t) \end{array} \right. \Rightarrow$

$x(t) = (5C_1 + 5C_2)\cos 3t + i\,(5C_1 - 5C_2)\sin 3t$

$y(t) = (C_1 + C_2)\cos 3t + 3\,(C_1 + C_2)\sin 3t + i\,((C_1 - C_2)\sin 3t + 3\,(C_2 - C_1)\cos 3t)$

$\Rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{c} x(t) = 5A\cos 3t + i5B\sin 3t \\ y(t) = [A\cos 3t + 3A\sin 3t] + i\,[B\sin 3t + 3B\cos 3t] \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\begin{array}{c} x(t) = C_1 \operatorname{Re} x + C_2 \operatorname{Im} x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t \\ y(t) = C_1 \operatorname{Re} y + C_2 \operatorname{Im} y = (C_1 - 3C_2)\cos 3t + (3C_1 + C_2)\sin 3t \end{array}$$

Cas de racines multiples:

Exemple 1: $\left\{ \begin{array}{c} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{array} \right. \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda, 1 \\ -1, 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$

On a $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

On cherche la solution sous la forme : $x(t) = (a + bt)\,e^{3t}, y(t) = (c + dt)\,e^{3t}$.

On dérive et on remplace dans les deux équations ainsi on obtient :

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & (C_1 - C_2 + C_2 t)\,e^{3t}, \\ y(t) & = & (C_1 + C_2 t)\,e^{3t}. \end{array}$$

Exemple 2 : $\left\{ \begin{array}{c} x' = 8y \\ y' = -2z \\ z' = 2x + 8y - 2z \end{array} \right. \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 8 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 2)\left(\lambda^2 + 16\right) = 0$

$\cdot\ \lambda_1 = -2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x + 8y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2x + 8y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = -4y, \text{et } z = y \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cdot\ \lambda_2 = 4i \Rightarrow \begin{cases} -4ix + 8y = 0 \\ -4iy - 2z = 0 \\ 2x + 8y + (-2-4i)\, z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2iy$ et $z = -2iy \Rightarrow$ $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$

$\cdot\ \lambda_2 = -4i \Rightarrow \begin{cases} 4ix + 8y = 0 \\ 4iy - 2z = 0 \\ 2x + 8y + (-2+4i)\, z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2iy$ et $z = 2iy \Rightarrow V_3 =$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc la solution est donnée par :

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 V_1 e^{-2t} + C_2 V_2 e^{4it} + C_3 V_3 e^{-4it}$

$= C_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} e^{4it} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} e^{-4it}$

Si $x(0) = -4, y(0) = 0, z(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = \frac{i}{2}, C_3 = -\frac{i}{2}$

$x(t) = -4e^{-2t} - 2\sin 4ty, (t) = e^{-2t} - \cos 4t, z(t) = e^{-2t} - 2\sin 4t$

Méthodes de résolution des systèmes linéaires non homogènes à coefficients constants.

Soit le système $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z + f_1(t) \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z + f_2(t) \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z + f_3(t) \end{cases}$

(A) **Variationdes constantes :**

$\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases} \Rightarrow (S_H) : \begin{matrix} x' = -2x - 4y \\ y' = -x + y \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $y' = -x + y \Rightarrow x = y - y' \Rightarrow x' = y' - y'' \Rightarrow y'' + y' - 6y = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$,ainsi $y_H(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}$ et $x_H(t) = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t}$.

On suppose que C_1 et C_2 sont des fonctions de t,en dérivant $y_H(t)$et $x_H(t)$,on obtient que :

$\begin{cases} -C_1'e^{2t} + 4C_2'e^{-3t} = 1 + 4t \\ C_1'e^{2t} + C_2'e^{-3t} = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{6t^2-4t-1}{5}e^{-2t} \\ C_2' = \frac{3t^2+8t+2}{10}e^{3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3t^2+t}{5}e^{-2t} + \tilde{C}_1 \\ C_2 = \frac{t^2+2t}{10}e^{3t} + \tilde{C}_2 \end{cases}$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} x_G(t) &= -\tilde{C}_1e^{2t} + 4\tilde{C}_2e^{-3t} + t + t^2, \\ y_G(t) &= \tilde{C}_1e^{2t} + \tilde{C}_2e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

(B) **Méthode des coefficients indéterminés.**

$$\begin{cases} x' = x - 2y + e^t \\ y' = x + 4y + e^{2t} \end{cases} \Rightarrow (S_H) : \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x + 4y \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$\cdot\lambda_1 = 2 \Rightarrow -x - 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\cdot\lambda_2 = 3 \Rightarrow -2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a donc :

$$\begin{pmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$\begin{matrix} x_{PN}(t) = Ke^t + (Lt + M)e^{2t} \\ y_{PN}(t) = Ne^t + (Pt + Q)e^{2t} \end{matrix} \Rightarrow$$

après dérivation et remplacement on trouve :

$$\begin{matrix} x_{PN}(t) = -\frac{3}{2}e^t + 2te^{2t} \\ y_{PN}(t) = \frac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^t + 2te^{2t} \\ \frac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

- Exemple : $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$.

On cherche une solution particulière sous la forme : $\begin{pmatrix} x_{PN}(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1, \\ y_{PN}(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2 \end{pmatrix}$.

Aprés dérivation et remplacement dans le système donnée on trouve :
$\begin{pmatrix} x_{PN}(t) = t^2 + t, \\ y_{PN}(t) = -\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$.est la solution générale est donnée par :

$$\begin{aligned} x_G(t) &= -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} + t^2 + t, \\ y_G(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

Methode de D'Alembert :

Soit le système : $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + f_1(t) \\ y' = a_2x + b_2y + f_2(t) \end{cases}$ .On a :

$x' + \lambda y' = \frac{d}{dx}(x + \lambda y) = (a_1 + \lambda a_1)x + (b_1 + \lambda b_1)y + f_1 + \lambda f_2$.

$x' + \lambda y' = (a_1 + \lambda a_1)\left[x + \frac{b_1 + \lambda b_1}{a_1 + \lambda a_1}y\right] + f_1 + \lambda f_2$.

Donnons au nombre λ une valeur telle que $\frac{b_1 + \lambda b_1}{a_1 + \lambda a_1} = \lambda$.

L'équation devient $\frac{d}{dx}(x + \lambda y) = (a_1 + \lambda a_1)(x + \lambda y) + f_1 + \lambda f_2$.

Si $\frac{b_1 + \lambda b_1}{a_1 + \lambda a_1} = \lambda$ a deux valeurs réelles distinctes λ_1,et λ_2,on tire la solution.

Exemple 1 : $\begin{cases} x' = 5x + 4y + e^t \\ y' = 4x + 5y + 1 \end{cases}$ .On doit avoir $\frac{4+5\lambda}{5+4\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow$
$\lambda = \pm 1$.

Pour $\lambda = 1$ on a : $(x+y)' = 9(x+y) + e^t + 1$
Pour $\lambda = -1$ on a : $(x-y)' = 9(x-y) + e^t - 1$.
Posons $x + y = z$ et intégrant l'équation $z' = 9z + e^t + 1$,on obtient $z(t) = -\frac{1}{8}e^t - \frac{1}{9} + K_1 e^{9t}$.
Posons $x - y = z$ et intégrant l'équation $z' = z + e^t - 1$,on obtient $z(t) = te^t + 1 + K_2 e^t$.
On a donc :
$x + y = -\frac{1}{8}e^t - \frac{1}{9} + K_1 e^{9t}$ et $x - y = te^t + 1 + K_2 e^t$
Après addition et soustractions on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{9} + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{16}\right) e^t + K_1 e^{9t} + K_2 e^t, \\ y(t) &= -\frac{10}{9} + \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{8}\right) e^t + K_1 e^{9t} + K_2 e^t \end{aligned}$$

Exemple 2 : $\begin{cases} tx' = -2x + 2y + t \\ ty' = -x - 5y + t^2 \end{cases}$:

On pose : $t = e^\tau \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{d\tau}$,et $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dy}{d\tau}$,et le système devient :
$\begin{cases} x' = -2x + 2y + e^\tau \\ y' = -x - 5y + e^{2\tau} \end{cases}$ .On utilise la méthode de D'Alembert on trouve :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2C_1}{t^3} - \frac{C_2}{t^4} + \frac{3}{10}t + \frac{1}{15}t^2 \\ y(t) &= -\frac{C_1}{t^3} + \frac{C_2}{t^4} - \frac{1}{20}t + \frac{2}{15}t^2 \end{aligned}$$

Méthode exponentielle

Le calcul d'une exponentielle de matrice n'est pas à priori un problème facile.Cependant dans certains cas et notamment ceux d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente il ne présent aucune difficulté.Le cas général peut se traiter en se ramenant aux deux cas précédents.

(a) Si la matrice est diagonale $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_3} \end{pmatrix}$

(b) Si la matrice est diagonalisable ie $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale $\Rightarrow e^A = Pe^D P^{-1}$.

(c) Si la matrice est nilpotente ie il existe $(k \in \mathbb{N})$ tel que : $A^k = 0 \Rightarrow e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{(q-1)!}A^{q-1}$

(d) Méthode de Dunfort : Lorsque le polynome minimal de la matrice A est scindé alors A peut s'écrire sous la forme $A = D + N$,avec D diagonalisable,N nilpotente et $ND = DN$, et dans ce cas on a : $e^A = e^D e^N$.

(e) Méthode de Jordan : $J = J_{\lambda_1} \oplus J_{\lambda_2} \oplus J_{\lambda_3} \oplus J_{\lambda_4} \oplus .... \oplus J_{\lambda_n} \Rightarrow e^J = e^{J_{\lambda_1}} \oplus ..... \oplus e^{J_{\lambda_n}}$

Chaque bloc est de la forme $J = \lambda I + N$,où N est la matrice nilpotente spéciale et dans ce cas on aura : $e^{\lambda I + N} = e^{\lambda I}e^N = e^\lambda e^N$, et $e^A = Pe^J P^{-1}$.

Exemple 1 : $A=\begin{pmatrix} 21 & 17 & 6 \\ -5 & -1 & -6 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda)=(\lambda-16)^2(\lambda-4)$.

$\Rightarrow$ la forme de Jordan est $J=\begin{pmatrix} 16 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ La matrice de passage est $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{5}{8} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Maintenant on a : $J=J_2(16)\oplus J_1(4)$, et $e^A=Pe^JP^{-1}$.

$e^{J_2}=e^{\begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}}=e^{\left[16I+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]}=e^{16I}.e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}=$
$e^{16}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=e^{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{16} & e^{16} \\ 0 & e^{16} \end{pmatrix}$.
$e^{J_2}=e^4$

Ainsi

$e^A=Pe^JP^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{5}{8} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{16} & e^{16} & 0 \\ 0 & e^{16} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{5}{8} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5e^4-e^{16} & 5e^4-5e^{16} & -2e^{16} \\ -e^4+e^{16} & -e^4+5e^{16} & 2e^{16} \\ 0 & 0 & 4e^{16} \end{pmatrix}$

Quelques propriétes

$\cdot\ e^0=I$
$\cdot\ e^{aA}e^{bA}=e^{(a+b)A}$
$\cdot\ e^Ae^{-A}=I$
$\cdot$ Si A et B commutent ie $AB=BA\Rightarrow e^{A+B}=e^Ae^B$
$\cdot\ e^{PAP^{-1}}=Pe^AP^{-1}$
$\cdot\ e^{A^t}=\left(e^A\right)^t\Rightarrow$ Si A est symétrique alors e^A l'est aussi.

$\cdot$ Si A est antisymetrique $A^t=-A\Rightarrow\left(e^A\right)^t=e^{A^t}=e^{-A}=\left(e^A\right)^{-1}\Rightarrow\left(e^A\right)^te^{-A}=I$, donc la matrice e^A est orthogonale.

$\cdot\ \frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}$

Si on a une équation différentielle $X'(t)=AX(t)$ alors $X(t)=e^{tA}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$.

Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=D+N=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,mais $D.N\neq N.D$,dans ce cas la décomposition de Dunford est $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=D$ et $N=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pratique:

(1) Calculer le polynome caractéristique $P(\lambda)$,il doit être scindé,on calcul les valeurs propres.

(2) Pour chaque valeur λ valeur propre de multiplicité m on note $N_\lambda=\ker f(A-\lambda I)^m$ qui est un espace vectoriel de dimension m.On détermine ainsi m vecteurs formant une base de $N_\lambda$et on obtient enfin une base $\beta=(v_1,......,v_{n,})$

(3) On définit l'endomorphisme d définie par : $d(v_i) = \lambda_i v_i$.La matrice d est donc diagonale Δ la matrice de d dans la base canonique $\beta_0 = (e_i)$ *ie* les colonnes de Δ sont les coordonnées des $d(v_i)$ exprimés dans la base $\beta_0 = (e_i)$.

(4) On pose $N = A - \Delta \Rightarrow \Delta$ est diagonalisable, N est nilpotente, $N\Delta = \Delta N$ et $\Delta = PDP^{-1}$.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$,mais $DN \neq ND$

On a : $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \det |A - \lambda|^2 = 0$ et pour $\lambda_3 = 2, \det |A - 2\lambda| = 0$

$\Rightarrow v_1(1,0,0), v_2(0,1,0), v_3(2,1,1)$.

Cherchons d tel que : $d(v_1) = v_1, d(v_2) = v_2, d(v_3) = 2v_3$

$\Rightarrow$ la matrice de d est : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow N = A - \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

P étant la matrice de passage de $\beta_0(e_i)$ à $\beta(v_i)$

On peut si besoin diagonalise Δ : $\Delta = P^{-1}DP$ ou $D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

· $P(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$.

· Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

· Pour $\lambda_1 = -1$ on a : $v_1 = (0,1,1)$,

· Pour $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ on a : $v_2 = (1,1,1), v_3 = (1,0,1)$.

· La matrice de passage de $\beta_0 = (e_i)$ à $\beta = (v_i)$ s'obtient en écrivant :

$v_1 = (0,1,1) = e_2 + e_3$

$v_2 = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$

$v_3 = (1,0,1) = e_1 + e_3$

Donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\cdot\ d(v_1) = -v_1, d(v_2) = 2v_1, d(v_3) = 2v_3 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\cdot\ \Delta = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\cdot\ N = A - \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

La décompositionde Dunford est $A = \Delta + N$ où Δ est diagonalisable N nilpotente $\left(N^2 = 0\right)$, et $\Delta N = N\Delta$.

Série 4 : Systèmes linéaires

Exercice 1 : Résoudre les systèmes par la méthode des éliminations successives.

- $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -x - 3y \\ x(0) = 6, y(0) = -2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} tx' = -x + yt \\ t^2 y' = -2x + yt \end{cases}$

Exercice 2 : Résoudre les systèmes par la méthode d'Euler.

- $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = -x + 5y - z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 8y \\ y' = -2z \\ z' = 2x + 8y - 2z \end{cases}$

- $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases}$

Exercice 3 : Résoudre par la méthode de la variation des constantes .

- $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$

Exercice 4: Résoudre par la méthode des coefficients indéterminées

- $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = x - 2y + e^t \\ y' = x + 4y + e^{2t} \end{cases}$

Exercice 5 : Résoudre par la méthode de D'Alembert.

- $\begin{cases} x' = 5x + 4y + e^t \\ y' = 4x + 5y + 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} tx' = -2x + 2y + t \\ t^2 y' = -x - 5y + t^2 \end{cases}$

Exercice 6 : Résoudre en utilisant L'exponentielle d'une matrice .

- $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$

- $\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = -x + y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = ax + by + cz8y \\ y' = ay + bz \\ z' = az \end{cases}$

Chapitre 4 : Introduction à la stabilité

Notions fondamentales et définitions

Soit l'équation différentielle $y' = f(x, y)$.

· Une solution $\varphi(x)$ satisfaisant à la condition initiale $\varphi(x_0) = y_0$ est dite stable au sens de Liapounov pour $x \to +\infty$ si :

$(\forall \varepsilon \succ 0), (\exists \delta \succ 0)$ tel que toute solution $y(x)$ dont la valeur initiale $y(x_0)$ satisfait à la condition $|y(x_0) - y_0| \prec \delta$,l'on ait $|y(x) - \varphi(x)| \prec \varepsilon \ \forall \ x \geq x_0$.

· La solution $\varphi(x)$ est dite instable si $\forall \delta \succ 0$ aussi petit que l'on veut l'négalité $|y(x) - \varphi(x)| \prec \varepsilon$ n'est pas vérifiée pour au moins une solution $y(x)$ *ie* il existe un $\varepsilon \succ 0$ tel que $|y(x) - \varphi(x)| \succ \varepsilon$

· Si on a en plus $\lim_{x \to +\infty} |y(x) - \varphi(x)| = 0$ alors la solution $\varphi(x)$ est dite asymptotiquement stable.

· L'étude de la stabilité de $\varphi(x)$ peut être ramenée à celle de la fonction nulle $\varphi(x) = 0$ d'une certaine équation analogue à l'équation $y' = F(x, y)$ où $F(x, 0) = 0$.Dans ce cas le point $y = 0$ est le point de repos de l'équation.

· Le point de repos $y = 0$ est stable au sens de Liapounov si : $(\forall \varepsilon \succ 0), (\exists \delta \succ 0)$ tel que toute solution $y(x)$ dont la valeur initiale $y(x_0) = y_0$ satisfait à la condition $|y_0| \prec \delta$,l'on ait $|y(x)| \prec \varepsilon \ \forall \ x \geq x_0$.Si de plus $\lim_{x \to +\infty} |y(x)| = 0$ alors le point de repos $y = 0$ est asymptotiquement stable.

Exemple 1 : $y' = -y + 1 + x, y(0) = 0$.

On a : $y(x) = Ce^{-x} + x$, et la condition $y(0) = 0$ donne $\varphi(x) = x$.

La condition initiale $y(0) = y_0$ donne $y(x) = y_0 e^{-x} + x$.

Si $|y_0 - 0| \prec \varepsilon$,alors $|y(x) - \varphi(x)| = |y_0 e^{-x} + x - x| = |y_0 e^{-x}| = |(y_0 - 0) e^{-x}| \prec \delta = \varepsilon$,

pour $x \geq 0$.Ainsi la solution $\varphi(x) = x$.est stable au sens de Liaponouv .

On a $\lim_{x \to +\infty} |y(x) - \varphi(x)| = \lim_{x \to +\infty} |y_0 e^{-x} + x - x| = \lim_{x \to +\infty} |y_0 e^{-x}| = 0$,on déduit que $\varphi(x) = x$ est asymptotiquement stable .De plus $\varphi(x) = x$, n'est pas bornée pour $x \to +\infty$.On déduit que la stabilité de la solution n'entraine pas que cette solution est bornée.

Exemple 2 : $y' = \sin^2 y$.

On a des solutions évidentes $y(x) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

L'intégration de l'équation donne $y(x) = \operatorname{arccot}(C - x)$ .La condition $y(0) = y_0$ donne $y(x) = \operatorname{arccot}(\cot y_0 - x)$,pour $y \neq k\pi$.Toutes les solutions $y(x) = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $y(x) = \operatorname{arccot}(-\cot y_0 - x)$ pour $y \neq k\pi$,sont bornées sur $\mathbb{R}$ pourtant la solution $y(x) = 0$ est instable lorsque $x \to +\infty$ car pour tout $y_0 \in]0, \pi[$ on a $\lim_{x \to +\infty} y(x) = \pi$.Par suite le fait que les solutions d'une équation différentielle sont bornées n'implique pas en général que ces solutions sont stables.

Critère de Routh et Hurwitz

Soit l'équation différentielle $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$, avec $a_0 \succ 0$.

· La solution $y(x) = 0$ est asymptotiquement stable si les racines de l'équation caractéristique

$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + ... + a_n = 0$ ont leur partie réelle négative.

Pour que toutes les racines de l'équation caractéristique aient leurs parties réelles négatives il faut et il suffit que tous les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz soient positifs:
$\begin{vmatrix} a_1, a_0, 0, 0........, , , , , , , , , 0 \\ a_3, a_2, a_1, , a_0, ..., , , , , , , , , 0 \\ a_5, a_4, a_3, , a_2, , a_1, , a_0, , , , , , , , 0 \\ .... \\ 0, 0, 0, ...a_n, \end{vmatrix}$. Les mineurs diagonaux sont de la forme :

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1, a_0, \\ a_3, a_2, \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1, a_0, 0, \\ a_3, a_2, a_1, \\ a_5, a_4, a_3, \end{vmatrix}, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1, a_0, 0, 0........, , , , , , , , , 0 \\ a_3, a_2, a_1, , a_0, ..., , , , , , , , , 0 \\ a_5, a_4, a_3, , a_2, , a_1, , a_0, , , , , , , , 0 \\ .... \\ 0, 0, 0, ...a_n, \end{vmatrix}.$$

Ainsi la condition de Hurwitz s'énonce : pour que la solution $y = 0$ soit stable il faut et il suffit que tous les $\Delta_{i,}$ $(1 \leq i \leq n)$,soient strictement positifs.De plus on a $\Delta_n = a_n \Delta_{(n-1),}$ainsi la condition $\Delta_n \succ 0$ peut être remplacée par $a_n \succ 0$

Exemple 1 : $y'''' + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0$.

Son équation caractéristique est $f(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10 = 0$.

Dans ce cas on a $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 13, a_3 = 19, a_4 = 10$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5, 1, 0, 0 \\ 19, 13, 5, 1 \\ 0, 10, 19, 13 \\ 0, 0, 0, 10 \end{vmatrix} = 4240 \succ 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5, 1, 0 \\ 19, 13, 5 \\ 0, 10, 19 \end{vmatrix} = 424, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5, 1 \\ 19, 13 \end{vmatrix} =$$
$46, \Delta_1 = 5$.

On a donc $\Delta_4 \succ 0, \Delta_3 \succ 0 \succ \Delta_2 \succ 0, \Delta_1 \succ 0$ et la solution triviale $y(x) = 0$ est asymptotiquement stable.

Théorème : Les solutions de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ sont toutes soit stables soit instables.

Remarque : Cette assertion n'est plus vraie pour des équations linéaires.

Contre exemple : $y' = 1 - y^2$

Cette équation a deux solutions évidentes $\varphi(x) = 1$ et $\psi(x) = -1$.La solution $\psi(x) = -1$ est instable par contre la solution $\varphi(x) = 1$ est asymptotiquement stable.En effet lorsque $x \to +\infty$ toutes les solutions $y(x) = \frac{(1+y_0)e^{2(x-x_0)} - (1-y_0)}{(1+y_0)e^{2(x-x_0)} + (1-y_0)}, (y_0 \neq -1)$ tendent vers $+1$.Par définition cela signifie que la solution $\varphi(x) = 1$ est asymptotiquement stable.

Stabilité par rapport à la variation des seconds membres des équations.

Considérons des équations différentielles : $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y' = f(x, y) + \Theta(x, y) \end{cases}$

où lez fonctions f , Θ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans un domaine fermé $\bar{G}$ du plan xOy et $|\Theta(x, y)| \leq \varepsilon$ et $M = \max_{(x,y)\in\bar{G}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.Si $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ sont solutions des deux équations respectivement avec la même condition $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$ alors $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M}\left(e^{M(|x-x_0|)} - 1\right)$ .De cette estimation il est immédiat de voir si $\Theta(x, y)$ est suffisamment petite dans $\bar{G}$ alors la différence des deux solutions sera petite en valeur absolue .

Exemple : Dans le carré $Q = \left\{ \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$ trouvons une solution approchée de l'équation $y' = \sin xy$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{10}$et évaluons l'erreur.

Remplaçons l'équation donnée par : $y' = xy$ avec $y(0) = \frac{1}{10}$.La solution sous ces conditions est $\psi(x) = \frac{1}{10} e^{\frac{x^2}{2}}$.

De plus elle est dans Q .La première équation $y' = \sin xy$ avec $y(0) = \frac{1}{10}$ possède la solution unique $y = \varphi(x)$ si bien que pour une solution approchée on peut prendre $\psi(x) = \frac{1}{10} e^{\frac{x^2}{2}}$.

Evaluons l'erreur $\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)|$,avec $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

On a ; $f(x,y) = xy$, $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |x| \leq \frac{1}{2}$, et $|\sin xy - xy| \leq \frac{1}{6} |xy|^3 \leq \frac{1}{4^3.6} = \frac{1}{384}$.

On prend $\varepsilon = \frac{1}{384}$ et obtient : $\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \frac{1}{192} \left(e^{\frac{|x|}{2}} - 1 \right) \prec \frac{1}{650}$.

Equations à petit paramètre de la dérivé

Considérons une équation différentielle $y' = F(x, y, \varepsilon)$ où ε est un paramètre .Si dans un certain domaine fermé de variation de x, y, ε la fonction F est lipschitzienne en y ie $|F(x, y_2, \varepsilon) -| F(x, y_1, \varepsilon) \leq N |y_2 - y_1|$ alors la solution dépend continûement de ε .Dans de nombreux problèmes de physique on considère des équations de la forme $\varepsilon y' = f(x,y)$ ou $y' = \frac{1}{\varepsilon} f(x,y)$ avec ε un petit paramètre.

Question : A quelles conditions , les valeurs de $|\varepsilon|$ étant petites,peut-on rejeter dans l'équation $\varepsilon y' = f(x,y)$ le terme $\varepsilon y'$ et prendre pour solution approchée de cette équation la solution d'une équation dite "dégénérée" : $f(x,y)$

Supposons que $\varepsilon \succ 0$ et que l'équation dégénérée possède une solution $y = \varphi(x)$. Suivant le comportement de $f(x,y)$ au voisinage de $y = \varphi(x)$,la solution $y(x,\varepsilon)$ de l'équation $\varepsilon y' = f(x,y)$ tend vers la solution $y = \varphi(x)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. ou bien s'en éloigne rapidement.

La solution $y = \varphi(x)$ est dite stable dans le premier cas et instable dans le second.

A savoir si en passant par la courbe solution $y = \varphi(x)$ la fonction $f(x,y)$ change le signe $+$ en $-$ lorsque y croît alors la solution $y = \varphi(x)$ est stable et donc peut remplacer de façon approchée la solution $y(x,\varepsilon)$. Au contraire si en passant par la courbe solution $y = \varphi(x)$ la fonction $f(x,y)$ change le signe $-$ en $+$ lorsque y croît alors la solution $y = \varphi(x)$ est instable et donc ne peut pas remplacer de façon approchée la solution $y(x,\varepsilon)$.

Les conditions suffisantes de stabilité ou d'intabilité s'expriment par la proposition suivante .

Proposition

(1) Si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \prec 0$ pour $y = \varphi(x)$,alors la solution $y = \varphi(x)$ est stable.

(2) Si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \succ 0$ pour $y = \varphi(x)$,alors la solution $y = \varphi(x)$ est instable.

Remarque :

(1) Dans le cas où l'équation $f(x,y) = 0$ possède plusieurs solutions on doit étudier la stabilité de chaque solution.

(2) Un cas semi-stable aura lieu si la fonction $f(x,y)$ ne change pas de signe par exemple si $y = \varphi(x)$ est une racine de multiplicité paire.Dans ce cas lorsque

ε est petit les courbes tendent vers $y = \varphi(x)$ d'un côté de cette courbe et s'en éloigne de l'autre côté.

Exemple : Etablir si la solution $y(x, \varepsilon)$ de l'équation $\varepsilon y' = x^2 - y, \varepsilon \succ 0$ et $y(x_0) = y_0$ tend vers la solution $y = x^2$ pour $x \succ x_0$.

On a $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2-y)}{\partial y} = -1 \Rightarrow y = x^2$ est stable et $y(x, \varepsilon)_{\varepsilon \to 0} \to x^2$.

En effet $y(x, \varepsilon) = \left(y_0 - x_0^2 + 2\varepsilon x_0 - 2e^2\right) e^{\frac{x-x_0}{\varepsilon}} + x^2 - 2\varepsilon x + 2\varepsilon^2$,et on a pour $x \succ x_0$ on tire que : $\lim_{\varepsilon \to 0} y(x, \varepsilon)$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\left(y_0 - x_0^2 + 2\varepsilon x_0 - 2e^2\right) e^{-\frac{x-x_0}{\varepsilon}} + x^2 - 2\varepsilon x + 2\varepsilon^2\right] = x^2$

Stabilité des systèmes :

Soit le système $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ avec $x(0) = y(0) = 0$.La solution du système est $x(t) = y(t) = 0$.

Toute autre solution avec les conditions $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ est donnée par : $x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t$ et $y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t$.

Prenons un $\varepsilon \succ 0$ et montrons qu'il existe $\delta \succ$ tel que pour $|x_0 - 0| \prec \delta, |y_0 - 0| \prec \delta$

on l'ait pour tous les $t \geq 0$.les inégalités :

$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| \prec \varepsilon$,

$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| \prec \varepsilon$

On a évidemment

$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|$.

$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| \leq |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leq |x_0| + |y_0|$.

Si $|x_0| + |y_0| \leq \varepsilon$ on a: $|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leq \varepsilon$ et $|x_0 \sin t + y_0 \cos t| \leq \varepsilon$

On prend donc $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alors pour $|x_0| \prec \delta, |y_0| \prec \delta$ on aura pour $t \geq 0$.les inégalités :

$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leq \varepsilon$ et $|x_0 \sin t + y_0 \cos t| \leq \varepsilon$.

Ainsi la solution nulle $x(t) = y(t) = 0$ est stable au sens de Liapounov mais cette stabilité n'est pas asymptotique .

Types les plus simples de points de repos:

Soit le système $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.La solution $x = y = 0$ s'appelle point de repos du système. Pour étudier le point de repos on cherche l'équation caractéristique : $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \neq 0$, et soient λ_1, λ_2,ses deux racines.Les cas suivants peuvent se présenter :

(1) Les racines sont réelles et distinctes:

(a) Les deux racines sont strictement négatives alors le point de repos est asymptotiquement stable (noeud stable) .

(b) Les deux racines sont strictement positives alors le point de repos est instable (noeud instable) .

(c) Si les racines sont de signes opposés alors le point de repos est instable (col) .

(2) Les racines sont complexes et conjuguées : $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq$.

(a) $p \prec 0, q \neq 0$ le point de repos est asymptotiquement stable (foyer stable) .

(b) $p \succ 0, q \neq 0$ le point de repos est instable (foyer instable) .

(c) $p=0, q\neq 0$ le point de repos est stable (centre) .

(3) Les racines sont multiples.

(a) Si elles sont strictement négatives le point de repos est asymptotiquement stable (noeud stable) .

(b) Si elles sont strictement positives le point de repos est instable (noeud stable) .

Théorème : Soit le système $X'=AX$ où A est une matrice (n,n) avec $(n\geq 2)$.

Si toutes les racines de l'équation caractéristique du système possèdent une partie réelle négative,alors le point de repos $(0,0)$ est asymptotiquement stable.Si au moins une racine de l'équation caractéristique du système possède une partie réelle positive ,alors le point de repos $(0,0)$ est instable.

Exemple 1 : $\begin{cases} x'=5x-y \\ y'=2x+y \end{cases}$ .Son équation caractéristique est donnée par : $\begin{vmatrix} 5-\lambda, -1 \\ 2, 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-6\lambda+7=0,$

Ainsi les valeurs propres $\lambda_1=3+\sqrt{2}$ et $\lambda_2=3-\sqrt{2}$.sont réelles positives et distinctes .Par suite le point de repos $(0,0)$ est un noeud instable.

Exemple 2 : $\begin{cases} x'=-x+z \\ y'=-2y-z \\ z'=y-z \end{cases}$. Son équation caractéristique est donnée par : $\begin{vmatrix} -1-\lambda, 0, 1 \\ 0, -2-\lambda, -1 \\ 0, 1, -1-\lambda \end{vmatrix}$

$=\left(\lambda^2+3\lambda+3\right)(1+\lambda)=0$.Ainsi les valeurs propres $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_3=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ont des parties réelles négatives .Par suite le point de repos $(0,0)$ est asymptotiquement stable .

Stabilité en première approximation

Soit le système $\frac{dy_i}{dx}=f_i\left(y_1,y_2,....y_n\right)$,$i=1,2,,,,,,n$ et soit $y_i=0$ $i=1,2,,,,,,n$ un point de repos du système ie $f_i\left(0,0,....0\right)=0$.

Nous supposerons que les fonctions coordonnées de f sont suffisament dérivables à l'origine.

Développent les foinctions coordonées de f en série de Taylor suivant x au voisinage de 0.

On aura $f_i\left(y_1,y_2,....y_n\right)=\sum_{j=1}^{j=n}a_{ij}y_j+R_i\left(y_1,y_2,....y_n\right)$ .Ici $a_{ij}=\frac{\partial f_i(0,0,....0)}{\partial x_j}$ et R_i sont des termes du second ordre.

Ainsi le système initiale prend la forme : $\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{j=n}a_{ij}y_j+R_i\left(y_1,y_2,....y_n\right)$.

Le système linéaire $\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{j=n}a_{ij}y_j$ est appelé système en première approximation .

On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème : Soit $\begin{vmatrix} \left(a_{11}-\lambda\right), a_{13,}..., a_{1n,} \\ a_{21,}\left(a_{22}-\lambda\right), .., a_{2n,} \\ .... \\ a_{n1,}a_{n2,}, ..., \left(a_{nn}-\lambda\right) \end{vmatrix}=0$ l'équation caractéristique du système en première approximation.

(1) Si toutes les racines possèdent des parties réelles négatives les solutions nulles $y_i = 0$,des deux systèmes sont asymptotiquement stables.

(2) Si au moins une racine possède une partie réelle positive les solutions nulles $y_i = 0$, des deux systèmes sont instables.Dans les deux cas on dit qu'il est possible d'étudier la stabilité en première approximation.

Exemple : Etudier la stabilité en première approximation du point de repos $(0,0)$ du système : $\begin{cases} x' = 2x + y - 5y^2 \\ y' = 3x + y + \frac{x^3}{2} \end{cases}$.

Le systéme en première approximation est $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + y \end{cases}$.

L'équation caractéristique est $\begin{vmatrix} 2-\lambda, 1 \\ 3, 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0,$

Les racines de l'équation $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ sont réelles et $\lambda_1 \succ 0$ .Par suite la solution nulle $x = 0, y = 0$ est instable.

Méthodes des fonctions de Liapounov

La méthode des fonctions de Liapounov consiste à étudier directement la stabilité de la position d'équilibre du système : $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ...x_n)$,$i = 1, 2, , , , , , n$

avec une fonction convenablement choisie $F(t, y_1, y_2, ...y_n)$ qu'on appelle fonction de Liapounov sans chercher les solutions.On se borne aux systèmes autonomes $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ...x_n)$,pour lesquels $x_i = 0$ est un point de repos.

· **Définition** 1 : On dit qu'une fonction $V(x_1, x_2, ...x_n)$ définie dans un certain voisinage de l'origine est de signe défini (définie positive ou définie négative) si dans un certain domaine $|x_i| \leq h$ avec h positif et suffisamment petit elle ne peut prendre que des valeurs de signe défini et ne s'annule que pour $x_1 = x_2 = .. = x_n = 0$

Exemple 1 : Pour $n = 3$ les fonctions suivantes sont définies positives :

$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$

· **Définition** 2 : On dit qu'une fonction $V(y_1, y_2, ...y_n)$ définie dans un certain voisinage de l'origine est de signe constant (positive ou négative) si dans un certain domaine $|x_i| \leq h$ avec h positif et suffisamment petit elle ne peut prendre que des valeurs d'un seul signe déterminé mais peut s'annuler aussi pour $x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2 \neq 0$.

Exemple 2 : La fonction $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$. est de signe constant positif et elle s'annule même pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .Il suffit de prendre $x_1 = -x_2$ et $x_3 = 0$

Définition 3 : Soit $V(x_1, x_2, ...x_n)$ une fonction dérivable et soient $x_1, x_2, ...x_n$ des fonctions du temps t et solutions du système $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ...x_n)$,alors la dérivée totale de V par rapport au temps t a pour expression :

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, ...x_n)$$

Théorème 1 (théorème de Liapounov de la stabilité) : Si pour le système $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ...x_n)$ il existe une fonction V de signe constant

(fonction de Liapounov) dont la dérivé totale $\frac{dV}{dt}$ est de signe constant inverse de V ou est identiquement nulle alors le point de repos $x_i = 0$ est stable.

Exemple 1 : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

Prenons pour $V(x,y) = x^2 + y^2$,elle est définie positive et $\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy - 2yx = 0$, il résulte que le point de repos $(0,0)$ est stable.

Théorème 2 (théorème de Liapounov de la stabilité asymptotique) : Si pour le système $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ...x_n)$ il existe une fonction V de signe défini

(fonction de Liapounov) dont la dérivé totale $\frac{dV}{dt}$ est de signe défini inverse de V alors le point de repos $x_i = 0$ est asymptotiquement stable.La stabilité n'est pas asymptotique car les trajectoires qui sont des circonférences ne tendent pas vers $(0,0)$ lorsque $t \to +\infty$

Exemple 2 : $\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x - 3y^3 \end{cases}$

Prenons $V(x,y) = x^2 + y^2$,on trouve $\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x\left(y - x^3\right) + 2y\left(-x - 3y^3\right) = -2\left(x^4 + y^6\right)$ .Ainsi $\frac{dV}{dt}$ est une fonction définie négative et le poit de repos $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

Indication : On a pas de méthode générale pour chercher la fonction de Liapounov V.Dans les cas les plus simples on cherche V sous la forme : $V(x,y) = ax^2 + by^2, V(x,y) = ax^4 + by^2$,

$V(x,y) = ax^2 + by^4, V(x,y) = ax^4 + by^4$ avec $a \succ 0, b \succ 0$.

Exemple 3 : $\begin{cases} x' = -x - 2y + x^2y^2 \\ y' = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2} \end{cases}$

Prenons $V(x,y) = ax^2 + by^2$,on trouve :

$\frac{dV}{dt} = 2ax\frac{dx}{dt} + 2by\frac{dy}{dt} = 2ax\left(-x - 2y + x^2y^2\right) + 2by\left(x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}\right)$

$= -\left(2ax^2 + by^2\right) + (b - 2a)\left(2xy - x^3y^2\right)$.

On prend $b = 2a$ et on trouve $\frac{dV}{dt} = -2a\left(x^2 + y^2\right)$.

Ainsi $V(x,y) = ax^2 + 2ay^2$ sera une fonction définie positive et sa dérivée $\frac{dV}{dt} = -2a\left(x^2 + y^2\right)$ sera une fonction définie négative et par suite on déduit que le point de repos $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

Série 5 : Introduction à la stabilité

- Exercice 1 : En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov , étudier la stabilité d'une solution de l'équation : $y' = 1 + x - y, y(0) = 0$.

La solution est elle asymptotiquement stable.

- Exercice 2 : En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov ,étudier la stabilité de la solution $y = 0$ de l'équation : $y' = \sin^2 y$

- Exercice 3 : Etudier la stabilité de la solution triviale $y = 0$ de l'équation : $y'''' + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0$.

- Exercice 4 : Etudier la stabilité de la solution de l'équation dégénérée

$\cdot\ \varepsilon y' = y(e^y - 2) \cdot\ \varepsilon y' = (y - x)^2 \cdot\ \varepsilon y' = y^2 - 4y - 5 \cdot\ \varepsilon y' = y - x^2$.

- Exercice 5 : Etablir la différence entre les solutions des équations sur $[0, 1]$ avec $y(0) = 0.1$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = \frac{y}{1+x} + x^2 \\ y' = \frac{y}{1+x} + x^2 + 0.01 \sin x \end{array} \right. \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = \frac{1}{3} \arctan xy \\ y' = \frac{1}{3} \arctan xy + 0,001 e^{-x^2} \end{array} \right.$$

- Exercice 6 : En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov , montrer qu'une solution du système : $\left\{ \begin{array}{c} x' = -y \\ y' = x \end{array} \right.$ qui satisfait aux conditions $x(0) = 0, y(0) = 0$ est stable mais non asymptotiquement .

- Exercice 7 : Définir la nature du point de repos $(0, 0)$ des systémes suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - y \\ y' = 2x + y \end{array} \right. , \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{c} x' = 3x + y \\ y' = -2x + y \end{array} \right. , \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x \\ y' = 3y \end{array} \right. .$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = -x + z \\ y' = -2y - z \\ z' = y - z \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} x' = -x + y + 5z \\ y' = -2y + z \\ z' = 3 - z \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} x' = x \\ y' = 2x - y \\ z' = x + y - z \end{array} \right.$$

- Exercice 8 : Pour quelles valeurs de α le point de repos $(0,0)$ est il stable pour les systèmes :

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -3x + \alpha y \\ y' = 2x + y \end{array} \right. . \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + \alpha y \\ y' = -2x + y \end{array} \right.$$

- Exercice 9 : Définir la nature du point de repos $(0,0)$ pour l'équation :

$\cdot\ y'' + 2\alpha y' + \beta^2 y = 0.$ avec $\alpha \succ 0$

- Exercice 10: Etudier la stabilité en première approximation de la solution nulle $x = 0, y = 0$.

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = x + 2y - \sin^2 y \\ y' = -x - 3y + x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) \end{array} \right. \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -x + 3y + x^2 \sin y \\ y' = -x - 4y + 1 - \cos^2 y \end{array} \right.$$

- Exercice 11 : Etudier la stabilité de la solution $(0,0)$ par la méthode des fonctions de Liapounov .

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -3y - 2x^3 \\ y' = 2x - 3y^3 \end{array} \right. \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -xy^4 \\ y' = yx^4 \end{array} \right. \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = x + 2y^2 \\ y' = -2y + 4yx^2 \end{array} \right. .$$

- Exercice 12 : Etudier la stabilité en première approximation de la solution nulle.

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = x + 2y - \sin^2 y \\ y' = -x - 3y + x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) \end{array} \right. \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{c} x' = -x + 3y + x^2 \sin y \\ y' = -x - 4y + 1 - \cos^2 y \end{array} \right.$$

Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Ferhat Abbas .Sétif
3ème Année licence maths .EDO.2023-2024.

Exercices de révision

- Intégrer les équations suivantes:

$\cdot \cos y' = 0.$ $\cdot\, y'' = e^y$
$\cdot\, e^{y'} = 1.$ $\cdot\, yy'' = y' + y'^2.$
$\cdot \left(1 + y'^2\right) y^2 - 4yy' - 4x = 0.$ $\cdot y'' = e^y, y(0) = 0, y'(0) = \sqrt{2}.$
$\cdot\, y'^2 - yy' + e^x = 0.$ $\cdot\, y'' = 0, y(0) - y(\pi) = 1, y'(0) + y'(\pi) = 0.$
$\cdot\, y' = \frac{1}{2x-y}.$ $\cdot y'' + 2025y = 4, y(0) - y(\pi) = 1, y'(0) + y'(\pi) = 0.$
$\cdot\, y' = \sqrt{x+y}.$ $\cdot\, y' = |y|$ $\cdot\, y' = |y-1|$

- Dans les problèmes suivants trouver les trois premiers termes du développement en série :

$\cdot\, y' = 1xy, y(0) = 0. \cdot\, y' = \sin xy, y(0) = 1. \cdot\, y'' + x \sin y, y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = 0.$

- Intégrer à l'aide de séries les équation suivantes :

$\cdot\, y' - 2xy = 0, y(0) = 1.$ $\cdot\, y'' - xy + y - 1 = 0, y(0) = y'(0) = 0.$

- Intégrer les systèmes suivants :

$\cdot \begin{cases} x' = 8y - x \\ y' = x + y \end{cases}, \begin{cases} x' = y + x + 1 \\ y' = -2x + 4y + t \end{cases}.$

$\cdot \begin{cases} x' = -y + 2x + z \\ y' = x + z \\ z' = y - 2z - 2x \end{cases}, \begin{cases} x' = -y + 2x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = -y + 2z + x \end{cases}.$

- Etudier la stabilité des systèmes et des équations .

$\cdot\, y' = 1 - y^2.$
$\cdot\, y' = 1 + x - y$,avec $y(0) = 0$
$\cdot\, y' = \sin^2 y$
$\cdot \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$,avec $x(0) = y(0) = 0.$

- Etudier la stabilité en première approximation de la solution nulle.

$\cdot \begin{cases} x' = x + 2y - \sin^2 y \\ y' = -x - 3y + x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) \end{cases}$ $\cdot \begin{cases} x' = -x + 3y + x^2 \sin y \\ y' = -x - 4y + 1 - \cos^2 y \end{cases}$