Mécanique des fluides
Cour et exercices

Université Ferhat Abbas

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides.

C’est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes.

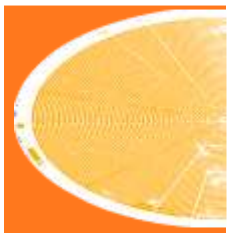
Elle comprend deux grandes sous branches:

-la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.

-la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

-La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie.

Sommaire



1

Introduction générale

- **Milieu continu**
- **Notion de fluide newtonien et non newtonien**
- **Notion de particule fluide**
- **Notion de milieu fluide**
- **Les forces volumiques et les forces surfaciques**

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C’est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler.

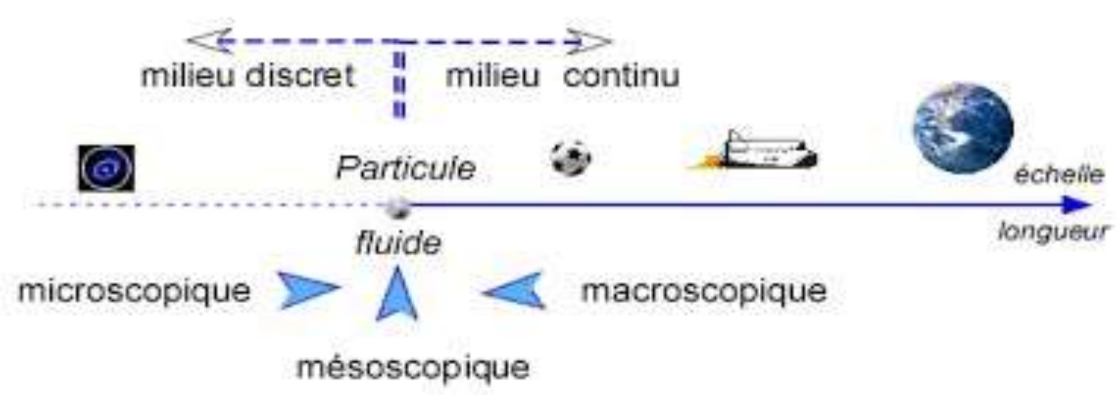
Les forces de cohésion entres particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple: les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes.

On insiste sur le fait qu’un fluide est supposé être un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Par exemple, une gouttelette de brouillard, aussi petite soit-elle à notre échelle, est toujours immense à l'échelle moléculaire. Elle sera toujours considérée comme un milieu continu. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Milieu continu

Le concept du milieu continu suppose une distribution continue de la masse et toutes les grandeurs macroscopique (vitesse, pression, masse volumique,…) Ces grandeurs sont des fonctions continues des variables d'espace et du temps.

On distingue 3 échelles pour décrire un fluide :
-L'échelle microscopique : molécules et atomes
-L'échelle macroscopique : quelques mm à quelques Km
-L'échelle mesoscopique : entre les deux



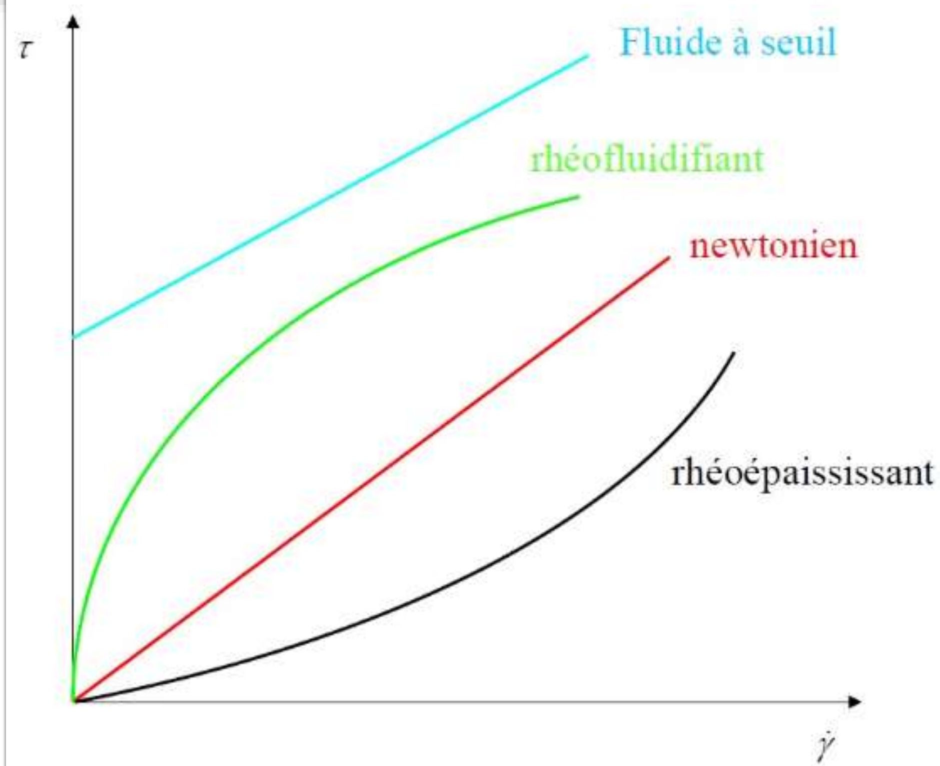
Notion de fluide newtonien et non newtonien

Un **fluide** dont la viscosité ne change pas même si la force exercée sur celui-ci change **est** appelé « **fluide newtonien** »

Exemple de fluides newtoniens : l'eau, l'huile végétale, la glycérine

un **fluide** dont la viscosité change lorsque la force exercée sur lui change **est** appelé « **fluide non-newtonien** »

Exemple de fluides non newtoniens :
Le pétrole, le fromage, le ketchup, le sang



-Comportement rhéologique des fluides-

Notion de fluide newtonien et non newtonien

Fluide parfait En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement (viscosité nulle).

Fluide réel **(viscosité non nulle)** Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prise en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide. C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait. La statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits.

Notion de fluide newtonien et non newtonien

Fluide incompressible Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

Fluide compressible Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

Grandeurs physiques importantes en mecanique des fluides

Pression *p* [Pa]
La pression est une quantité scalaire, fonction de plusieurs variables comme l'altitude.
La pression a la dimension d'une force par unité de surface [N/m^2]. La pression est isotrope : elle ne dépend pas de la direction.
-Les efforts de pression s'exercent :
*au sein d'un fluide
*à une interface entre 2 fluides
*contre une paroi solide
On note p_{atm} ou p_a la pression atmosphérique. La pression atmosphérique normalisée vaut

$$p_{atm} = 1{,}0125.10^5 \text{ Pa}$$

Masse volumique *ρ* [kg.m^{-3}]
La masse volumique *ρ* d'un fluide dépend de la température T et de la pression p. La modification de la masse volumique est due à deux contributions : la dilatabilité (induite par une variation de température) et la compressibilité (induite par une variation de pression).
La masse volumique des liquides est de l'ordre de 10^3 kg.m^{-3} alors que celle des gaz est de l'ordre de 1 kg.m^{-3}

GRANDEURS PHYSIQUES IMPORTANTES EN MECANIQUE DES FLUIDES

Densité Dans le cas des liquides en prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

$$\boxed{d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}}$$

Viscosité C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement.

Viscosité dynamique µ (Pas)

Viscosité cinématique υ (m²/s)

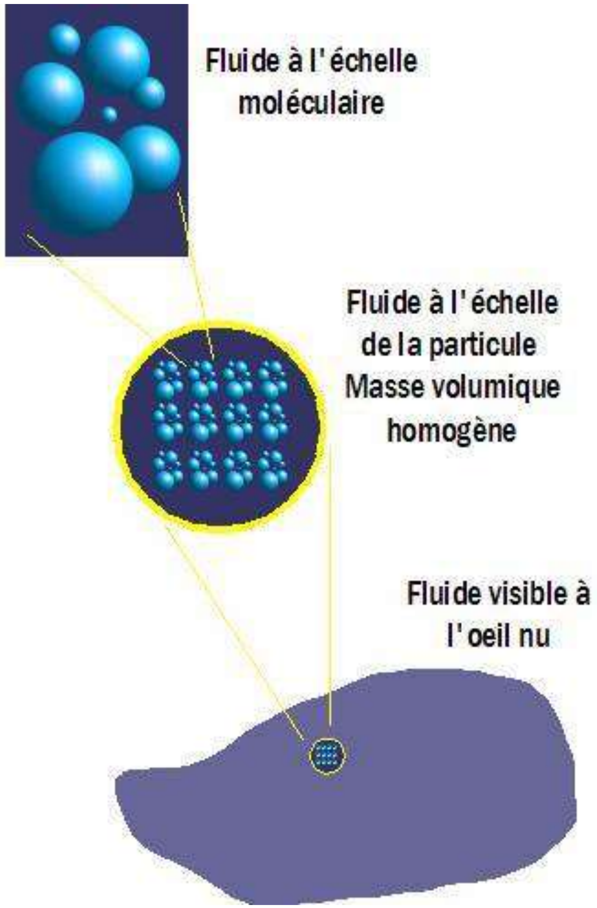
$$\boxed{\upsilon = \frac{\mu}{\rho}}$$

Notion de particule fluide

Une particule fluide

c'est un volume élémentaire de fluide (échelle mésoscopique ≈ μm^3).

C'est une échelle d'une part suffisamment petite pour que les grandeurs étudiées (pression, température, masse volumique…) puissent être considérées comme ponctuelles (assimilées au point matériel M) et d'autre part suffisamment grande pour pouvoir considérer le milieu comme continu, c'est-à-dire ne pas avoir à faire une étude discrète de toutes les molécules



-Fluide a différentes échelles-

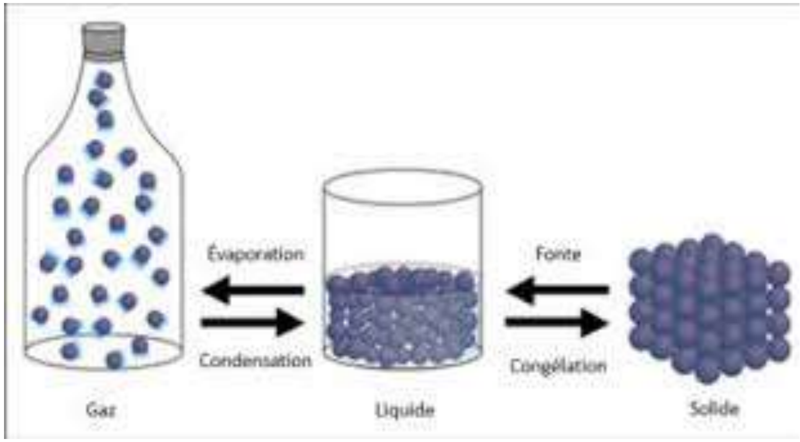
Notion de milieu fluide

Distinction entre liquide et gaz : il existe 2 états fluides de la matière :

L'état gazeux et l'état liquide.

Les liquides : n'ont pas de forme propre mais ont un volume propre,
les liquides sont : Incompressible
Ont une masse volumique importante

Les gaz : n'ont pas ni un volume propre ni une forme propre,
les gaz sont : Compressible
Ont une masse volumique négligeable



-Etat de la matière-

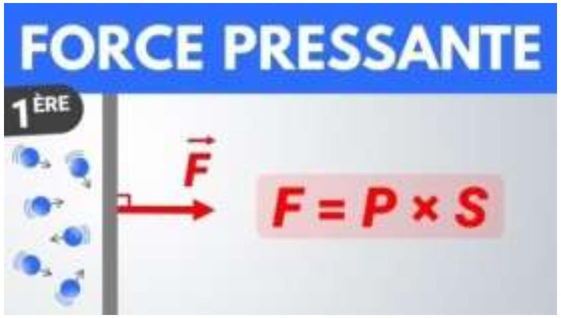
Les forces volumiques et les forces surfaciques

Quel sont les forces qui s'exercent sur la particule de fluide ?

Au sein d'un fluide parfait, on distingue deux types de forces :
-Les forces dont l'origine est extérieure au fluide comme la pesanteur (forces de volume)
-Les forces de contact entre particules de fluide que l'on appelle forces internes (force de surface).

Les forces de volume:
celle qui est exercé sur le fluide par un matériau situé en dehors du domaine fluide et pénètrent à l'intérieur assez loin par rapport aux dimensions microscopiques (force de volume),

Les forces de surface:
Elle se manifeste à travers les forces de frottement s'exerçant entre les particules fluides en mouvement relatif. Associées aux forces de pression (normales aux surfaces), ces forces de frottement forment des contraintes comportant une composante normale et une composante tangentielle (parallèle à la surface).



-forces de surfaces-

Conclusion

Les fluides peuvent être classés en fluides parfaits (sans frottement), fluides réels (avec frottement), fluides incompressibles (liquides) et fluides compressibles (gaz).
Les fluides sont caractérisés par les propriétés suivantes:

la masse volumique,
la densité
la viscosité.

Ces propriétés seront utilisées ultérieurement. Le comportement mécanique et les propriétés physiques des fluides compressibles et ceux des fluides incompressibles sont différents. En effet, les lois de la mécanique des fluides ne sont pas universelles. Elles sont applicables uniquement pour une classe de fluides donnée.

Exercices d'application

ENONCE

Déterminer la viscosité dynamique de l'huile d'olive sachant que sa densité est 0,918 et sa viscosité cinématique est 1,089 Stockes. avec $10^{-4}\,m^2/s = 1\,stockes$

ENONCE

Du fuel porté à une température T=20°C a une viscosité dynamique $\mu = 95.10^{-3}\ Pa.s$. Calculer sa viscosité cinématique υ en stockes sachant que sa densité est d=0,95.

On donne la masse volumique de l'eau est $\rho_{eau} = 1000\,kg/m^3$

Exercices d'application

REPONSE **Exo1**

$\boxed{\mu = \rho.\upsilon}$ A.N. $\boxed{\mu = 918.1{,}089.10^{-4} = 0{,}1\ Pa.s}$

Exercices d'application

REPONSE Exo2

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho_{eau}.d}}$$ A.N. $$\boxed{\nu = \frac{95.10^{-3}}{1000.0,95} = 1.10^{-4}\,m^2/s = 1\,stockes}$$

2

Statique des fluides

- Equation fondamentale de la statique des fluides
- Statique des gaz
- Poussée d’Archimède

Lors d’une plongée sous marine, on constate que la pression de l’eau augmente avec la profondeur. La pression d’eau exercée sur un sous-marin au fond de l’océan est considérable.

De même, la pression de l’eau au fond d’un barrage est nettement plus grande qu’au voisinage de la surface.

Les effets de la pression doivent être pris en considération lors du dimensionnement des structures tels que les barrages, les sous marins, les réservoirs… etc.

Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures.

Ce chapitre est consacré à l’étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés.

La notion de pression, le principe d’Archimède et la relation fondamentale de l’hydrostatique y sont expliqués. Le calcul des presses hydrauliques, la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir…etc., sont basés sur les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides.

Qu'est-ce qu'un écoulement ? L’écoulement est le mouvement du fluide, caractérisé par un champ de vitesse.

La **statique des fluides** est un domaine de la mécanique des fluides qui s’intéresse aux caractéristiques d’un fluide au repos, sans écoulement.

Dans ce cas on a :

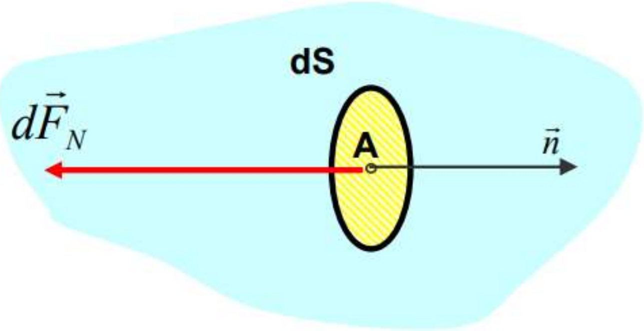
-la vitesse de toutes les particules fluide est nulle

-la contrainte est strictement normale

La Pression P

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :

$$\boxed{P_A = \frac{\left\| \overrightarrow{dF_N} \right\|}{dS}}$$



où :

dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

$\vec{n}$: Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

$\overrightarrow{dF_N}$: Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

P_A : pression en A (en Pascal),

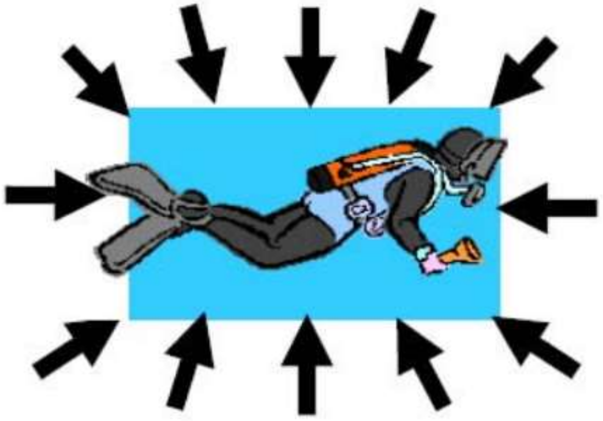
Sur la surface de centre A, d'aire dS, orientée par sa normale extérieure $\vec{n}$, la force de pression élémentaire $\overrightarrow{dF}$ s'exprime par :

$$\boxed{\overrightarrow{dF_N} = -P_A . dS . \vec{n}}$$

La Pression P

Exemple : Chaque cm² de surface de notre peau supporte environ 1 kg (force) représentant le poids de l'atmosphère. C'est la pression atmosphérique au niveau de la mer. Nous ne la ressentons pas car notre corps est incompressible et ses cavités (estomac, poumons, etc.) contiennent de l'air à la même pression.

Si on s'élève de 5 000 m, la pression atmosphérique est deux fois plus faible qu'au niveau de la mer car la masse d'air au-dessus de notre tête est alors moitié moindre.
D'où la nécessité d'une pressurisation des avions.
En plongée sous-marine, pour mesurer la pression, on utilise le plus souvent le bar: 1 bar = 1 kg / cm2 .



Equation fondamentale de la statique des fluides

Plus on descend en profondeur, plus la pression est élevée car il faut tenir compte du poids de l'eau au-dessus de nous : à 10 mètres de profondeur, chaque cm² de notre peau supportera un poids égal à : 1 cm² X 10 m (profondeur) = 1 cm² X 100 cm = 1000 cm3 = l'équivalent du poids d'1 litre d'eau.
Le poids d'un litre d'eau douce est égal à 1kg. Le poids d'un litre d'eau de mer est un plus important (à cause du sel qu'elle contient) : 1,026 kg. En négligeant cette différence, on considérera que de manière générale un litre d'eau pèse 1 kg. Par conséquent, la pression due à l'eau à 10 m de profondeur est donc de 1 kg / cm2 , c'est-à-dire 1 bar.
Si on descend à nouveau de -10 m, la pression augmentera à nouveau de 1 bar. C'est ce qu'on appelle la pression hydrostatique (pression due à l'eau). On l'appelle aussi pression relative car c'est une pression par rapport à la surface.

La pression hydrostatique (comme la pression atmosphérique) s'exerce dans toutes les directions (et pas simplement de haut en bas). Remarque : L'unité internationale de pression est le Pascal : 1 Pa = 1 N/m². Cette unité est très petite. On utilise le plus souvent ses multiples. En construction mécanique, résistance des matériaux , etc.,l'unité utilisée est le méga pascal : 1 MPa= 1 N/mm2 =10^6 Pa En mécanique des fluides on utilise encore très souvent le bar. Le bar est égal à peu près à la pression atmosphérique moyenne :
1 bar = 10^5 Pa.

Equation fondamentale de la statique des fluides

Dans un fluide au repos L'EFSF s'écrit comme suit :

$$dP = -\rho g dz$$

Avec *P* est la pression, ρ est la masse volumique
z est la hauteur et g est l'accélération gravitationelle

Pour l'hydrostatique ou les liquides, le fluide est incompressible, ($\rho = cte$)
L'EFSF devient

$$\Rightarrow \Delta P = -\rho g \Delta z$$

Equation fondamentale de la statique des gaz

Pour les gaz $\Rightarrow \rho \neq cte \quad dP = -\rho g dz$
on doit chercher la relation liant P, ρ et Z

Exemple des gaz parfait : l'équation d'état s'écrit : **PV=nRT** ou
R : cte des gaz parfait = $8{,}314 JK^{-1}mol^{-1}$

L'EFSF devient

$$dP = -\rho g dz \Rightarrow dP = -\frac{PM}{RT} g dz \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

$$\Rightarrow P = P_0 \exp(-\frac{Mg}{RT}(z - z_0)) \quad P_0 \rightarrow z = z_0$$

Si par exemple, $T = T_0 - az$ on a trouver $\Rightarrow P = P_0 (\frac{T_0 - az}{T_0})^{(\frac{Mg}{Ra})}$

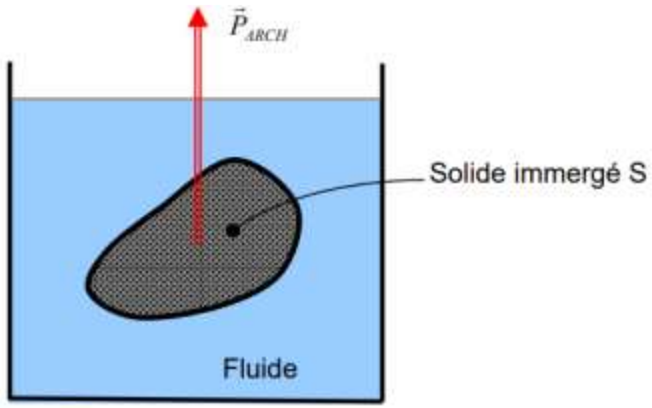
Poussée d'Archimède

DÉFINITION:

Tout corps solide plongé dans un liquide en équilibre, supporte des pressions exercé par le liquide sur sa surface, une poussée verticale dirigée, vers le haut et égale au poids du volume de liquide déplacé.

Remarque : pour savoir si le corps coule ou flotte on calcul son poids apparent ou sa flottabilité

Poussée d'Archimède = $P_{réel} - P_{apparent}$



$P_{réel}$: poids du corps dans l'air

$P_{apparent}$: poids du corps dans l'eau

Si : $P_{réel} > P_{apparent}$: la flottabilité <0 , donc le solide **coule**

Si : $P_{réel} < P_{apparent}$: la flottabilité >0 , donc le solide **flotte**

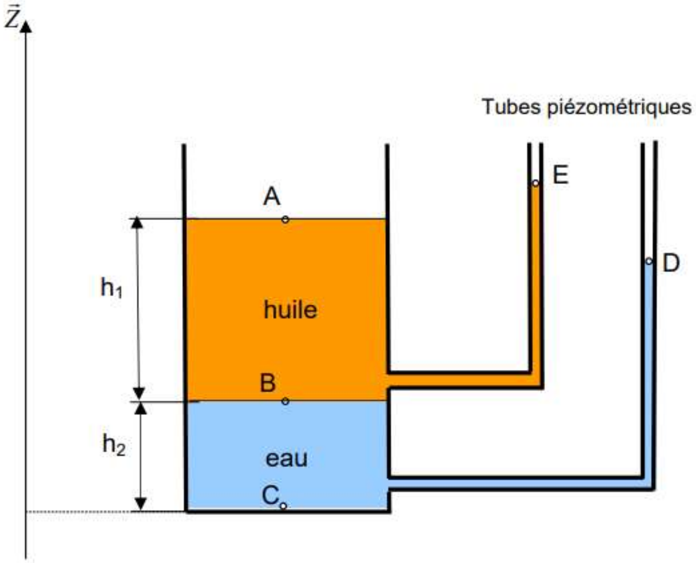
Si : $P_{réel} = P_{apparent}$: la flottabilité = 0 , donc le solide est en **équilibre**.

Exercices

ENONCE

La figure ci-dessous représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles :

- de l'huile de masse volumique ρ_1=850 kg/m^3 sur une hauteur h_1=6 m,
- de l'eau de masse volumique ρ_1=1000 kg/m^3 sur une hauteur h_2=5 m.



1) B et A. En déduire la pression P_B (en bar) au point B.
2) A et E. En déduire le niveau de l'huile Z_E dans le tube piézométrique.
3) C et B. En déduire la pression P_C (en bar) au point C.
4) C et D. En déduire le niveau de l'eau Z_D dans le tube piézométrique.

On désigne par:

- A un point de la surface libre de l'huile,
- B un point sur l'interface entre les deux liquides,
- C un point appartenant au fond du réservoir
- D et E les points représentants les niveaux dans les tubes piézimétriques,
- $(O, \vec{Z})$ est un axe vertical tel que Z_C=O.

Exercices

REPONSE

1) RFH entre B et A : $P_B - P_A = \rho_1 g(Z_A - Z_B)$ Or $P_A=P_{atm}$ et $Z_A-Z_B=h_1$

Donc $\boxed{P_B = P_{atm} + \rho_1 g.h_1}$ A.N. $\boxed{P_B = 10^5 + 850.9{,}81.6 = 150031\ Pa = 1{,}5\ bar}$

2) RFH entre A et E : $P_A - P_E = \rho_1 g(Z_E - Z_A)$ Or $P_A=P_E=P_{atm}$

Donc $\boxed{Z_E = Z_A = h_1 + h_2}$ A.N. $\boxed{Z_E = 6 + 5 = 11\ m}$

3) RFH entre C et B : $P_C - P_B = \rho_2 g(Z_B - Z_C)$ Or $Z_B-Z_C=h_2$

Donc $\boxed{P_C = P_B + \rho_2 g.h_2}$ A.N. $\boxed{P_C = 150031 + 1000.9{,}81.5 = 199081\ Pa = 2\ bar}$

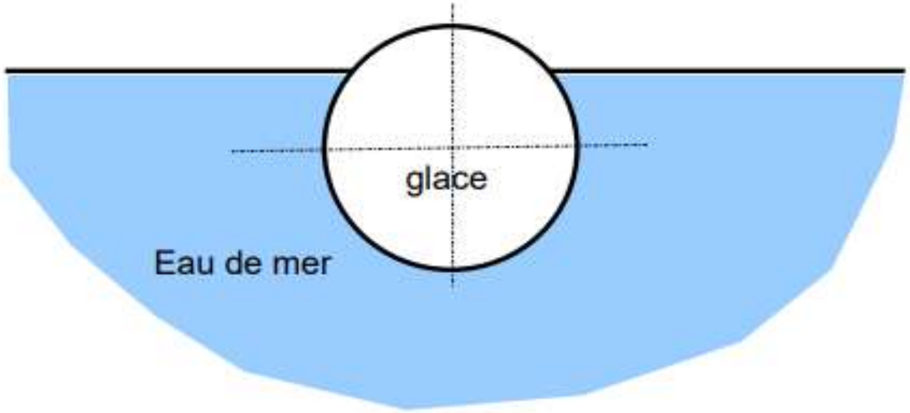
4) RFH entre C et D : $P_C - P_D = \rho_2 g(Z_D - Z_C)$ Or $P_D=P_{atm}$ et $Z_C=0$

Donc $\boxed{Z_D = \dfrac{P_C - P_{atm}}{\rho_2 \cdot g}}$ A.N. $\boxed{Z_D = \dfrac{199081 - 10^5}{1000.9{,}81} = 10{,}1\ m}$

Exercices

ENONCE

La glace à -10°C a une masse volumique ρ_{glace}= 995 kg/m^3. Un iceberg sphérique de 1000 tonnes flotte à la surface de l'eau. L'eau de mer a une masse volumique ρ_{eau} = 1025 kg/m^3.



Travail demandé :

1) Déterminer la fraction F du volume immergée ?

2) Quelle sera F si la glace avait une forme cubique ?

Exercices

1) Equation d'équilibre : P_{arch}=Poids $\Rightarrow \rho_{glace}.g.V_{total} = \rho_{eau}.g.V_{immergé}$

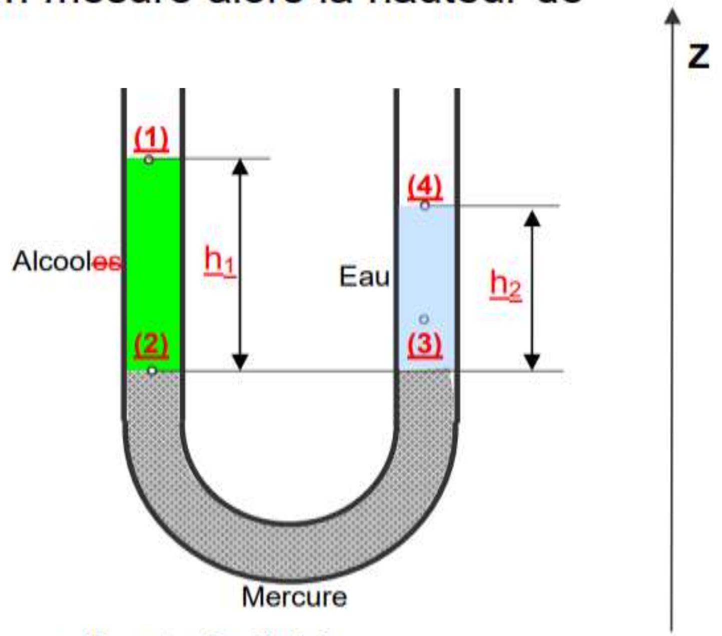
donc $\boxed{F = \frac{V_{immergé}}{V_{total}}.100 = \frac{\rho_{glace}}{\rho_{eau}}.100}$

A.N. $\boxed{F = \frac{995}{1025}.100 = 97\%}$

2) La fraction F ne dépend que du rapport des masses volumiques. Elle est indépendante de la forme. Donc F=97% si la forme était cubique.

Exercices

Un tube en U contient du mercure sur une hauteur de quelques centimètres. On verse dans l'une des branches un mélange d'eau - alcool éthylique qui forme une colonne de liquide de hauteur h_1=30 cm. Dans l'autre branche, on verse de l'eau pure de masse volumique 1000 kg/m^3, jusqu'à ce que les deux surfaces du mercure reviennent dans un même plan horizontal. On mesure alors la hauteur de la colonne d'eau h_2=24 cm.



1) Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique pour les trois fluides.

2) En déduire la masse volumique du mélange eau – alcool éthylique.

Exercices

Reponse

1) Relation fondamentale de l'hydrostatique :

Alcool : $P_2 - P_1 = \rho_{alcool}.g.h_1$

Mercure : $P_2 - P_3 = 0$

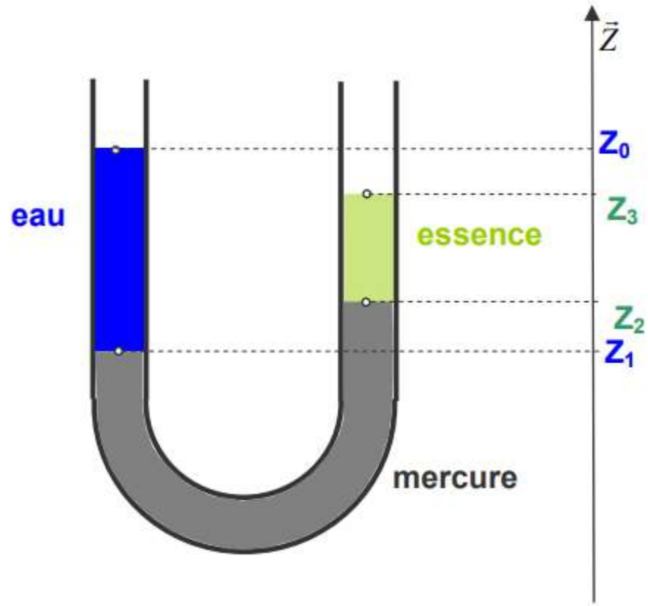
Eau : $P_3 - P_4 = \rho_{eau}.g.h_2$

2) On sait que $P_1 = P_2 = P_{atm}$ et $P_2 = P_3$ donc $\rho_{alcool}.g.h_1 = \rho_{eau}.g.h_2$

Donc $\boxed{\rho_{alcool} = \rho_{eau}.\frac{h_2}{h_1}}$ A.N. $\boxed{\rho_{alcool} = 1000.\frac{24}{30} = 800\ kg/m^3}$

Exercices

On considère un tube en U contenant trois liquides:



- de l'eau ayant une masse volumique ρ_1 = 1000 kg/m^3,
- du mercure ayant une masse volumique ρ_2 = 13600 kg/m^3,
- de l'essence ayant une masse volumique ρ_3 = 700 kg/m^3.

On donne :

$Z_0 - Z_1 = 0{,}2$ m

$Z_3 - Z_2 = 0{,}1$ m

$Z_1 + Z_2 = 1{,}0$ m

On demande de calculer Z_0, Z_1, Z_2 et Z_3.

Exercices

REPONSE

D'après (RFH), chapitre 2, on peut écrire:

$P_1 - P_0 = \rho_1.g.(Z_0 - Z_1)$

$P_2 - P_1 = \rho_2.g.(Z_1 - Z_2)$

$P_3 - P_2 = \rho_3.g.(Z_2 - Z_3)$

Puisque que $P_0 = P_3 = P_{atm}$, en faisant la somme de ces trois équations on obtient :

$\rho_1.(Z_0 - Z_1) + \rho_2.(Z_1 - Z_2) + \rho_3.(Z_2 - Z_3) = 0$

$\Rightarrow \quad (Z_2 - Z_1) = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}.(Z_0 - Z_1) - \dfrac{\rho_3}{\rho_2}.(Z_3 - Z_2)$ A.N: $(Z_2 - Z_1) = 0{,}0096$ m

or $(Z_1 + Z_2) = 1{,}0$ m donc $\boxed{Z_2 = 0{,}5048 \text{ m}}$ et $\boxed{Z_1 = 0{,}4952 \text{ m}}$

$(Z_3 - Z_2) = 0{,}1$ m donc $\boxed{Z_3 = 0{,}6048 \text{ m}}$

$(Z_0 - Z_1) = 0{,}2$ m donc $\boxed{Z_0 = 0{,}6952 \text{ m}}$

3

Cinématique des fluides parfaits

- **Description du mouvement**
- **Lagrange**
- **Euler**
- **Dérivée particulaire**

Dans ce chapitre, nous allons étudier le fluide et son écoulement indépendamment des forces responsables de cet écoulement.

Notion de champs

Par champs mathématique, on entend toute fonction de point, et éventuellement du temps, définis dans une certaine région de l’espace, un champs peut être scalaire ou vectoriel.

Exemple : en mécanique des fluides, on parlera de champs de pressions, de température, masse volumique (champs scalaire de l’écoulement), ou de vitesse, accélération, … (champs vectoriel de l’écoulement)

Pour visualiser le champs (répartition spatiale), d’une grandeur scalaire f(x,y,z). on fait appelle à la notion de ligne (2 dimensions), ou surface (3D), équipotentielle c-a-d objets en tout points desquels la fonction reste constante.

Dans le cas d’un champ vectoriel, une représentation classique se fait par ligne de champs, courbe dont la tangente locale est par définition colinéaire au champs au même point.

En mécanique des fluides les fonctions seront aussi variables dans le temps ce qui amènera à bien distinguer les propriétés géométrique et l’évolution cinématique.

Description du mouvement

La description lagrangienne : dans cette description l'observateur suit chaque particule à partir de l'instant initial, chaque particule ne sera repéré que par son point de départ et par l'instant d'observation

a $t_0 \rightarrow M_0(a,b,c)$, à l'instant $t \rightarrow M(x,y,z)$

Le mouvement du fluide est connu si on a les relations

$$\begin{cases} x = f_1(a,b,c,t) \\ y = f_2(a,b,c,t) \\ z = f_3(a,b,c,t) \end{cases}$$

La description du mouvement est par conséquent donnée par l'équation :

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0,t) \\ ou \\ x_i = x_i(a,b,c,t) \end{cases}$$

Les 4 variables indépendantes (a,b,c,t), constituent les variables de Lagrange

Description du mouvement

Remarque : par définition, la valeur d'une fonction définit en variable de lagrange est toujours relative à une même particule.

Vitesse et accélération :

La vitesse et l'accélération de la particule fluide A(a,b,c), l'instant t sont donnée :

$$\vec{V}(\vec{r_0},t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}(\vec{r_0},t)}{\partial t}$$

$$\vec{\gamma}(\vec{\gamma_0},t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}(\vec{v_0},t)}{\partial t}$$

Description du mouvement

Notion de trajectoire :

Pour la description de Lagrange c'est l'évolution de la position des particules qui permet la description de l'écoulement.

Le lieu géométrique des positions successives occupées par une particule fluide constitue ce qu'on appelle la trajectoire de cette particule.

L'équation de la trajectoire est définie :

$$\frac{dx}{U(a,b,c,t)} = \frac{dy}{V(a,b,c,t)} = \frac{dz}{W(a,b,c,t)} = dt$$

Ça représente une prise de photo avec un temps de pause infini.

Description du mouvement

<u>**Description Eulérienne :**</u> cette fois l'observateur est placé en un point M fixe du repère, et regarde passer les particules fluides devant lui.

A deux instants différents ce n'est pas la même particule fluide qui occupe la même position.

Autrement la description de l'écoulement consiste établir à un instant t donné, l'ensemble des grandeurs (vitesse, accélération, ..), associé à chaque point de l'espace occupé par le fluide, a chaque instant t.

l'écoulement des fluides est décrit au moyen d'un champ de vecteurs de vitesse (photo instantanée de l'écoulement -radar-)

Description du mouvement

<u>Ligne de courant :</u> on appelle ligne de courant la courbe qui en chacun de ses points est tangente aux vecteurs vitesse.

<u>Remarque :</u> les lignes de courant évoluent dans le temps au même titre que le champs de vecteurs vitesse.

La ligne de courant est définit comme $\overrightarrow{dl} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

Si : $\overrightarrow{dl}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \qquad \vec{V}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

L'équation de ligne de courant est la suivante :

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

Dérivée particulaire

Dérivation particulaire : les variables d'Euler n'étant pas liées à une même particule fluide au cours du temps. Si le champ Eulerien de la vitesse est $\vec{V}(\vec{r},t)$, $\vec{\gamma}(\vec{r},t)$ est celui de l'accélération.

il est clair que $\vec{\gamma}(\vec{r},t) \neq \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{t}}$ car $\vec{V}(\vec{r},t)$ et $\vec{V}(\vec{r},t+dt)$ sont des vitesses de particules fluide différentes.

or on cherche le taux de variation de la vitesse d'une même particule, on est donc obligé de revenir à la description de Lagrange .

,

Dérivée particulaire

Dérivation Particulaire d'une fonction scalaire : soit $f(x, y, z, t)$ une fonction numérique des variables d'Euler x, y, z, t , sa différentielle vaut

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Ce qui s'écrit :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, f . \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$$

$\frac{\partial f}{\partial t}$ est la dérivée locale : ça représente le taux de variation au cours du tempsde la grandeur en un point fixe de l'espace.

$\overrightarrow{grad}\, f . \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ représente le taux de variation dans l'espace de la grandeur à un instant t.

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} Vx + \frac{\partial f}{\partial y} Vy + \frac{\partial f}{\partial z} Vz$$

,

,

Dérivée particulaire

Exemple La masse volumique $\rho(x,y,z,t)$

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t}dt + \frac{\partial\rho}{\partial x}dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}dz$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}Vx + \frac{\partial\rho}{\partial y}Vy + \frac{\partial\rho}{\partial z}Vz$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\rho$$

,

,

Dérivée particulaire

Dérivation Particulaire d'une fonction vectorielle :

soit $\vec{V}(x, y, z, t)$ une fonction vectorielle des variables d'Euler $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x(x, y, z, t) \\ V_y(x, y, z, t) \\ V_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}$

la dérivée particulaire : $$\frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{\partial V_x}{\partial t} + Vx\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + Vy\dfrac{\partial V_x}{\partial y} + Vz\dfrac{\partial V_x}{\partial z} \\ \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{\partial V_y}{\partial t} + Vx\dfrac{\partial V_y}{\partial x} + Vy\dfrac{\partial V_y}{\partial y} + Vz\dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{\partial V_z}{\partial t} + Vx\dfrac{\partial V_z}{\partial x} + Vy\dfrac{\partial V_z}{\partial y} + Vz\dfrac{\partial V_z}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\,\overrightarrow{grad})\vec{V}$$

,

,

Exercices d'application

Ecoulement	**Définition** (phrase en français)	**Définition équivalente** (relation mathématique)	**Propriété** (relation mathématique)
Stationnaire	Tous les champs eulériens sont indépendants du temps	$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$	$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{j}}) = 0$
Incompressible	Toutes les particules de fluide gardent le même volume au cours de l'écoulement	$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$	$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{v}}) = 0$
Irrotationnel	Le vecteur tourbillon est nul en tout point	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{v}}) = \vec{0}$	$\exists \phi, \vec{\mathrm{v}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)$

,

,

Exercices d'application

Exercice d'application:

Exo1:

On considère l'écoulement dont la vitesse en variables de Lagrange (a,b,c,t) a pour composantes :
Vx=-awsin(wt), Vy=awcos(wt)
Où w désigne un paramètre dimensionné non nul et t le temps.
Déterminer l'équation de la trajectoire de la particule qui, à l'instant t =0 occupe la position (a,0).

Exo2:

On considère l'écoulement bidimensionnel suivant :

$$\vec{v}(M,t) = \frac{y}{\tau}\vec{e}_x + \frac{x}{\tau}\vec{e}_y .$$

Où τ est une constante

Caractériser cet écoulement (est-il stationnaire ? incompressible ? irrotationnel ?

,

,

Exercices d'application

Exercice d'application:

Exo1:

$$\vec{V} = \begin{cases} u = 0 \\ v = 2y - z \\ w = y - 2z \end{cases}$$

L'écoulement est il :

- -Permanent ?
- -Incompressible ?
- -Irrotationnel ?

-Calculez le vecteur accélération selon Euler

-Calculez la ligne de courant de l'écoulement

Exercices d'application

Exercice d'application:
Exo2:

$$\vec{V} = \begin{cases} u = 2x^2 y \\ v = -2xy^2 \\ w = 0 \end{cases}$$

-Déterminez les coordonnées *x,y,z selon lagrange* en fonction du temps pour une particule qui à instant *t=0*, se trouve en *x=y=1, z=0*.

4

Dynamique des fluides parfaits

- Equation de continuité
- Débit massique et volumique
- Equation de Bernoulli
- Applications

,

,

,

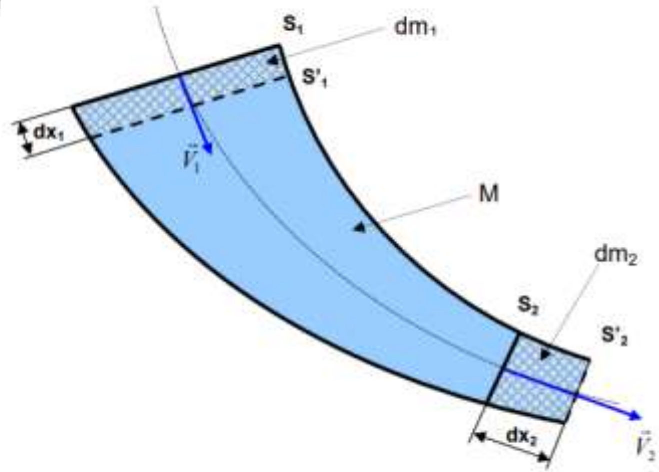
Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides en mouvement. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe. On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

-l'équation de continuité (conservation de la masse)

- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)

EQUATION DE CONTINUITE

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.



On désigne par :

-S1 et S2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t

-S'1 et S'2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant t'=(t+dt)

-V1 et V2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S1 et S2 de la veine.

-dx1 et dx2 respectivement les déplacements des sections S1 et S2 pendant l'intervalle de temps dt,

-dm1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S1 et S'1

-dm2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S2 et S'2

-M : masse comprise entre S1 et S2

-dV1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S1 et S'1

-dV2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S2 et S'2

-A l'instant t : le fluide compris entre S1 et S2 a une masse égale à (dm1+ M)

-A l'instant t+dt : le fluide compris entre S'1 et S'2 a une masse égale à (M+ dm2).

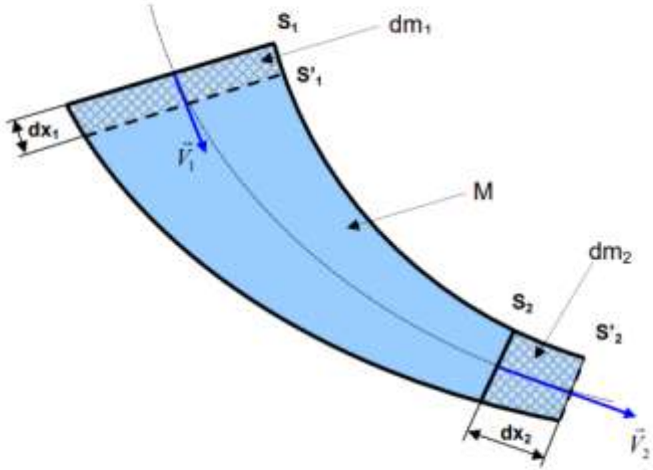
-l'équation de continuité nous donne $\boxed{S_1 . V_1 = S_2 . V_2}$

Débit massique et volumique

$$q_m = \rho . S_1 . V_1 = \rho . S_2 . V_2$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v :

$$\boxed{q_m = \rho . S . V}$$



où :

q_m : Débit massique en (kg/s)

ρ : Masse volumique en (kg/m^3)

S : Section de la veine fluide en (m^2)

V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

$$\boxed{q_v = \frac{dV}{dt}}$$

Où :

- q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dV : Volume élémentaire, en (m^3), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt,
- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

$$\boxed{q_v = S . V}$$

Débit massique et volumique

Relation entre débit massique et débit volumique

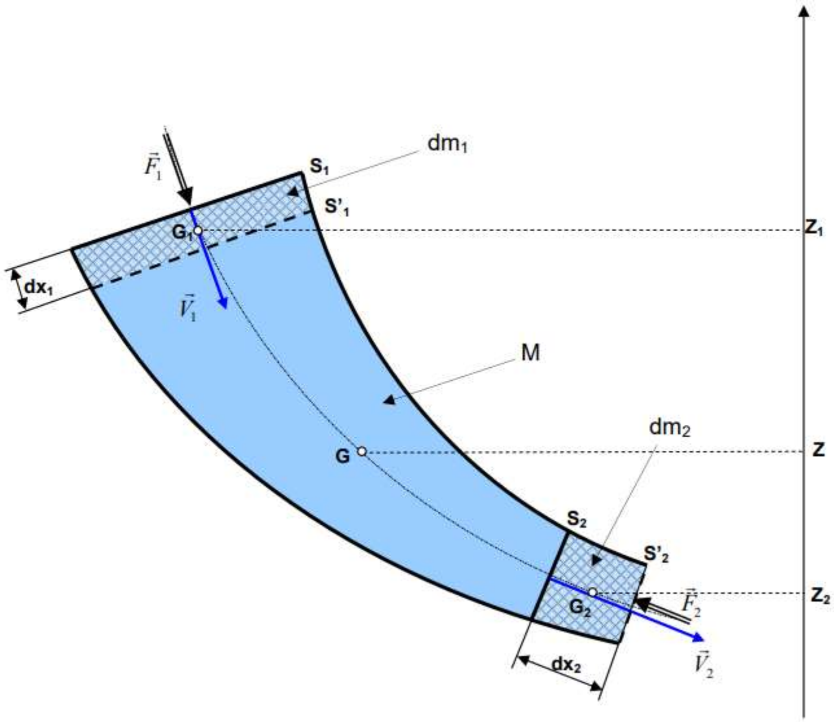
A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$$\boxed{q_m = \rho . q_v}$$

THEOREME DE BERNOULLI

On note Z1, Z2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm1, dm2 et M. On désigne par F1 et F2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S1 et S2.

on considère un fluide :
Parfait (pas de viscosité),
incompressible (ρ=cte),
écoulement permanent $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$



$$\left[gz + \frac{1}{\rho} P + \left(\frac{V^2}{2}\right) \right] = cte.\left[J/kg \right]$$

$$\left[z + \frac{1}{\rho g} P + \left(\frac{V^2}{2g}\right) \right] = cte.\left[m \right]$$

$$\left[\rho g z + P + \left(\frac{\rho V^2}{2}\right) \right] = cte.\left[Pascale \right]$$

THEOREME DE BERNOULLI

L'équation de Bernoulli traduit **la conservation de l'énergie totale**.

Interprétation physique de l'équation de Bernoulli :

$\frac{\rho V^2}{2}$ Densité volumique de l'énergie cinétique

ρgz Densité volumique de l'énergie potentielle de pesanteur

P Densité volumique de l'énergie associée aux forces de pression

Applications du théorème de Bernoulli

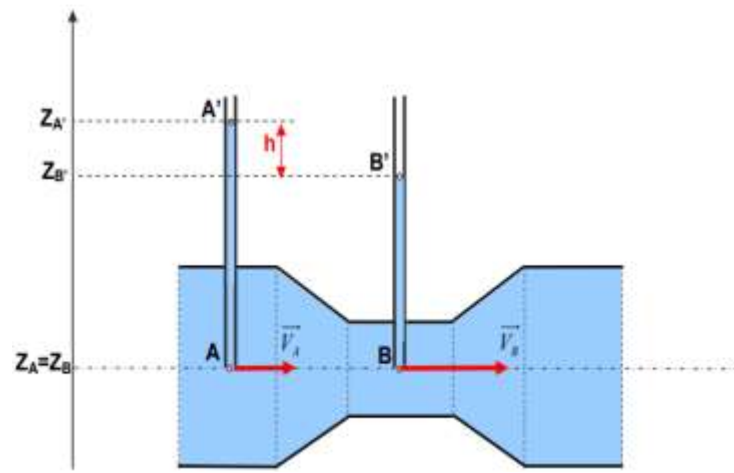
Tube de Venturi (débitmètre) : c'est un tube divergent, il est muni de 2 prise de pression statique, par l'application du Théorème de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\left[\rho g z_1 + P_1 + \left(\frac{\rho V_1^2}{2}\right)\right] = \left[\rho g z_2 + P_2 + \left(\frac{\rho V_2^2}{2}\right)\right]$$

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \left[(P_2 - P_1) = \left(\frac{\rho(V_1^2 - V_2^2)}{2}\right)\right]$$

En régime permanent et pendant une durée Δt ; toute la matière qui passe en A est égale à celle qui passe en B, on définit le débit volumique : $Q_v = S.V = cte$

$$S_1.V_1 = S_2.V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{S_1.V_1}{S_2} \Rightarrow S_1 > S_2 \Rightarrow V_1 < V_2 \quad P_2 < P_1$$



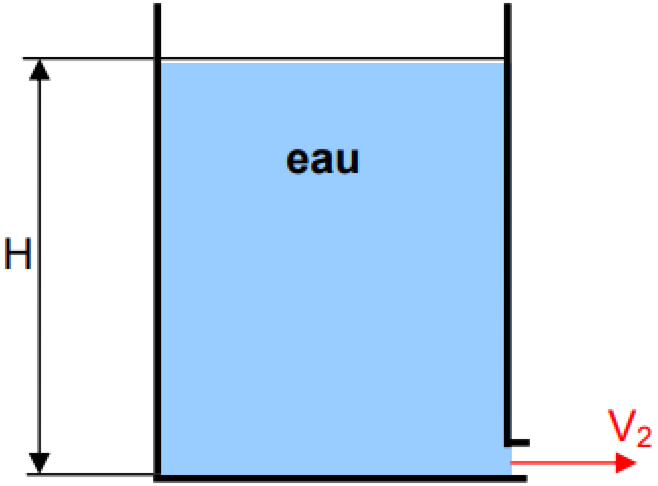
C'est l'effet Venturi , dans ce cas $V_2 = \sqrt{\dfrac{2(P_1 - P_2)/\rho}{1 - \left(\dfrac{S_2}{S_1}\right)^2}}$

Exercices d'application

Formule de Torriceli :

soit un recipient rempli de liquide et percé d'un trou, S_1 est la section de la surface S_2 section de l'orifice avec : $S_2 << S_1 \Rightarrow V_2 >> V_1$,en plus $P_1 = P_2 = P_{atm}$,par l'application du théorème de Bernoulli on considérant $V_1 \to 0$

c'est la relation de torriceli. $\Rightarrow V_2 = \sqrt{2g\Delta h}$

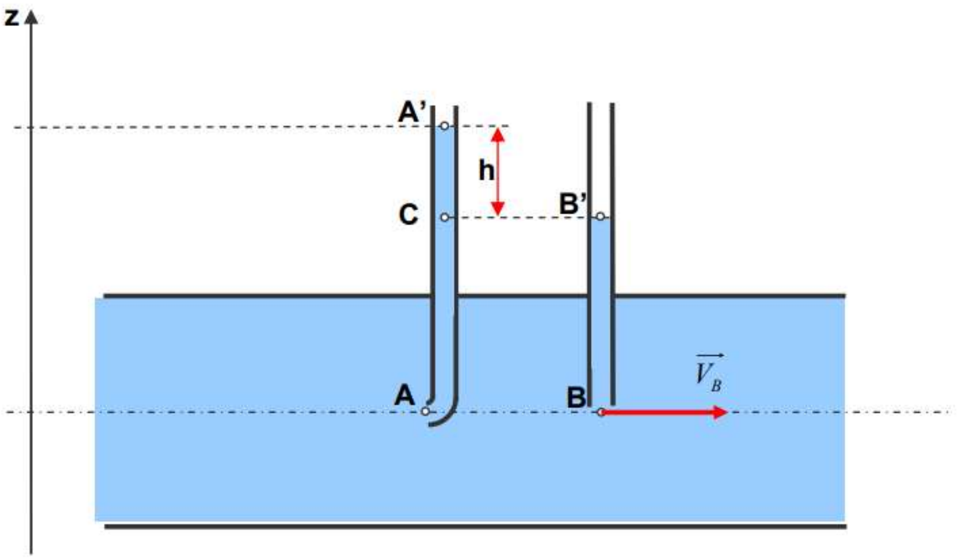


Exercices d’application

Tube de Pitot

le principe de mesure d’une vitesse ou d’un débit à partir de la pression différentielle.

Par exemple, on trouve sur les avion un instrument de mesure de la vitesse appelé « tube de Pitot » qui basé sur le même principe.



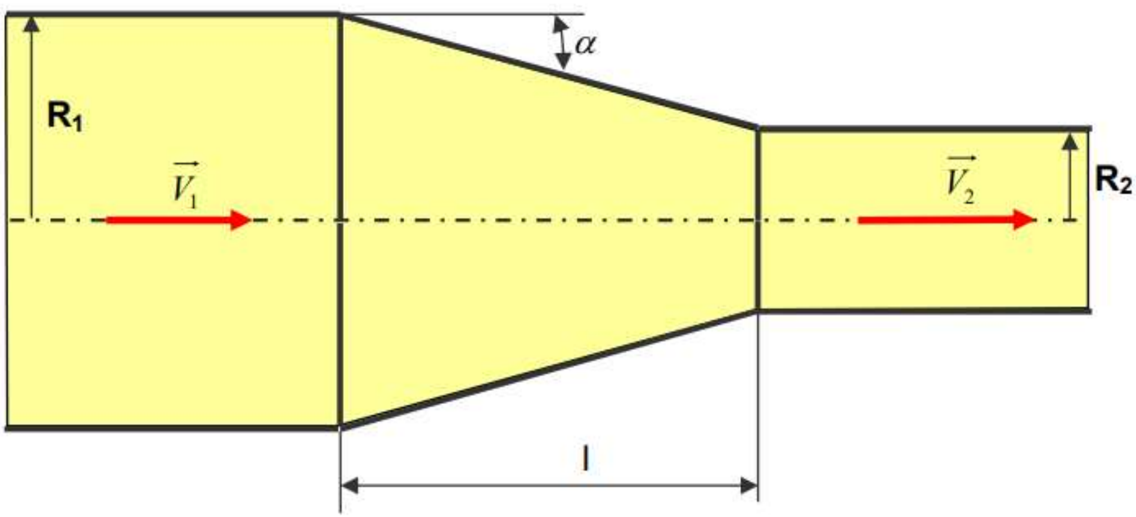
Afin de mesurer le débit volumique, la canalisation a été équipée de deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en A face au courant et l'autre en B est le long des lignes de courant,

En mesurant la dénivellation h du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse v

Exercices d'application

ENONCE

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α (schéma ci-dessus).



1) Calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).

2) Calculer (R_1 - R_2) en fonction de L et α. En déduire la longueur L. (R_1 = 50 mm, α = 15°).

Exercices d'application

REPONSE

1) On applique l'équation de continuité :

$V_1.S_1 = V_2.S_2$ ou encore $\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1}$ or $S_1 = \pi.R_1^2$ et $S_2 = \pi.R_2^2$ d'où $\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = 2}$

2) $tg\alpha = \frac{R_1 - R_2}{l}$ donc $\boxed{l = \frac{R_1 - R_2}{tg\alpha}}$ or $R_2 = \frac{R_1}{2}$ donc $l = \frac{R_1}{2.tg\alpha}$ A.N.: $\boxed{\text{L = 93,3 mm}}$.

5

Dynamique des fluides réels (visqueux)

- Pertes de charges
- Linéique
- Singulière
- Nombre de Raynolds

Dans le chapitre précédent nous avons supposé que le fluide était parfait pour appliquer l'équation de conservation de l'énergie. L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique Osborne Reynolds.

FLUIDE REEL Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité.

Pertes de charge

Lorsque le fluide est réel, la viscosité est non nulle au cours du mouvement du fluide => les différentes couches frottent les unes contre les autres et contre la paroi qui n'est pas lisse d'où il ya une perte sous forme de dégagement d'énergie, cette perte est appelée perte de charge, la relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme entre deux points, 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^{\,2}}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^{\,2}}{2g}+z_2+\Delta H_{1,2}$$

Ou $\Delta H_{1,2}$ est l'ensemble des pertes de charge entre 1, 2 exprimé en mètre. Les pertes de charge peuvent être exprimées en Pa, $\Delta P_{1,2}=\Delta H_{1,2}.\rho g$

Il ya deux sources de perte de charge.

Pertes de charge linéique h_L
Perte de charge singulière hs

Perte de charge linéique h_L

ce genre de perte de charge est causé par le frottement intérieur qui se produit dans les fluides

$$h_L = \frac{\lambda L V^2}{2gD}$$

λ le coefficient de perte de charge (déterminé par le régime d'écoulement)

V vitesse de l'écoulement

L longueur de la conduite

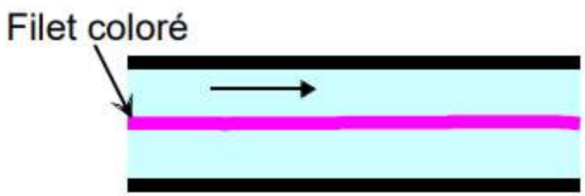
D le diamètre de la conduite

Le nombre de Reynolds

Les expériences réalisées par Reynolds en1883 lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : régime laminaire et régime turbulent :

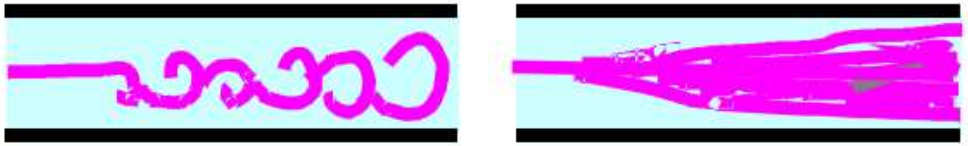
- Régime laminaire :

Les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles.



- Régime turbulent :

Les filets fluides s’enchevêtrent, s’enroulent sur eux-mêmes.



Vue instantanée

Vue en pose

Le nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds détermine le régime de l'écoulement

$$R_e = \frac{\rho VL}{\eta} = \frac{VL}{\upsilon}$$

L : dimension caractéristique (pour un tube cylindrique : L=Diamètre D)

υ : coefficient de viscosité cinématique avec : $\upsilon = \frac{\eta}{\rho}$

Pour l'écoulement laminaire ($R_e < 2000$) et λ = 64/Re

Pour l'écoulement turbulent lisse ($2000 < R_e < 10^5$), et $\lambda = 0,3 R_e^{-0,25}$

Pour l'écoulement turbulent rugueux ($R_e > 10^5$),et $\lambda = 0,7\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$ ou ε est la rugosité de la surface interne de la conduite. D est le diamètre

Perte de charge singulière hs

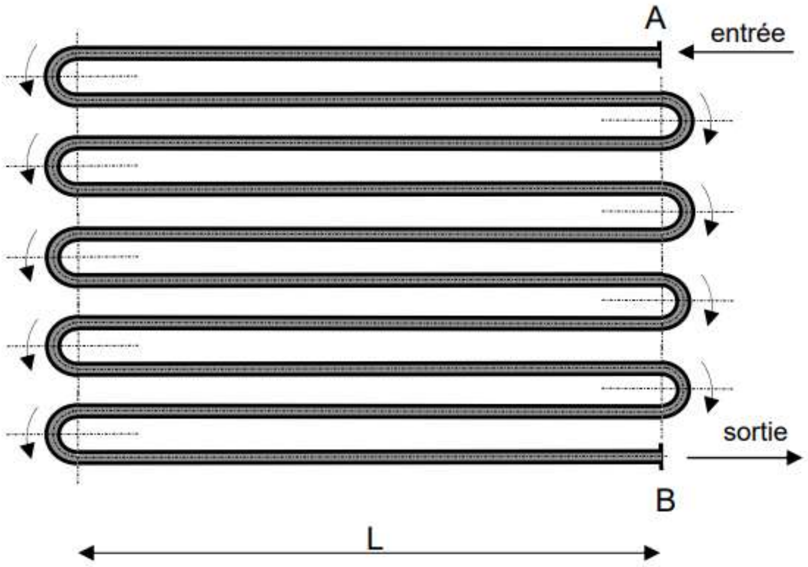
il s'agit de perte de charge dues aux formes géométriques de canalisation (obstacles, coude, élargissement, vanne…)

$$h_L = \frac{KV^2}{2g}$$

K : coefficient des pertes de charge singulière (donné par les tableaux)

V : vitesse de l'écoulement

g : l'accélération de la pesanteur



Exercices d'applications

ENONCE

Déterminer le régime d'écoulement dans une conduite de 3 cm de diamètre pour:

1) De l'eau circulant à la vitesse v=10,5 m/s et

de viscosité cinématique 1.10^{-6} m^2/s

2) Du fuel lourd à 50 °C circulant à la même vitesse

(Viscosité cinématique 110.10^{-6} m^2/s).

3) Du fuel lourd à 10 °C circulant à la même vitesse

(Viscosité cinématique 290.10^{-6} m^2/s).

Exercices d'applications

ENONCE

Du fuel lourd de viscosité dynamique $\mu = 0{,}11 \quad Pa.s$ et de densité d=0,932 circule dans un tuyau de longueur L=1650 m et de diamètre D=25 cm à un débit volumique q_v=19,7 l/s.

On donne la masse volumique de l'eau $\rho_{eau} = 1000 \quad kg/m^3$.

Travail demandé :

1) Déterminer la viscosité cinématique ν du fuel.

2) Calculer la vitesse d'écoulement V.

3) Calculer le nombre de Reynolds Re.

4) En déduire la nature de l'écoulement.

5) Déterminer le coefficient λ de pertes de charge linéaire.

6) Calculer la perte de charge J_L dans le tuyau.

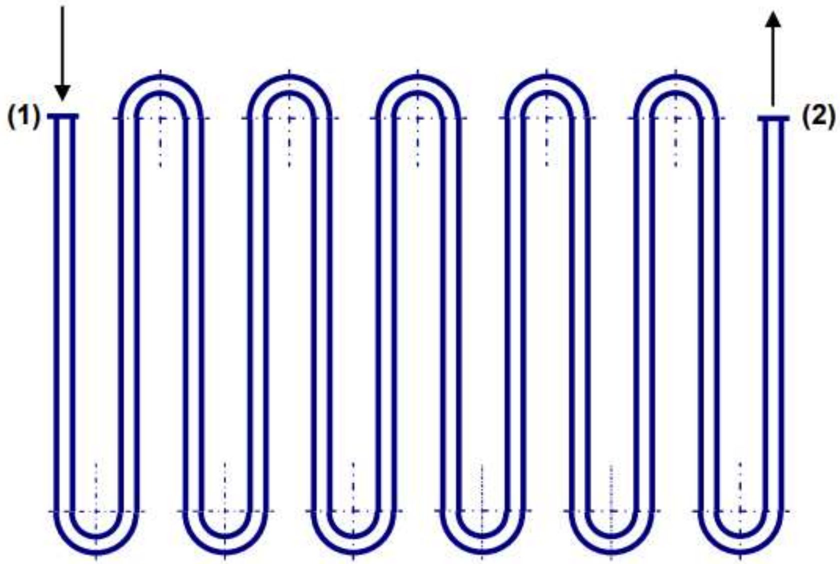
,

,

,

ENONCE

Un liquide de refroidissement circule dans un radiateur en forme de serpentin.



Le serpentin comprend les éléments suivants :

- 12 tubes rectilignes de diamètre d=10 mm et de longueur 1 m chacun.
- 11 coudes à 180^0 ayant chacun un coefficient de perte de charge $K_s = 0{,}4$,

La conduite transporte un débit volumique q_v=0,25 l/s. La pression en entrée est P_1= 3 bars.

On donne les caractéristiques du fluide de refroidissement:

- viscosité dynamique : $\mu = 10^{-3}$ Pa.s.
- masse volumique : $\rho = 1000$ kg/m^3.

Travail demandé :

1) Calculer la vitesse V d'écoulement du fluide dans la conduite en (m/s).

2) Calculer le nombre de Reynolds R_e.

3) Préciser la nature de l'écoulement.

4) Déterminer le coefficient de perte de charges linéaire λ, en précisant la formule utilisée.

5) Calculer les pertes de charges linéaires J_L en J/kg.

6) Calculer les pertes de charges singulières J_S en J/kg.

7) Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2) pour déterminer la pression de sortie P_2.

5

Conclusion et Perspectives