

Support de cours Mathématiques appliquées

Spécialité : Master 1 Physique Médicale

Faculté des Sciences, Département de Physique
Université de Sétif¹

SEIF EDDINE CHOUABA²

22 mai 2022

1. El Bez, Sétif 19000 Algérie

2. E-mail: seif.chouaba@univ-setif.dz

Table des matières

1	Algèbre linéaire avancée	3
1.1	Généralités sur le calcul matriciel	4
1.2	Opérations sur les matrices	4
1.2.1	Egalité des matrices	4
1.2.2	Sommes et différences	5
1.2.3	Produit d'une matrice par un nombre	5
1.2.4	Multiplication des matrices	5
1.2.5	Transposée d'une matrice	6
1.3	Matrice Inverse	6
1.3.1	Déterminant d'une matrice	6
1.4	Définition et calcul de la matrice inverse	7
1.4.1	Définitions	7
1.4.2	Calcul de l'inverse d'une matrice carrée	8
1.5	Normes de matrices	9
1.5.1	Norme euclidienne d'un vecteur	9
1.5.2	Norme d'une matrice	9
1.6	Valeurs et vecteurs propres de matrice	9
1.7	Méthode des moindres carrés linéaires	10
1.7.1	Principes généraux	10
1.7.2	Modèle linéaire par rapport aux paramètres (LP)	11
1.7.3	Critère quadratique pour les modèles LP	11
1.7.4	Modèle LP et moindres carrés	12
1.7.5	Qualité de l'approximation	15
2	Transformations linéaires et Echantillonnage	17
2.1	Classification des signaux	18
2.1.1	Signaux déterministes et signaux aléatoires	18
2.1.2	Signaux continus et signaux discrets	18
2.1.3	Signaux pairs et signaux impairs	18
2.1.4	Signaux périodiques et signaux apériodiques	18
2.1.5	Signaux à énergie finie et à puissance finie	19
2.2	Rappel sur les signaux sinusoïdaux	19
2.3	Rappel sur la décomposition en séries de Fourier	20
2.3.1	Propriétés des séries de Fourier	21
2.3.2	Représentation complexe	21
2.4	Transformée de Fourier	22
2.4.1	Conditions d'existence de la transformée de Fourier	22
2.4.2	Quelques propriétés de la transformée de Fourier	22
2.4.3	Théorème de Parseval	23
2.5	Transformée de Laplace	24
2.5.1	Transformée de Laplace fonctionnelle	24

2.5.2	Transformée de Laplace opérationnelle	25
2.6	Propriétés fondamentales de la Transformée de Laplace	25
2.7	Echantillonnage. Théorème de Shannon	26
2.7.1	Echantillonnage	26
2.7.2	Théorème de Shannon	30
3	Systèmes linéaire et filtrage	31
3.1	Rappel sur les systèmes	32
3.1.1	Notion de système	32
3.1.2	Systèmes linéaires	32
3.1.3	Systèmes continus	33
3.1.4	Systèmes invariant	33
3.1.5	Systèmes dynamiques et systèmes instantanés	33
3.1.6	Fonction de transfert d'un système	34
3.2	Filtres linéaires	34
3.2.1	Représentation graphique et caractérisation fréquentielle de la fonction de transfert d'un filtre linéaire (diagramme de Bode)	35
3.2.2	Filtres idéaux	36
3.2.3	Filtres réels	37
4	Réponse temporelle des systèmes linéaires	45
4.1	Système du premier ordre	46
4.1.1	Réponse à une impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle)	46
4.1.2	Réponse à un échelon (réponse indicielle)	47
4.1.3	Application 1	48
4.2	Système du second ordre	48
4.2.1	Réponse à une impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle)	49
4.2.2	Réponse à un échelon (réponse indicielle)	52
4.2.3	Spécifications sur le régime transitoire	54
4.2.4	Application 2	55
5	Rétroaction/asservissement	57
5.1	Objectif	58
5.2	Boucle de régulation	58
5.2.1	Étapes nécessaires	58
5.2.2	Terminologie employée	58
5.2.3	Régulation en chaîne ouverte	58
5.2.4	Régulation en boucle fermée	59
5.2.5	Régulation de maintien, ou « régulation »	60
5.2.6	Régulation de poursuite, ou « asservissement »	60
5.3	Qualités d'une régulation	60
5.4	Régulateur PID	61
5.5	Applications en biomédical	61
5.5.1	Application 1 : Boucle de régulation de Glucose-Insuline	61
5.5.2	Application 2 : Boucle de régulation d'un système de perfusion 'Pousse-seringues'	62
5.5.3	Application 3 : Robotique médicale	63
Annexes		65

Table des figures

1.1	Système et Modèle	10
1.2	évolution de la sortie réelle et la sortie estimée.	11
1.3	Allure du critère quadratique.	12
2.1	Signal sinusoïdal défini à l'origine.	19
2.2	Forme générale d'un signal sinusoïdal.	19
2.3	Représentation fréquentielle d'un signal sinusoïdale.	20
2.4	Représentation fréquentielle d'un signal composé.	20
2.5	Représentation graphique du signal $s(t)$	20
2.6	Spectre d'amplitude du signal.	23
2.7	Signaux à temps continu et discret	26
2.8	Contrôleur à temps discret pour la régulation glycémique.	26
2.9	Impulsion de Dirac	27
2.10	Le produit d'une fonction $x(t)$ par $\delta(t - \tau)$, avec $\tau = 0$	27
2.11	Train d'impulsions unitaires discrètes ("Peigne" de Dirac)	28
2.12	$x^*(t)$ représente le produit d'une fonction $x(t)$ par un Peigne de Dirac)	28
2.13	Echantillonnage bloqueur	28
2.14	Spectre d'amplitude de $x(t)$	29
2.15	Spectre de $P(t)$	29
2.16	Interprétation géométrique du spectre de $x^*(t)$	30
2.17	Une partie de la chaîne d'acquisition de données avec filtre anti-repliement	30
3.1	Système comportant m entrées, p sorties et r perturbations	32
3.2	Représentation schématique d'un système invariant.	33
3.3	Exemple d'un système instantané.	33
3.4	Exemple d'un systèmes dynamique.	34
3.5	courbe du gain.	35
3.6	courbes de module d'un filtre passe-bas idéal.	36
3.7	courbes de module d'un filtre passe-haut idéal.	36
3.8	courbes de module d'un filtre passe-bande idéal.	36
3.9	diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre.	38
3.10	diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du second ordre.	39
3.11	diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre.	40
3.12	diagramme de Bode d'un filtre passe-bande du premier ordre.	41
3.13	les éléments constitutifs d'une suspension.	42
3.14	modèle simplifié d'une suspension.	42
3.15	diagramme de Bode de la suspension.	43
4.1	réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.	46
4.2	réponse indicielle d'un système du premier ordre.	47
4.3	Thermomètre utilisé pour mesurer la température des patients	48
4.4	Réponses du système	49

4.5	réponse impulsionnelle d'un système du second ordre amorti.	50
4.6	réponse impulsionnelle d'un système du second ordre nonamorti.	51
4.7	réponse impulsionnelle d'un système du second ordre avec $m=0$	52
4.8	réponse indicielle d'un système du second ordre amorti.	53
4.9	réponse indicielle d'un système du second ordre amorti.	53
4.10	réponse indicielle d'un système du second ordre avec $m = 0$	54
4.11	Analyse transitoire	54
4.12	Un transducteur de pression sanguine	55
4.13	Réponse indicielle du modèle du transducteur de pression sanguine	55
5.1	Schéma de principe d'un système en boucle fermée	59
5.2	Analyse des qualités d'une régulation de température.	60
5.3	Schéma fonctionnel régulateur PID	61
5.4	Contrôle en boucle fermée de la glycémie.	62
5.5	Pousse-seringues électrique.	62
5.6	Schéma fonctionnel d'un système de perfusion de médicament à rétroaction contrôlée [4].	63
5.7	Contrôle en boucle fermée du membre supérieur en rééducation	63

Liste des tableaux

Avant-propos

Ce document est destiné à des étudiants de Master 1 physique médicale (département de Physique– faculté des sciences – unviversité de Sétif1). L’objectif de ce cours est d’apporter quelques compléments essentiels en mathématiques, afin de donner à l’étudiant les bases nécessaires à la compréhension de notes techniques ou d’articles spécialisés.

Les cours/TPs/TDs de ce module insisterons sur :

- ➡ la compréhension de la méthode des moindres carrés pour l’estimation des paramètres des systèmes linéaires ;
- ➡ les applications des transformées de Fourier, et le filtrage linéaire ;
- ➡ l’échantillonnage et l’illustration de l’importance du théorème de Shannon en traitement numérique du signal ;
- ➡ la modélisation des systèmes linéaires du 1^{er} et 2^{ème} ordre, et leurs analyse (étude de leurs réponses) ;
- ➡ les systèmes de rétroaction/asservissement et leurs applications dans le domaine biomédical.

1

Algèbre linéaire avancée

Nous aborderons dans ce chapitre, le problème de l'estimation paramétrique par la méthode de minimisation du critère quadratique. Le présent chapitre contient deux parties : la première partie est un rappel sur le calcul matriciel. Il permet de bien appréhender le reste du cours. La deuxième partie concerne la méthode des moindres carrés pour l'estimation paramétrique. Enfin, nous présentons un critère d'évaluation pour qualifier la qualité d'estimation, en se basant sur le coefficient de corrélation.

Mots clés : matrices et calcul matriciel, méthode des moindres carrés linéaires.

1.1 Généralités sur le calcul matriciel

En algèbre linéaire, une matrice est un ensemble de $m \times n$ membres (réels ou complexes) rangés dans un tableau rectangulaire de m lignes et de n colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Les membres a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) se nomment les éléments de la matrice A et le produit $m \times n$ s'appelle l'ordre de la matrice A . Le premier indice i désigne le numéro de la ligne, et le deuxième indice j désigne le numéro de la colonne.

La matrice (1.1) peut être écrite sous d'autres formes, appelées formes condensées, à savoir la forme (1.2) et (1.3) :

$$A = [a_{ij}] \text{ avec } (i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

ou

$$A = [a_{ij}]_{m.n} \quad (1.3)$$

Définissons quelques types de matrices :

1. Si $m = n$ la matrice s'appelle *matrice carrée d'ordre n* .
2. Mais si $m \neq n$, on dit que la matrice (1.1) est *rectangulaire*.
3. En particulier, lorsqu'elle est d'ordre $1 \times n$, on lui donne le nom de *vecteur de ligne*, et de *vecteur de colonne* si elle est d'ordre $m \times 1$.
4. Une matrice dont tous les éléments sont nuls est dite *matrice nulle*; on écrit alors $O_{m.n} = [0]_{m.n}$.
5. Un nombre (scalaire) peut être considéré comme une matrice d'ordre 1×1 .
6. Une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls est appelée une *matrice diagonale* (**eq.** (1.4)).

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

7. Une matrice carrée avec des uns (1.5) sur la diagonale principale et des zéro (0) partout ailleurs est appelée communément *matrice d'identité* ou *matrice unité*.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Egalité des matrices

Deux matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont considérées comme égales ($A = B$), si seulement si elles ont le même nombre de lignes et de colonnes et si leurs éléments respectifs sont égaux. Autrement dit si :

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

1.2.2 Sommes et différences

La somme (différence) de deux matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ est possible si seulement si les deux matrices A et B ont le même ordre. Par conséquent, la matrice résultante C a le même ordre que les deux matrices A et B .

$$C = A + B \Rightarrow [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

$$C = A - B \Rightarrow [c_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

1.2.3 Produit d'une matrice par un nombre

Le produit d'une matrice $A = [a_{ij}]$ par un scalaire α est le produit de chaque élément de A par le scalaire α .

$$\alpha.A = A.\alpha = [\alpha.a_{ij}] \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

Propriétés :

$A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ deux matrices, α et β deux scalaires :

$$\Rightarrow 1.A = A.$$

$$\Rightarrow 0.A = 0.$$

$$\Rightarrow \alpha.(\beta.A) = (\alpha.\beta).A.$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A.$$

$$\Rightarrow \alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B.$$

1.2.4 Multiplication des matrices

Soit deux matrices

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m \times n} \text{ et } B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}}_{p \times q}.$$

Le produit de A par B ($A \times B$ ou $A.B$) est possible (ou a un sens) si le nombre de colonne de la matrice A est égale au nombre de ligne de la matrice B . Autrement dit, si $n = p$.

Par conséquent, le résultat de la multiplication de la matrice A par la matrice B est une matrice d'ordre $m \times q$, noté $C = [c_{ij}]_{m.q}$, telle que :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, q$$

Propriétés :

$$1. A.B \neq B.A.$$

$$2. A.I = I.A = A.$$

Exemple 1 :

Soit deux matrices définies comme suit :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{2 \times 4}, B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{4 \times 2}$$

Le produit des deux matrices est calculé comme suit :

$$C = A.B = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \times 2 + 2 \times 1 + 8 \times 0 + 1 \times 3 & 3 \times (-1) + 2 \times (-3) + 8 \times 1 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + (-4) \times 1 + 0 \times 0 + 3 \times 3 & 1 \times (-1) + (-4) \times (-3) + 0 \times 1 + 3 \times 1 \end{bmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

1.2.5 Transposée d'une matrice

Considérons la matrice $A = [a_{ij}]$ d'ordre $m \times n$ définie comme suit :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m \times n} \quad (1.6)$$

La matrice transposée de la matrice A , noté A^T , est définie comme suit :

$$A^T = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n \times m} \quad (1.7)$$

Propriétés :

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(A.B)^T = B^T.A^T$.
4. Si $A^T = A$, la matrice A est dite alors *matrice symétrique*.

1.3 Matrice Inverse

1.3.1 Déterminant d'une matrice

- ➡ Le déterminant d'une matrice est un outil mathématique nécessaire pour vérifier l'inversibilité d'une matrice, comme il est utilisé pour le calcul de l'inverse d'une matrice.
- ➡ Le déterminant d'une matrice est un scalaire et ne concerne que les matrices carrées.
- ➡ Une matrice dont le déterminant est différent de zéro est une matrice dite *régulière*. Elle est dite *singulière* dans le cas contraire.
- ➡ Le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si les vecteurs colonnes (ou vecteur lignes) sont liés.

Déterminant d'une matrice 2×2

Soit la matrice A définie comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Le déterminant de la matrice A est donné par l'expression suivante :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c \quad (1.9)$$

Exemple 2 :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, le déterminant de cette matrice est :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - 2.6 = 6.$$

Déterminant d'une matrice $n \times n$

Soit la matrice A définie comme suit :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n \times n} \quad (1.10)$$

Pour calculer le déterminant de la matrice A , nous suivons l'algorithme suivant :

1. Prenant un élément a_{ij} de la matrice A .
2. Enlever la ligne et la colonne contenant a_{ij} .
3. On peut alors définir une matrice de $n - 1$ lignes et de $n - 1$ colonnes, notée A_{ij} .
4. On peut alors développer le calcul du déterminant de la matrice A suivant la ligne i comme suit : $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det (A_{ij})$.

Exemple 3 :

Soit la matrice A définie comme suit :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{3 \times 3} \quad (1.11)$$

Le déterminant de la matrice A est calculé en utilisant l'algorithme présenté ci-avant :

$$\det A = 1 \times \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad (1.12)$$

Donc, la matrice A est une matrice régulière.

Propriétés du déterminant d'une matrice

1. Si la matrice A est d'ordre $n \times n$, alors $\det \alpha.A = \alpha^n \det A$.
2. $\det (A.B) = \det A \cdot \det B$.
3. $\det A^T = \det A$.

1.4 Définition et calcul de la matrice inverse**1.4.1 Définitions**

Définition 1 : on appelle une matrice inverse de la matrice carrée A toute matrice carrée, notée A^{-1} , telle que $A.A^{-1} = A^{-1}A = I_n$. I_n est une matrice identité.

Théorème 1 : Toute matrice régulière possède une matrice inverse.

Propriétés :

- ➡ $\det A^{-1} \cdot \det A = \det I_n = 1$.
- ➡ $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
- ➡ $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
- ➡ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
- ➡ $A.X = B \Rightarrow X = A^{-1}.B$.
- ➡ $Y.A = B \Rightarrow Y = B.A^{-1}$.

1.4.2 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Nous présentons dans ce cours la méthode de calcul basée sur l'utilisation de la matrice adjointe. Soit la matrice carrée A d'ordre n :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n \times n} \quad \text{où le déterminant de cette matrice est différent}$$

de zéro, $\det A = \Delta \neq 0$.

Composons ensuite pour la matrice A ce qu'on appelle la matrice adjointe :

$$\tilde{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}}_{n \times n}$$

La matrice inverse alors est :

$$A^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{13}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{1n}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \frac{A_{n2}}{\Delta} & \frac{A_{n3}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix}}_{n \times n} \quad (1.13)$$

Afin de bien élucider la méthode de calcul, nous présentons l'exemple suivant :

Exemple 4 : Nous reprenons dans cet exemple la matrice définie dans l'exemple 3. Soit la matrice A définie comme suit :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{3 \times 3} \quad (1.14)$$

Comme nous l'avons illustré dans l'exemple précédent, le déterminant de cette matrice est égal à 1. Donc, c'est une matrice régulière qui possède une matrice inverse.

Pour calculer la matrice inverse de la matrice A , nous commençons alors par calculer la matrice adjointe transposée :

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Après avoir calculé la transposée de la matrice adjointe, la matrice adjointe est égale à :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

La matrice inverse peut être déterminée en devisant la matrice adjointe par le déterminant. Et comme le déterminant est égal à 1, la matrice inverse est égale alors à la matrice adjointe.

1.5 Normes de matrices

La norme est un opérateur qui permet de quantifier un scalaire, un vecteur, une fonction vectorielle (ex : un vecteur de signaux temporels), une matrice.

1.5.1 Norme euclidienne d'un vecteur

Elle se définit en effet, pour un vecteur v , par :

$$\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^K v_k^2} \quad (1.17)$$

Exemple 5 :

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

La norme de ce vecteur est :

$$\|v\|_2 = \sqrt{1^2 + 5^2 + (\sqrt{5})^2} = 5.57.$$

1.5.2 Norme d'une matrice

Plusieurs normes différentes peuvent être utilisées par exemple :

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |M_{i,j}|^2} \quad (1.18)$$

1.6 Valeurs et vecteurs propres de matrice

λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0 \quad (1.19)$$

Une matrice de dimension n a nécessairement n valeurs propres λ_i , $i = 1, \dots, n$. Pour simplifier, l'on supposera que celles-ci sont distinctes. Lorsque A est réelle, les valeurs propres constituent un ensemble auto-conjugué. Autrement dit, si λ est valeur propre de A , sa quantité conjuguée l'est aussi. Tous ces scalaires constituent un ensemble de cardinal n appelé **spectre** de A et parfois noté $\lambda(A)$.

Il existe n vecteurs v_i , $i = 1, \dots, n$ non nuls, appelés *vecteurs propres* à droite, tels que :

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.20)$$

Exemple 6 :

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est égal à :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} \right) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Ce sont les valeurs propres de A et elles sont distinctes. On peut calculer une matrice $V = [v_1 \ v_2]$ des vecteurs propres à droite Eq.1.20.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.7 Méthode des moindres carrés linéaires

Des situations courantes en sciences biologiques, économiques, techniques est d'avoir à sa disposition deux ensembles de données de taille n , y_1, y_2, \dots, y_k et x_1, x_2, \dots, x_k , obtenus expérimentalement et généralement entachées d'erreurs de mesure $y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*$. La méthode des moindres carrés (Estimation paramétrique par minimisation du critère quadratique) permet de comparer ces données mesurées à un modèle mathématique, par exemple on peut retenir a priori :

- ➡ l'approximation linéaire qui dépend d'un seul paramètre a : $y = ax$;
- ➡ l'approximation par une loi de puissance qui dépend aussi d'un seul paramètre a : $y = x^a$;
- ➡ l'approximation affine qui dépend de deux paramètres a et b : $y = ax + b$;
- ➡ l'approximation polynomiale de degré 2 qui dépend trois paramètres a , b et c : $y = ax^2 + bx + c$;
- ➡ etc.

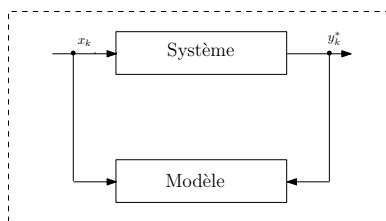


FIGURE 1.1: Système et Modèle

1.7.1 Principes généraux

Position du problème

Soit $y = f(\underline{\theta}, x)$ le modèle mathématique d'un système, avec :

- ➡ f : structure de la loi mathématique.
- ➡ $\underline{\theta}$: ensemble de I coefficients ou paramètres de la loi, tel que : $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_I)$.
- ➡ x : variable indépendante (le plus souvent, x est le temps).
- ➡ y : réponse du système à des sollicitations ou des excitations.

Supposons que nous disposons de k mesures de $y^*(x_k)$, éventuellement recueillies après l'excitation du système. L'objectif de l'identification paramétrique est de déterminer les paramètres $\underline{\theta}$ de la loi mathématique décrivant le système, tout en supposant que :

- ➡ La loi f est connue.
- ➡ Les erreurs de modélisation sont nulles.

Comme les mesures $y^*(x_k)$ sont entachées de bruit, il est impossible, en pratique, d'obtenir les valeurs exactes de $\underline{\theta}$. Pour pallier ce problème, on se contente d'estimer (donner des valeurs approximatives) les valeurs des paramètres du modèle. Pour ce faire, nous définissons $\hat{\underline{\theta}}$ comme étant l'ensemble des paramètres estimés qui sont des variables aléatoires. Par conséquent, la sortie estimée peut être définie comme suit :

$$\hat{y}_k = f(\hat{\underline{\theta}}, x_k) \quad (1.21)$$

Le résidu ou l'erreur entre la sortie réelle du système et celle estimée est donnée par :

$$e_k = y_k^* - \hat{y}_k = y_k^* - f(\hat{\underline{\theta}}, x_k) \quad (1.22)$$

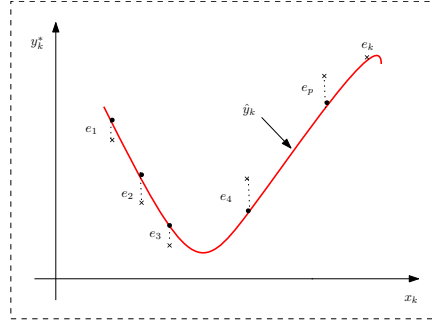


FIGURE 1.2: évolution de la sortie réelle et la sortie estimée.

Intuitivement, la meilleure valeur de $\hat{\theta}$ est celle qui *minimise* l'ensemble des résidus. Notons ici que les erreurs d'estimation peuvent prendre des valeurs positives comme elles peuvent prendre des valeurs négatives.

Ainsi, l'estimation paramétrique consiste à chercher la valeur de $\hat{\theta}$ qui minimise mieux l'ensemble des résidus. Toutefois, vu le nombre de résidus qui peut être très élevé, nous allons définir un seul critère à minimiser qui cumule et prend en compte l'ensemble des résidus. Notons également que le critère choisi doit éviter toute sorte de compensation de résidus. Plusieurs types de critères existent en littérature. Toutefois, dans le cadre de ce cours, nous nous contentons de présenter le critère quadratique (1.23). Ce dernier offre une multitude de propriétés mathématiques intéressantes que nous allons aborder ci-après.

$$J = \sum_{k=1}^K (e_k)^2 \quad (1.23)$$

Notons ainsi que la minimisation du critère (1.23) est appelée la méthode des *moindres carrés* (moindres pour minimaux) introduite par "*Gauss*" vers 1800.

1.7.2 Modèle linéaire par rapport aux paramètres (LP)

Nous désignons par un modèle linéaire par rapport aux paramètres, tout genre de modèle mathématique dont les effets des paramètres $\underline{\theta}$ sont séparables de ceux des variables indépendantes x . Soit

$$y = f(\underline{\theta}, x) = \varphi_1(x) \cdot \theta_1 + \varphi_2(x) \cdot \theta_2 + \cdots + \varphi_I(x) \cdot \theta_I \quad (1.24)$$

L'équation(1.24) peut être reformulée comme suit :

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_I(x) \end{bmatrix}}_{\underline{\varphi}^T(x)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_I \end{bmatrix}}_{\underline{\theta}} \quad (1.25)$$

Soit encore $y = \underline{\varphi}^T(x) \cdot \underline{\theta}$.

Notons que l'expression $\underline{\varphi}^T(x)$ peut être non linéaire et complexe.

1.7.3 Critère quadratique pour les modèles LP

Comme nous l'avons mentionné ci-avant, l'intérêt du critère quadratique réside dans le fait qu'il possède des propriétés mathématiques intéressantes, surtout pour ce qui est des modèles LP.

Soient la sortie estimée et l'erreur d'estimation sont définie comme suit :

$$\hat{y}_k = \underline{\varphi}_k^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \text{ et } e_k = y_k^* - \hat{y}_k.$$

Supposons que les mesures sont non bruitées, donc $y_k^* = y_k$, telle que y_k la sortie exacte., on peut alors écrire :

$$e_k = y_k - \hat{y}_k = \underline{\varphi}_k^T \cdot \underline{\theta} - \underline{\varphi}_k^T \cdot \hat{\underline{\theta}} = \underline{\varphi}_k^T \cdot (\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}) \quad (1.26)$$

Soit $\hat{\underline{\theta}} = \underline{\theta} + d\underline{\theta}$, on peut alors développer l'erreur comme suit :

$$e_k = -\underline{\varphi}_k^T \cdot d\underline{\theta} \quad (1.27)$$

Ainsi, le critère quadratique J peut être reformulé comme suit :

$$J = \sum_{k=1}^K (e_k)^2 = \sum_{k=1}^K \left(-\underline{\varphi}_k^T \cdot d\underline{\theta} \right)^2 \quad (1.28)$$

En développant l'équation (1.28), on peut écrire alors :

$$J = \sum_{k=1}^K (e_k)^2 = \sum_{k=1}^K d\underline{\theta}^T \cdot \left(\underline{\varphi}_k \cdot \underline{\varphi}_k^T \right) \cdot d\underline{\theta} \quad (1.29)$$

$$J = \sum_{k=1}^K (e_k)^2 = d\underline{\theta}^T \cdot \left(\sum_{k=1}^K \left(\underline{\varphi}_k \cdot \underline{\varphi}_k^T \right) \right) \cdot d\underline{\theta} = d\underline{\theta}^T \cdot R \cdot d\underline{\theta} \quad (1.30)$$

Afin de bien élucider les propriétés du critère quadratique, nous supposons dans un premier temps que le nombre de paramètres est égal à 1, c'est-à-dire $I = 1$. Alors, l'équation (1.30) peut être reformulée comme suit :

$J = d\underline{\theta}^2 \cdot R$ avec la matrice R est positive.

En se basant sur l'équation (1.30) nous pouvons constater que le critère J est une parabole (figure 1.3).

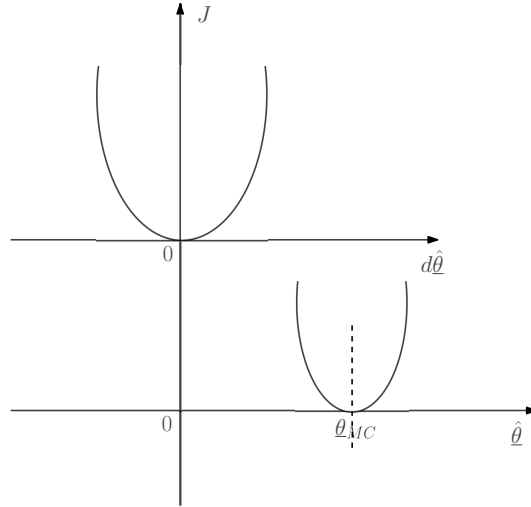


FIGURE 1.3: Allure du critère quadratique.

En ce qui concerne le cas général où le nombre de paramètre est différent de un, le critère quadratique J est un parabolioïde centré sur $\underline{\theta}$. En substance, dans le cas des systèmes LP, le critère quadratique J est parabolique. Par conséquent, un seul et unique optimum est possible.

1.7.4 Modèle LP et moindres carrés

Dans cette section, nous présentons la méthode des moindres carrés qui permet de déterminer le vecteur des paramètres estimés $\hat{\underline{\theta}}$.

Dans le cas des systèmes LP, le critère quadratique est défini comme suit :

$$J = \sum_{k=1}^K \left(y_k^* - \underline{\varphi}_k^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \right)^2 \quad (1.31)$$

Notre objectif est de déterminer $\hat{\theta} = \theta_{MC}$ qui minimise le critère (1.31). Autrement dit, déterminer θ_{MC} tel que :

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, I \quad (1.32)$$

L'équation (1.32) peut être reformulée comme suit :

$$\left(\underline{J}'_{\hat{\theta}} \right)_{\theta_{MC}} = 0 \text{ tel que } \underline{J}'_{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial \theta_I} \end{bmatrix} \text{ est le gradient du critère } J \text{ par rapport à } \underline{\theta}.$$

Cas élémentaire (cas monovariable)

Considérons le cas monovariable, alors :

$$\hat{y}_k = \varphi_k \cdot \hat{\theta} \quad (1.33)$$

Et

$$J = \sum_{k=1}^K \left(y_k^* - \varphi_k \cdot \hat{\theta} \right)^2 \quad (1.34)$$

En développant le critère (1.34), nous pouvons écrire :

$$J = \sum_{k=1}^K \left((y_k^*)^2 - 2 \cdot \varphi_k \cdot \hat{\theta} \cdot y_k^* + \varphi_k^2 \cdot \hat{\theta}^2 \right) = \sum_{k=1}^K (y_k^*)^2 - 2 \cdot \hat{\theta} \cdot \sum_{k=1}^K \varphi_k \cdot y_k^* + \hat{\theta}^2 \cdot \sum_{k=1}^K \varphi_k^2 \quad (1.35)$$

L'équation (1.35) est bien l'équation d'une parabole (avec ou sans perturbation). Le minimum de cette parabole est obtenu analytiquement comme suit :

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -2 \cdot \sum_{k=1}^K \varphi_k \cdot y_k^* + 2 \hat{\theta} \cdot \sum_{k=1}^K \varphi_k^2 = 0 \quad (1.36)$$

A partir de l'équation (1.36), nous pouvons déterminer θ_{MC} minimisant le critère J . θ_{MC} est donnée alors par l'expression suivante :

$$\theta_{MC} = \left(\sum_{k=1}^K \varphi_k^2 \right)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^K \varphi_k \cdot y_k^* \quad (1.37)$$

Remarque : supposons que la sortie du système est entachée de bruit, l'expression de la sortie devient donc :

$$y_k^* = y_k + b_k \quad (1.38)$$

avec b_k est une variable aléatoire qui représente le bruit de mesure.

Dans ce cas, le vecteur des paramètres estimés devient :

$$\theta_{MC} = \left(\sum_{k=1}^K \varphi_k^2 \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^K \varphi_k \cdot y_k + \sum_{k=1}^K \varphi_k \cdot b_k \right) \quad (1.39)$$

En développant y_k , l'équation (1.39) peut être reformulée comme suit :

$$\theta_{MC} = \left(\sum_{k=1}^K \varphi_k^2 \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^K \varphi_k^2 \cdot \theta + \sum_{k=1}^K \varphi_k \cdot b_k \right) \quad (1.40)$$

Alors,

$$\theta_{MC} = \theta + \left(\sum_{k=1}^K \varphi_k^2 \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^K \varphi_k \cdot b_k \right) = \theta + \Delta\theta \quad (1.41)$$

A cause du bruit b_k , θ_{MC} est différent de θ .

Cas général (cas multivariables)

Dans cette section, nous abordons le cas d'un système avec plusieurs paramètres. Nous avons alors :

$$J = \sum_{k=1}^K \left(y_k^* - \underline{\varphi}_k^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \right)^2 = \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^2 \quad (1.42)$$

Afin de déterminer $\underline{\theta}_{MC}$ minimisant le critère quadratique, nous calculons le gradient de J . Nous obtenons alors :

$$\underline{J}'_{\theta} = -2 \cdot \sum_{k=1}^K \varepsilon_k \cdot \underline{\varphi}_k = -2 \cdot \sum_{k=1}^K \left(y_k^* - \underline{\varphi}_k^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \right) \cdot \underline{\varphi}_k \quad (1.43)$$

Nous obtenons $\underline{\theta}_{MC}$ minimisant mieux le critère quadratique, lorsque $\underline{J}'_{\theta} = 0$, soit :

$$-2 \cdot \sum_{k=1}^K \left(y_k^* - \underline{\varphi}_k^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \right) \cdot \underline{\varphi}_k = 0 \quad (1.44)$$

En développant l'équation (1.44), nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^K \left(y_k^* \cdot \underline{\varphi}_k \right) = \sum_{k=1}^K \left(\underline{\varphi}_k^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \cdot \underline{\varphi}_k \right) \quad (1.45)$$

L'expression (1.45) est équivalente à :

$$\sum_{k=1}^K \left(\underline{\varphi}_k \cdot y_k^* \right) = \sum_{k=1}^K \left(\underline{\varphi}_k \cdot \underline{\varphi}_k^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \right) \quad (1.46)$$

Nous pouvons alors déterminer $\underline{\theta}_{MC}$ comme suit :

$$\underline{\theta}_{MC} = \left(\sum_{k=1}^K \left(\underline{\varphi}_k \cdot \underline{\varphi}_k^T \right) \right)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^K \underline{\varphi}_k \cdot y_k^* \quad (1.47)$$

Notons ici que l'expression (1.47) du vecteur des paramètres estimés $\underline{\theta}_{MC}$ est très utile pour l'écriture des algorithmes récurrents. Toutefois, il existe d'autres écritures équivalentes. Dans la section suivante, nous présentons la formulation matricielle de $\underline{\theta}_{MC}$.

Cas général : formulation matricielle

Soit le vecteur des sorties \underline{Y}^* tel que :

$$\underline{Y}^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_K^* \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Nous pouvons écrire alors,

$$\underline{Y}^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_1^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \\ \underline{\varphi}_2^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \\ \vdots \\ \underline{\varphi}_K^T \cdot \hat{\underline{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_1^T \\ \underline{\varphi}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\varphi}_K^T \end{bmatrix} \cdot \hat{\underline{\theta}} = \phi \cdot \hat{\underline{\theta}} \quad (1.49)$$

Où ϕ est une matrice d'ordre $K \times I$. De même, l'erreur d'estimation peut être calculée comme suit :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{Y}^* - \phi \cdot \hat{\underline{\theta}} \quad (1.50)$$

Ainsi, le critère quadratique peut être reformulé comme suit :

$$J = \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon} \quad (1.51)$$

En développant J , nous pouvons obtenir :

$$J = \underline{Y}^{*T} \cdot \underline{Y}^* - 2 \cdot \underline{Y}^{*T} \cdot \phi \cdot \hat{\underline{\theta}} + \hat{\underline{\theta}}^T \cdot \phi^T \cdot \phi \cdot \hat{\underline{\theta}} \quad (1.52)$$

Rappelons quelques outils nécessaires pour calculer le gradient :

Rappel : soit f une fonction, telle que $f = \underline{X}^T \cdot A \cdot \underline{Y}$, où A est une matrice symétrique, Alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \underline{Y}} = (\underline{X}^T \cdot A)^T = A^T \cdot \underline{X} \\ \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} = A \cdot \underline{Y} \end{cases} \quad (1.53)$$

Afin d'obtenir l'expression de $\underline{\theta}_{MC}$ minimisant le critère, nous calculons le gradient du critère J , nous obtenons alors :

$$\underline{J}'_{\underline{\hat{\theta}}} = -2 \cdot \phi^T \cdot \underline{Y}^* + 2 \cdot \phi^T \cdot \phi \cdot \underline{\hat{\theta}} = 0 \quad (1.54)$$

D'où l'estimation du vecteur des paramètres au sens des moindres carrés peut être reformulée comme suit :

$$\underline{\theta}_{MC} = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi^T \cdot \underline{Y}^* \quad (1.55)$$

Finalement, notons que l'intérêt d'utiliser la méthode des moindres carrés pour l'estimation paramétrique des systèmes LP réside dans le fait que le minimum du critère J est obtenu de manière analytique. De plus, la solution obtenue est unique (sommet d'un paraboloïde).

1.7.5 Qualité de l'approximation

Si maintenant on cherche la fonction d'approximation $x = \hat{a}y$, on procède de la même manière :

$$e = \sum_{k=1}^n (x_k - g(y_k))^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{a}y_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\hat{a}x_ky_k + \hat{a}^2y_k^2 \quad (1.56)$$

d'où :

$$\frac{\partial e}{\partial \hat{a}} = \sum_{k=1}^n -2x_ky_k + 2\hat{a}y_k^2 \quad (1.57)$$

qui s'annule pour :

$$\hat{a} = \frac{\sum_{k=1}^n x_ky_k}{\sum_{k=1}^n y_k^2} \quad (1.58)$$

Ce qui définit la fonction d'approximation :

$$x = \frac{\sum_{k=1}^n x_ky_k}{\sum_{k=1}^n y_k^2} y \quad (1.59)$$

Si l'approximation est parfaite, les deux fonctions d'approximation $y = ax$ et $x = \hat{a}y$ sont l'inverse l'une de l'autre et donc $a \cdot \hat{a} = 1$. On définit alors le nombre $R^2 = a \cdot \hat{a}$, appelé coefficient de détermination. Plus ce coefficient est proche de 1, meilleure est l'approximation. Il permet donc d'en apprécier la qualité. On utilise aussi le nombre $R = \sqrt{R^2}$ affecté du signe de a . Il est appelé *coefficient de corrélation*. Coefficient de détermination :

$$R^2 = \frac{(\sum_{k=1}^n x_ky_k)^2}{\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2} \quad (1.60)$$

2

Transformations linéaires et Echantillonnage

Nous abordons dans ce chapitre deux types de transformation nécessaires pour le traitement du signal, à savoir, la transformée de Fourier et la transformée de Laplace. Généralement, nous désignons par le mot signal, toute manifestation d'une grandeur physique mesurable (tension électrique, la pression d'une fluide, ...etc). Plusieurs classifications de signaux existent dans la littérature. Nous présentons quelques unes dans la section suivante.

Mots clés : Classification des signaux, Transformée de Fourier, Transformée de Laplace, Echantillonnage, théorème de Shannon.

2.1 Classification des signaux

2.1.1 Signaux déterministes et signaux aléatoires

Les signaux déterministes sont des signaux dont le modèle mathématique est connu, donc leur évolution dans le temps peut être prédite à tout moment. Par contre, les signaux aléatoires sont des signaux dont le modèle mathématique n'est pas connu, donc leur évolution dans le temps est imprévisible.

2.1.2 Signaux continus et signaux discrets

Les signaux continus sont des fonctions d'une ou plusieurs variables continues (définies dans des espaces continus, par exemple, l'ensemble des nombres réels). Par contre, les signaux à variation temporelle discrète sont des fonctions d'une ou plusieurs variables discrètes (définies pour certaines valeurs seulement).

2.1.3 Signaux pairs et signaux impairs

Un signal $x(t)$ est dit pair s'il satisfait $x(-t) = x(t)$ pour tout t . Par contre, un signal impair est dit impair, s'il satisfait $x(-t) = -x(t)$.

Exemple 1 :

1. $x(t) = \cos(t) \Rightarrow x(-t) = \cos(-t) = \cos(t)$ signal pair.
2. $y(t) = \sin(t) \Rightarrow x(-t) = \sin(-t) = -\sin(t)$ signal impair.

2.1.4 Signaux périodiques et signaux apériodiques

Un signal périodique $x(t)$ est une fonction du temps qui satisfait la condition :

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \text{pour tout } t \quad (2.1)$$

T_0 est la plus petite constante positive non nulle qui vérifie la condition (2.1). T_0 est la période. De même, le rapport $f = \frac{1}{T_0}$ est la fréquence fondamentale. Par conséquent, la pulsation du mouvement, elle est donnée par : $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0}$.

Cependant, tout signal pour lequel il n'existe pas de valeur T_0 qui vérifie la condition (2.1) est appelé apériodique.

Exemple 2 : Soit le signal $x(t) = \cos(3t)$. Il s'agit de trouver la période du signal $x(t)$.

En appliquant la formule (2.1), alors

$$\begin{aligned} x(t + T_0) &= \cos(3(t + T_0)) \\ &= \cos(3t + 3T_0) \\ &= \cos(3t) \cdot \cos(3T_0) - \sin(3t) \cdot \sin(3T_0) = \cos(3t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

La condition (2.2) est vérifiée si :

$$\begin{cases} \sin(3T_0) = 0 \\ \cos(3T_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3T_0 = 2\pi \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{3}.$$

Le signal $x(t)$ est périodique et sa période est $T_0 = \frac{2\pi}{3}$.

2.1.5 Signaux à énergie finie et à puissance finie

Un signal $s(t)$ est dit à énergie finie non nulle, s'il vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty \quad (2.3)$$

Un signal $s(t)$ est dit à puissance moyenne non nulle, s'il satisfait :

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt < \infty \quad (2.4)$$

Nota :

1. Un signal à énergie finie est un signal à puissance moyenne nulle.
2. Un signal à puissance moyenne finie est un signal à énergie infinie.

Exemple 3 :

Soit le signal $s(t) = A$. L'énergie de ce signal est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dt = A^2 t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty \quad (2.5)$$

Sa puissance se calcule ainsi :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} A^2 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = A^2 \quad (2.6)$$

Alors, le signal $s(t) = A$ est un signal à puissance moyenne infinie.

2.2 Rappel sur les signaux sinusoïdaux

Les signaux sinusoïdaux sont les signaux périodiques fondamentaux qu'on rencontre souvent dans plusieurs disciplines scientifique et phénomènes physiques (électricité, vibration, mécanique, ...,etc). La forme générale est la suivante :

$$s(t) = a. \sin(2\pi f_0.t) \quad (2.7)$$

Avec $f_0 = \frac{1}{T_0}$ est la fréquence fondamentale.

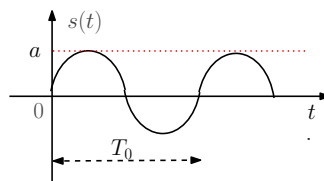


FIGURE 2.1: Signal sinusoïdal défini à l'origine.

Si on choisi l'origine des temps arbitraire à l'instant t_0 . Dans ce cas, le signal sinusoïdal est défini comme suit :

$$s(t) = a. \sin(2\pi f_0.t - \varphi_0) \text{ avec } \varphi_0 \text{ est la phase.} \quad (2.8)$$

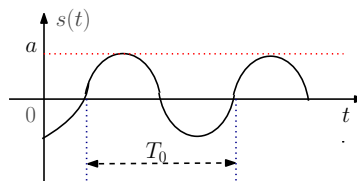


FIGURE 2.2: Forme générale d'un signal sinusoïdal.

Comme nous pouvons aussi donner une autre représentation graphique de nature différente, appelée représentation fréquentielle ou spectrale. Elle contient deux parties ; l'amplitude en fonction de la fréquence et la deuxième concerne la phase en fonction de la phase.

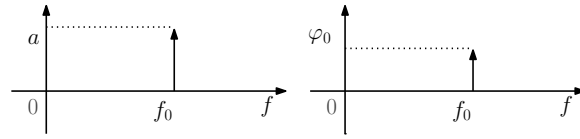


FIGURE 2.3: Représentation fréquentielle d'un signal sinusoïdale.

Nota : La représentation fréquentielle d'un signal composé de plusieurs signaux sinusoïdaux consiste à représenter chaque signal séparément. A titre d'exemple, soit le signal suivant :

$$s(t) = a_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t) + a_2 \cdot \sin(2\pi f_2 t - \varphi_2) + a_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) \quad (2.9)$$

La représentation graphique du signal (2.9) est la suivante :

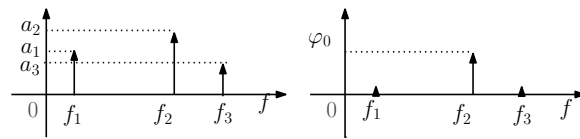


FIGURE 2.4: Représentation fréquentielle d'un signal composé.

2.3 Rappel sur la décomposition en séries de Fourier

La décomposition en séries de Fourier est une approche qui permet de représenter n'importe quel signal périodique sous la forme suivante :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \cdot \sin(2\pi n f_0 t) \quad (2.10)$$

Ou sous la forme suivante :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \cdot \sin(2\pi n f_0 t) \quad (2.11)$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) dt \quad (2.12)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad (2.13)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad (2.14)$$

Exemple 4 : Soit le signal pair et périodique $s(t)$ défini comme suit (figure 2.5) :

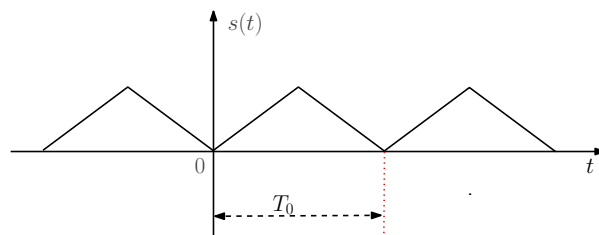


FIGURE 2.5: Représentation graphique du signal $s(t)$.

$$s(t) = \begin{cases} -t & \text{pour } -\frac{T_0}{2} \leq t \leq 0 \\ t & \text{pour } 0 < t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (2.15)$$

L'objectif est de déterminer les coefficients de la série de Fourier. Nous commençons par a_0 .

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \left[\int_{-T_0/2}^0 -t dt + \int_0^{T_0/2} t dt \right] = \frac{T_0}{4} \quad (2.16)$$

En ce qui concerne les coefficients a_n , ils sont calculés comme suit :

$$a_n = \frac{2}{T_0} \cdot \left[\int_{-T_0/2}^0 -t \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t) dt + \int_0^{T_0/2} t \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t) dt \right] \quad (2.17)$$

En utilisant l'intégration par partie, nous pouvons obtenir le résultat suivant :

$$a_n = \frac{1}{\pi^2 n^2 f_0} \cdot [\cos(\pi n) - 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-2}{\pi^2 n^2 f_0} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.18)$$

Pour ce qui est des coefficients b_n sont calculés comme suit :

$$b_n = \frac{2}{T_0} \cdot \left[\int_{-T_0/2}^0 -t \cdot \sin(2\pi n f_0 \cdot t) dt + \int_0^{T_0/2} t \cdot \sin(2\pi n f_0 \cdot t) dt \right] \quad (2.19)$$

En utilisant l'intégration par partie, nous obtenons le résultat suivant :

$$b_n = \frac{1}{2\pi n f_0} \cdot \left[\cos\left(2\pi n f_0 \cdot \frac{T_0}{2}\right) - \cos\left(2\pi n f_0 \cdot \frac{T_0}{2}\right) \right] = 0 \quad (2.20)$$

La décomposition en série de Fourier du signal (2.15) peut être écrite comme suit :

$$s(t) = \frac{T_0}{2} - \frac{2}{\pi^2 f_0} \cdot \cos(2\pi f_0 \cdot t) - \frac{2}{9\pi^2 f_0} \cos(6\pi f_0 \cdot t) - \frac{2}{25\pi^2 f_0} \cos(10\pi f_0 \cdot t) - \dots \quad (2.21)$$

2.3.1 Propriétés des séries de Fourier

- ➔ Les signaux pairs n'ont que des termes en cosinus, tous les coefficients b_n sont nuls.
- ➔ Les signaux impairs n'ont que des termes sinus, tous les coefficients a_n sont nuls.
- ➔ Le spectre ou la représentation fréquentielle d'un signal périodique est un spectre discret (spectre de raies).

2.3.2 Représentation complexe

En se basant sur les relations qui existent entre les signaux sinusoïdaux et les exponentiels complexes, nous pouvons reformuler les séries de Fourier trigonométriques comme suit :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n f_0) \cdot e^{j2\pi n f_0 \cdot t} \quad (2.22)$$

Tel que :

$$S(n f_0) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 \cdot t} dt \quad (2.23)$$

La relation entre les coefficients complexes et ceux trigonométriques est donnée par :

$$S(+n f_0) = \frac{a_n - j b_n}{2} \quad n \neq 0 \quad n : \text{positive} \quad (2.24)$$

$$S(-n f_0) = \frac{a_n + j b_n}{2} \quad n \neq 0 \quad n : \text{négative} \quad (2.25)$$

$$S(0) = a_0 \quad (2.26)$$

Pour ce qui est de l'inverse :

$$a_n = S(+n f_0) + S(-n f_0) \quad \text{pour } n \neq 0 \quad (2.27)$$

$$b_n = \frac{-S(+nf_0) + S(-nf_0)}{j} \text{ pour } n \neq 0 \quad (2.28)$$

$$a_0 = S(0) \quad (2.29)$$

2.4 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est la généralisation de la série de Fourier aux signaux non périodique. La transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ est définie comme suit :

$$F[s(t)] = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.30)$$

De même, on peut définir la transformée de Fourier inverse comme suit :

$$F^{-1}[S(f)] = s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \quad (2.31)$$

Comme on peut écrire la Transformée de Fourier sous la forme suivante :

$$S(f) = |S(f)| e^{j\theta(f)} \quad (2.32)$$

La forme (2.32) constitue la représentation spectrale du signal $s(t)$ qui fait apparaître le spectre d'amplitude $|S(f)|$ et le spectre de phase $\theta(f)$ tel que :

$$\theta(f) = \arctg\left(\frac{\Im(S(f))}{\Re(S(f))}\right) \quad (2.33)$$

Comme il existe une autre écriture de la transformée de Fourier qui consiste à le mettre sous la forme complexe suivantes :

$$S(f) = \Re(S(f)) + j \cdot \Im(S(f)) \quad (2.34)$$

2.4.1 Conditions d'existence de la transformée de Fourier

Comme nous l'avons mentionné ci-avant, la transformée de Fourier est la généralisation de la série de Fourier aux signaux ou fonctions apériodiques. Toutefois, ce n'est pas toutes les fonctions du temps possèdent forcément une Transformée de Fourier. Seules les fonctions ou signaux vérifiant les conditions ci-dessous possèdent une Transformée de Fourier :

— Fonction ou signaux absolument convergents :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt < \infty \quad (2.35)$$

— Le nombre d'extremums de la fonction $s(t)$ soit fini dans un intervalle de temps fini ; On désigne par les extremums d'une fonction les maximums et les minimums.

— Le nombre de discontinuité de la fonction $s(t)$ soit fini dans tout intervalle de temps fini.

2.4.2 Quelques propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité

Si $X(f) = F[x(t)]$ et $Y(f) = F[y(t)]$ on peut alors écrire :

$$F[a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] = a \cdot X(f) + b \cdot Y(f) \quad (2.36)$$

Ceci est une conséquence directe de la propriété de linéarité de l'opération de l'intégration. Notons que a et b sont deux constantes arbitraires.

Dérivation

Si $S(f) = F[s(t)]$, on peut alors écrire :

$$F\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = j2\pi f \cdot S(f) \quad (2.37)$$

Translation

Si $S(f) = F[s(t)]$, on peut alors écrire :

$$F[s(t - t_0)] = S(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0} \quad (2.38)$$

Similitude

Si $S(f) = F[s(t)]$, on peut alors écrire :

$$F[s(at)] = \frac{1}{|a|} \cdot S\left(\frac{f}{a}\right) \quad (2.39)$$

Où a est une constante arbitraire.

2.4.3 Théorème de Parseval

Si $s(t)$ est un signal qui vérifie les conditions d'existence de la Transformée de Fourier, alors :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} (s(t))^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (S(f))^2 \cdot df \quad (2.40)$$

Autrement dit, l'énergie du signal dans le domaine temporel est égale à celle calculée dans le domaine fréquentiel.

Exemple 5 :

Soit l'impulsion rectangulaire suivante :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.41)$$

L'objectif est de calculer la transformée de Fourier de l'impulsion rectangulaire et son spectre d'amplitude.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t} dt = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j2\pi f \cdot t} dt \quad (2.42)$$

$$S(f) = \left[\frac{e^{-j2\pi f \cdot \tau/2} - e^{+j2\pi f \cdot \tau/2}}{j2\pi f} \right] = \frac{1}{\pi f} \sin(\pi f \cdot \tau) \quad (2.43)$$

$$S(f) = \tau \operatorname{sinc}(\pi f \cdot \tau) \quad (2.44)$$

Le spectre d'amplitude est donné comme suit (figure 2.6) :

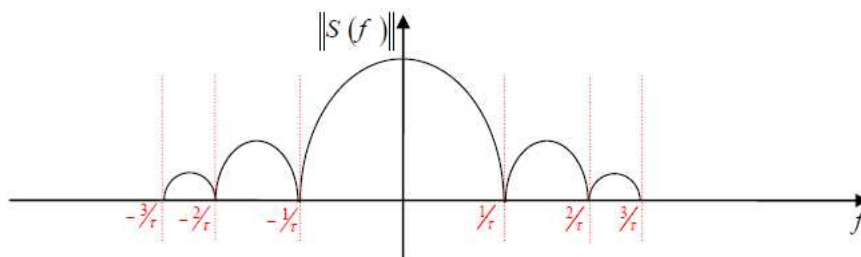


FIGURE 2.6: Spectre d'amplitude du signal.

2.5 Transformée de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction ou un signal qui dépend du temps. Sa transformée de Laplace $F(s)$ est définie par :

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (2.45)$$

Telle que s : une variable complexe, soit $s = \sigma + j\omega$.

Notons que la transformée de Laplace est un outil très important dans l'analyse des systèmes, des signaux et des fonctions. Elle permet de simplifier de façon considérable les calculs tels que les calculs des dérivées et des intégrales.

La notation " s " (variable de Laplace) est utilisée dans les pays anglo-saxons alors que la notation " p " est utilisée notamment en France et en Allemagne.

Généralement, on divise la transformée de Laplace en deux types : la transformée de Laplace fonctionnelle et la transformée de Laplace opérationnelle.

2.5.1 Transformée de Laplace fonctionnelle

Dans cette section, nous nous intéressons uniquement au calcul de la transformée de Laplace appliquée généralement sur des fonctions. Dans ce qui suit, nous passons en revue quelques exemples sur des fonctions connus¹.

Transformée de Laplace d'une fonction échelon

Soit la fonction échelon définie comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ K & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

Si $K = 1$, la fonction $u(t)$ est appelée ainsi la **fonction échelon unitaire**.

La transformée de Laplace de la fonction $u(t)$ est donnée par :

$$L[u(t)] = \int_0^{+\infty} K \cdot e^{-st} dt = -K \cdot \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{+\infty} = \frac{K}{s} \quad (2.47)$$

Transformée de Laplace d'un exponentiel décroissant

Etant donné la fonction suivante :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ est calculée comme suit :

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{1}{s+a} \quad (2.49)$$

Transformée de Laplace d'une fonction sinusoïdale

Soit la fonction sinusoïdale suivante :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sin(\omega t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

La transformée de Laplace de cette fonction est donnée par :

$$L[\sin(\omega t)] = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{(j\omega)t} - e^{-(j\omega)t}}{2j} \right) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}}{2j} dt$$

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.51)$$

1. Annexe 1 : Table des transformées de Laplace

2.5.2 Transformée de Laplace opérationnelle

Dans cette section, nous allons montrer comment sont effectuées des opérations telles que l'addition, la multiplication, la dérivée, l'intégrale dans le domaine de Laplace.

Transformée de Laplace d'une multiplication par une constante

Soit $F(s) = L[f(t)]$, alors on peut écrire :

$$L[K \cdot f(t)] = K \cdot F(s) \quad (2.52)$$

Transformée de Laplace d'une addition (soustraction)

L'opération de l'addition (soustraction) dans le domaine temporel correspond à une addition dans le domaine de Laplace. Autrement dit, Soient, $F_1(s) = L[f_1(t)]$, $F_2(s) = L[f_2(t)]$, $F_3(s) = L[f_3(t)]$, on peut écrire alors :

$$L[f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)] = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) \quad (2.53)$$

Transformée de Laplace de la dérivation

La dérivation dans le domaine du temps correspond à multiplier $F(s)$ par la variable de Laplace s et puis soustraire la valeur initiale de $f(t)$ (donc $f(0)$). On obtient alors :

Soit $F(s) = L[f(t)]$, alors on peut écrire :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0) \quad (2.54)$$

Exemple 6 :

Soit l'équation différentielle de 1^{ère} ordre, linéaire et à coefficients constants :

$$\dot{y} = -a y + b x \quad (2.55)$$

La transformée de Laplace de l'équation (2.55) est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} L[\dot{y}] &= L[-a y + b x] \\ s \cdot Y(s) - y(0) &= -a Y(s) + b X(s) \\ s \cdot Y(s) + a Y(s) &= y(0) + b X(s) \\ Y(s) (s + a) &= y(0) + b X(s) \\ Y(s) &= \frac{y(0) + b X(s)}{(s + a)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Transformée de Laplace de l'intégration

L'intégration dans le domaine du temps correspond à diviser par la variable de Laplace s dans le domaine de Laplace.

Soit $F(s) = L[f(t)]$, alors on peut écrire :

$$L\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (2.57)$$

2.6 Propriétés fondamentales de la Transformée de Laplace

Nous présentons dans cette section quelques propriétés de la Transformée de Laplace.

- Linéarité : $L[a f(t) + b g(t)] = a F(s) + b G(s)$.
- Dérivée : $L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s F(s) - f(0)$.
- Intégrale : $L\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$.
- Retard temporel : $L[f(t - \tau)] = F(s) e^{-s\tau}$.
- Translation de la transformée : $L[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$.

- Convolution : $L[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$.
- Théorème de la valeur initiale : $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.
- Théorème de la valeur finale : $\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

2.7 Echantillonnage. Théorème de Shannon

2.7.1 Echantillonnage

Il est possible de transformer un signal continu en un signal discret. Ce processus est appelé échantillonnage ou discrétisation (voir figure 2.7). L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs d'un signal à intervalles définis, généralement réguliers. Il produit une suite de valeurs **dis-crètes** nommées échantillons. Dans cette partie, l'échantillonnage impulsionnel (idéal) est évoqué.

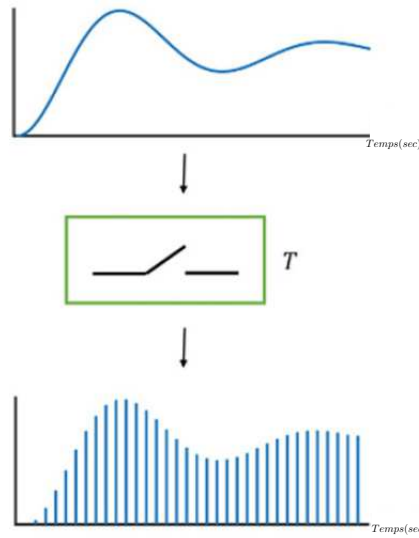


FIGURE 2.7: Signaux à temps continu et discret

Exemple 1

Considérons une pompe à insuline à commande automatique (voir figure 2.8) un algorithme de contrôle numérique est utilisé pour activer le fonctionnement de l'insuline pompe.

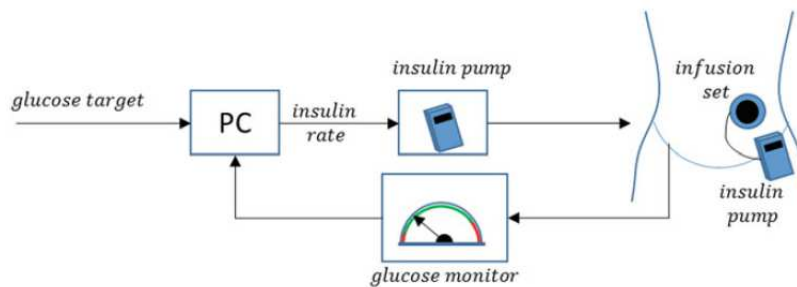


FIGURE 2.8: Contrôleur à temps discret pour la régulation glycémique.

Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac, notée $\delta(t)$ et vérifie :

$$\delta(t) = 0, \quad \text{si } t \neq 0 \quad (2.58)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du = 1. \quad (2.59)$$

Par convention, $\delta(t)$ est représentée par une flèche de hauteur égale à la surface de l'impulsion :

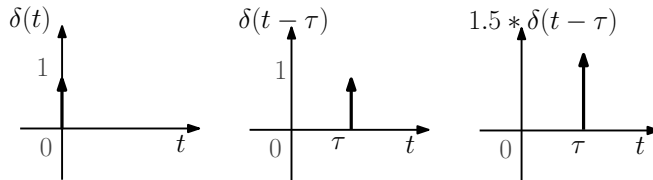


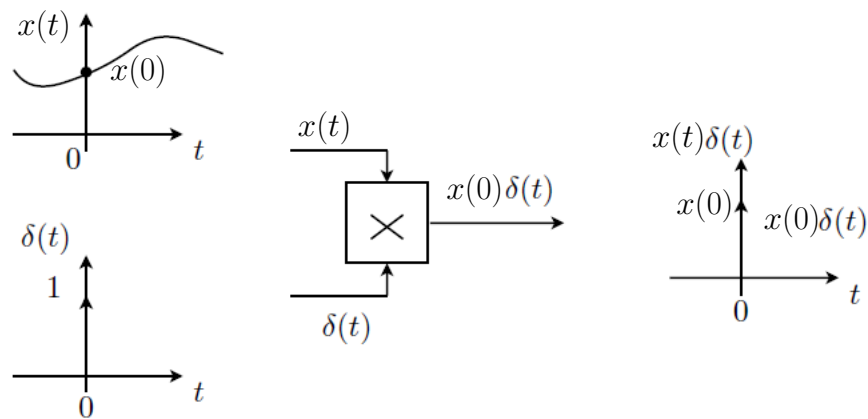
FIGURE 2.9: Impulsion de Dirac

Produit d'une fonction par un Dirac

Le produit d'une fonction $f(t)$ par une distribution de Dirac $\delta(t - \tau)$ s'écrit :

$$x(t)\delta(t - \tau) = x(\tau)\delta(t - \tau) \quad (2.60)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)dt = x(\tau). \quad (2.61)$$

FIGURE 2.10: Le produit d'une fonction $x(t)$ par $\delta(t - \tau)$, avec $\tau = 0$

Peigne de Dirac (train d'impulsions)

Soit maintenant le train d'impulsions unitaires distantes dans le temps de T_e , se produisant à partir de l'instant 0 sur un horizon infini de temps, et dessiné sur la figure 2.11. Du point de vue mathématique, ce train d'impulsion $\delta(t - nT_e)$, se produisant à l'instant $t = nT_e$. On appelle $P(t)$, "Peigne" de Dirac, l'ensemble de ces impulsions.

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (2.62)$$

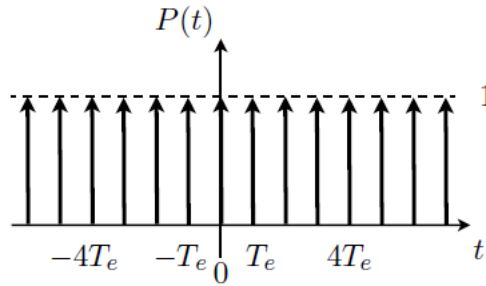


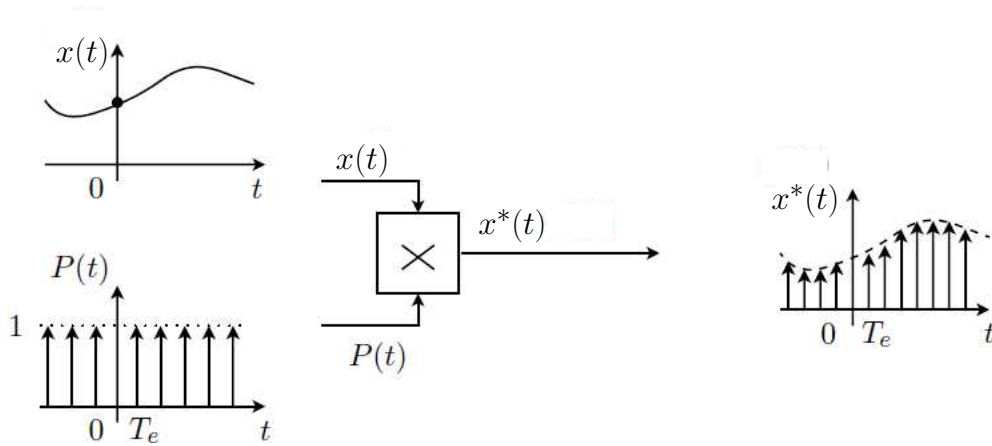
FIGURE 2.11: Train d'impulsions unitaires discrètes ("Peigne" de Dirac)

Produit d'une fonction continue par un Peigne de Dirac

$$x^*(t) = x(t)P(t) \quad (2.63)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e) \quad (2.64)$$

Le signal $x^*(t)$ est donc composé d'une suite d'impulsions de Dirac d'aire $x(nT_e)$.

FIGURE 2.12: $x^*(t)$ représente le produit d'une fonction $x(t)$ par un Peigne de Dirac

Par la suite, $x^*(t)$ sera le modèle mathématique du signal échantillonné.

Signal échantillonné réel $x_e(t)$

On peut considérer que le signal échantillonné réel, notée $x_e(t)$, est obtenu à partir de $x(t)$ grâce à un interrupteur fermé périodiquement, pendant la durée τ , à la fréquence F_e ($F_e = \frac{1}{T_e}$).

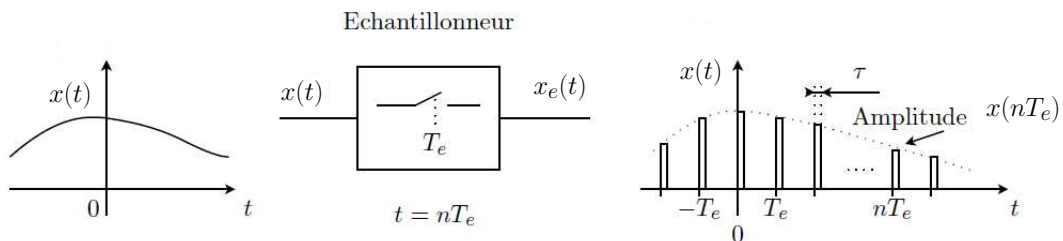


FIGURE 2.13: Echantillonnage bloqueur

Nota :

— $x(t)$, $x^*(t)$, $x_e(t)$ sont des signaux temporels

— $x(t)$, $x_e(t)$ sont des signaux physiques, tandis que $x^*(t)$ est un signal idéalisé, nécessaire aux développements mathématiques.

Spectre d'un signal échantillonné $x^*(t)$

→ **Spectre $x(t)$**

$$X(\omega) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.65)$$

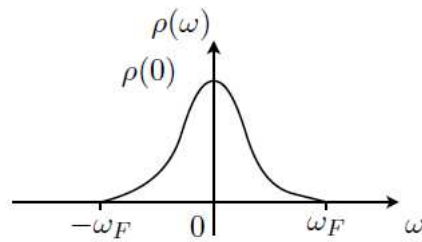


FIGURE 2.14: Spectre d'amplitude de $x(t)$

→ **Spectre de $P(t)$**

$$P(\omega) = TF[P(t)] = \frac{2\pi}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_e) \quad (2.66)$$

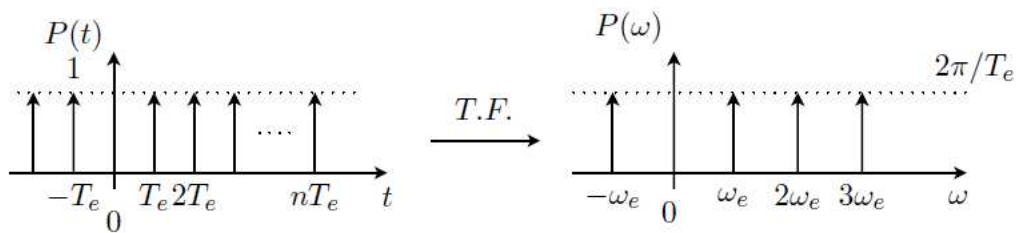


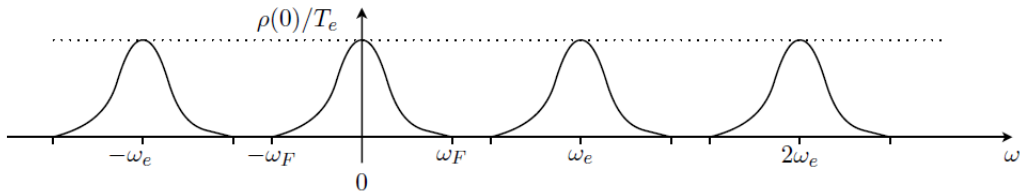
FIGURE 2.15: Spectre de $P(t)$

→ **Spectre de $x^*(t)$**

$$X^*(\omega) = TF[x^*(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_e) \quad (2.67)$$

On faisons l'hypothèse que $\omega_e \gg \omega_F$.

Le spectre du signal échantillonné $x^*(t)$ est périodique, de période ω_e .

FIGURE 2.16: Interprétation géométrique du spectre de $x^*(t)$

2.7.2 Théorème de Shannon

Pour pouvoir reconstituer $X(\omega)$ à partir de $X^*(\omega)$ (à $\frac{1}{T_e}$), il faut que la pulsation (fréquence) d'échantillonnage ω_e soit au moins le double de la plus grande pulsation, ω_{max} , du spectre de $x(t)$.

$$\omega_e \geq 2\omega_{max} \quad (2.68)$$

→ Repliement du spectre

Lorsque la condition (2.68) précédente n'est plus respectée, les « motifs » correspondant aux différentes valeurs de k se **chevauchent** : on dit qu'il se produit un repliement du spectre.

→ Filtre anti-repliement

Pour éviter ce recouvrement spectral nuisible, on doit éliminer préalablement la partie inutile (ou nuisible) du signal à échantillonner à l'aide d'un filtre passe-bas analogique (à forte atténuation lors de sa bande passante). Ce filtre porte le nom de filtre anti-repliement (ou antialiasing en anglais)

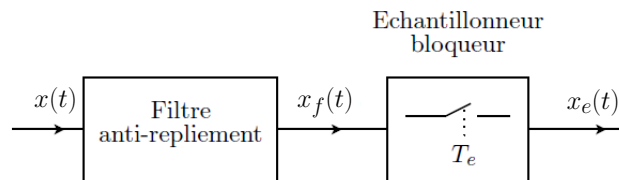


FIGURE 2.17: Une partie de la chaîne d'acquisition de données avec filtre anti-repliement

3

Systèmes linéaire et filtrage

Dans le cadre de ce chapitre, nous aborderons quelques notions élémentaires qui concernent les filtres linéaires. Trois types de filtres seront abordés, à savoir, les filtres passes bas, les filtres passes hauts et les filtres passes bandes. Afin de permettre d'appréhender le contenu de ce chapitre, nous présenterons dans ce qui suit un rappel sur les systèmes.

Mots clés : Systèmes linéaires, Fonction de transfert, Filtres linéaires, Diagramme de Bode.

3.1 Rappel sur les systèmes

3.1.1 Notion de système

Un système, agrégation d'éléments interconnectés, est constitué naturellement ou artificiellement afin d'accomplir une tâche prédéfinie. Son état est affecté par une ou plusieurs variables. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sorties.

Un système est généralement représenté schématiquement par un **schéma fonctionnel** qui consiste en un rectangle auquel nous ajoutons des flèches entrantes représentant les signaux d'entrée $u(t)$. L'action des entrées du système produit de manière causale des effets mesurés par les signaux de sortie $y(t)$, et d représentant les signaux les perturbations (voir figure 3.1)

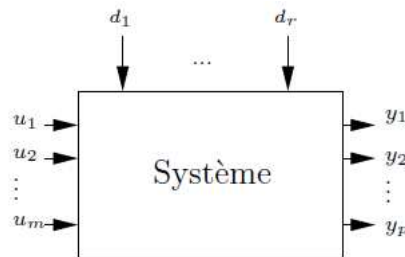


FIGURE 3.1: Système comportant m entrées, p sorties et r perturbations

Remarques :

- La notion de système est indissociable de celle de signal.
- Un système est dit multivariable s'il possède plusieurs entrée/sorties sinon il est dit nono-variable.
- Les entrées affectant le système peuvent être de nature différente. Premièrement, celles qui ont pour but d'exercer des actions entraînant le fonctionnement désiré du système, ce sont dans ce cas les **commandes**. Deuxièmement, celles qui troublent le fonctionnement désiré, ce sont alors les **perturbations**.
- La relation entre les entrées et les sorties du système constitue le modèle mathématique du système.

3.1.2 Systèmes linéaires

Définition

Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et celles de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants. D'un point de vue purement automatique, les systèmes linéaires réalisables doivent vérifier :

1. Le principe de superposition (additivité).
2. Le principe d'homogénéité (proportionnalité).

Principe de superposition

On dit qu'un système de type entrée-sortie relève du principe de superposition si :

- En additionnant deux entrées quelconques, la sortie est la somme des deux sorties correspondantes.
- En additionnant plusieurs entrées quelconques, la sortie est la somme des sorties correspondantes.

Autrement dit, si y_1 est la réponse à l'entrée e_1 , et si y_2 est la réponse à l'entrée e_2 alors la réponse au signal d'entrée $e = e_1 + e_2$ est égale à $y = y_1 + y_2$.

Principe d'homogénéité ou proportionnalité à la cause

Si y est la réponse à l'entrée e , alors $\lambda.y$ est la réponse à l'entrée $\lambda.e$. Notons ici, que l'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou lorsque le régime permanent s'établit.

3.1.3 Systèmes continus

Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques qui le caractérisent sont des fonctions continues du temps, on parle dans ce cas d'un système analogique.

3.1.4 Systèmes invariant

Un système est dit un système invariant lorsque ses caractéristiques ne se modifient pas dans le temps.

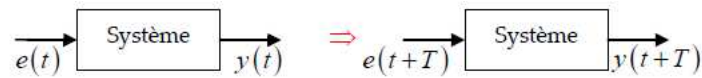


FIGURE 3.2: Représentation schématique d'un système invariant.

3.1.5 Systèmes dynamiques et systèmes instantanés

Systèmes instantanés

Un système instantané est un système pour lequel les sorties dépendent uniquement et instantanément des grandeurs d'entrée.

Exemple 1 :

Soit le circuit électrique suivant :

- $u(t)$ est la tension d'entrée.
- $i(t)$ est le courant électrique.
- R est la résistance.

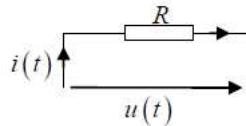


Schéma descriptif du système

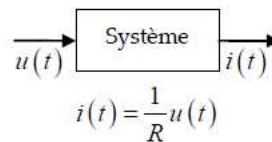


Schéma fonctionnel du système

FIGURE 3.3: Exemple d'un système instantané.

Notons ici que la sortie du système (le courant $i(t)$) dépend instantanément de la grandeur d'entrée, à savoir la tension $u(t)$.

Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système dont les grandeurs de sortie dépendent de valeurs instantanées et antérieures des grandeurs d'entrée, on parle dans ce cas d'effet de mémoire ou d'inertie.

Exemple 2 :

Considérons le circuit électrique suivant :

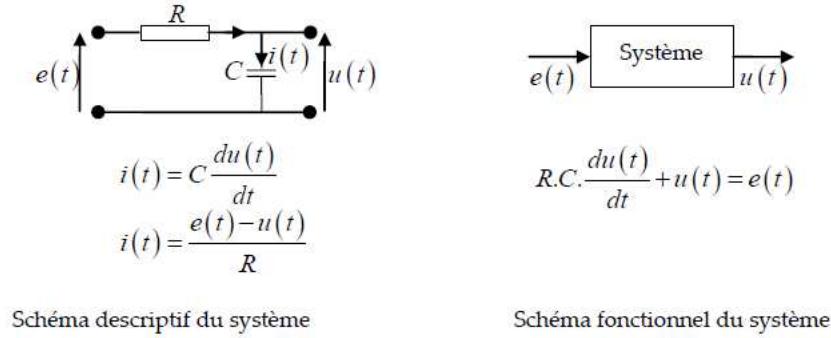


FIGURE 3.4: Exemple d'un systèmes dynamique.

3.1.6 Fonction de transfert d'un système

La fonction de transfert est une technique qui se base sur la transformée de Laplace. Elle permet de décrire la relation entre les signaux d'entrée et les signaux de sortie. Considérons un système dynamique continu linéaire invariant qui possède une entrée $e(t)$ et une sortie $y(t)$. Supposons également qu'il est régi par une équation différentielle de n degré.

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b_m \cdot \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{de}{dt} + b_0 \cdot e \quad (3.1)$$

En appliquant la transformée de Laplace, tout en supposant nulles les différentes conditions initiales, nous obtenons alors :

$$a_n \cdot s^n \cdot Y(s) + a_{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot Y(s) + \dots + a_1 \cdot s \cdot Y(s) + a_0 \cdot Y(s) = b_m \cdot s^m \cdot E(s) + b_{m-1} \cdot s^{m-1} \cdot E(s) + \dots + b_1 \cdot s \cdot E(s) + b_0 \cdot E(s) \quad (3.2)$$

Soit,

$$\left[a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 \right] \cdot Y(s) = \left[b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0 \right] \cdot E(s) \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) peut être alors reformulée comme suit :

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (3.4)$$

Cette fraction rationnelle (3.4) de deux polynômes de la variable complexe s est appelée fonction de transfert du système et elle est communément notée :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} \quad (3.5)$$

3.2 Filtres linéaires

Un filtre linéaire est un système linéaire dynamique invariant qui laisse passer certaines fréquences du signal d'entrée et arrête (atténue) le reste. Focalisons-nous dans cette partie sur la réponse en **régime harmonique** d'un système linéaire. C'est-à-dire, étudier le comportement

d'un filtre lorsque l'entrée du système est un signal sinusoïdal. Dans ce cas, la variable de Laplace s sera remplacée par $j2\pi f = j\omega$. La fonction de transfert devient alors :

$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} \quad (3.6)$$

Le module de la fonction de transfert est défini alors par :

$$|F(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|E(j\omega)|} \quad (3.7)$$

A partir du module, nous pouvons définir le gain en Décibel :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} (|F(j\omega)|) \quad (3.8)$$

Nous pouvons également définir l'argument de la fonction de transfert $Arg(F(j\omega))$ comme étant la phase entre le signal d'entrée $E(j\omega)$ et le signal de sortie.

3.2.1 Représentation graphique et caractérisation fréquentielle de la fonction de transfert d'un filtre linéaire (diagramme de Bode)

Le diagramme de Bode est une méthode graphique d'analyse. Il est composé de deux courbes :

1. La courbe de gain : elle consiste à tracer directement le gain G_{dB} en fonction de la fréquence ω ou f avec une échelle logarithmique pour ω .
2. La courbe de phase : elle consiste à tracer l'argument de la fonction de transfert du filtre sur la même échelle de fréquence que celle utilisée dans la courbe de gain.

En ce qui concerne l'échelle logarithmique de fréquence, elle s'agit du logarithme de décimal. Elle permet, entre autres, d'étirer les basses fréquences et de contracter les hautes fréquences.

La fréquence de coupure d'un filtre, notée ω_c , est la fréquence qui vérifie la relation suivante :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (3.9)$$

Elle correspond aussi à

$$20 \cdot \log_{10} |H(j\omega_c)| = 20 \cdot \log |H_{\max}| - 20 \cdot \log \sqrt{2} \quad (3.10)$$

Exemple 3 : Considérons la courbe de gain suivante :

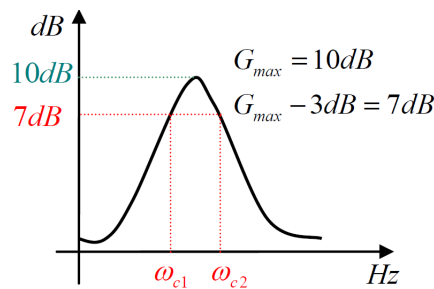


FIGURE 3.5: courbe du gain.

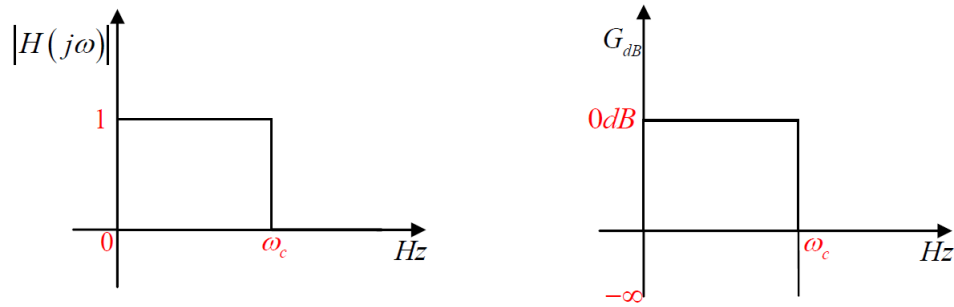


FIGURE 3.6: courbes de module d'un filtre passe-bas idéal.

3.2.2 Filtres idéaux

— *Filtre passe-bas idéal*

Un filtre passe-bas doit « laisser-passer » uniquement les composantes de fréquence inférieure à une fréquence donnée ω_c (fréquence de coupure). Les courbes de modules de ce filtre sont représentées comme suit :

— *Filtre passe-haut idéal*

Un filtre passe-haut idéal doit « laisser-passer » uniquement les composantes de fréquence supérieure à une fréquence donnée ω_c (fréquence de coupure). Les courbes de gain de ce filtre sont données ci-après :

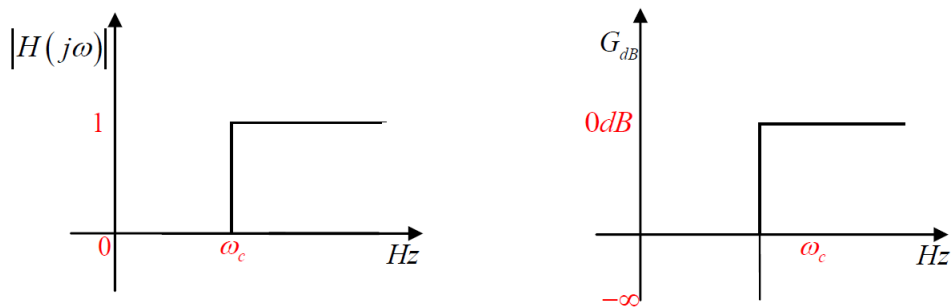


FIGURE 3.7: courbes de module d'un filtre passe-haut idéal.

— *Filtre passe-bande idéal*

Un filtre passe-bande idéal doit « laisser-passer » uniquement des composantes de fréquence comprise entre deux fréquences données ω_{c1} et ω_{c2} (fréquence de coupure basse et fréquence de coupure haute). Les courbes de module de ce filtre sont les suivantes : Notons ici que les

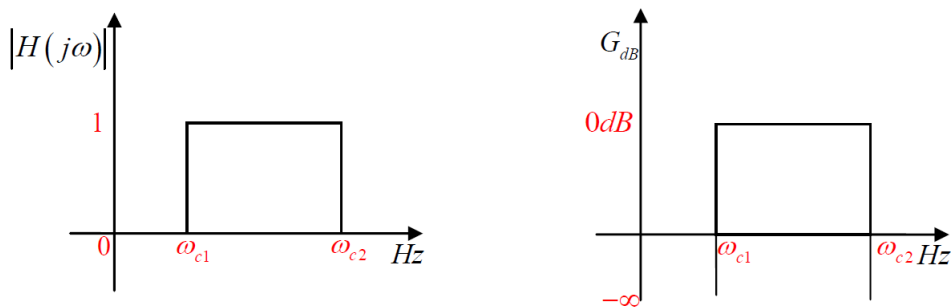


FIGURE 3.8: courbes de module d'un filtre passe-bande idéal.

filtres idéaux sont des filtres irréalisables. Dans ce qui suit, nous passons en revue quelques filtres réels réalisables.

3.2.3 Filtres réels

— **Filtre passe-bas du premier ordre**

Un filtre passe-bas réel du premier ordre est caractérisé par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{H_0}{1 + \tau s} \quad (3.11)$$

En régime harmonique, la fonction de transfert du filtre s'écrit alors :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (3.12)$$

Avec $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ est la fréquence de coupure. Le module de la fonction de transfert du filtre est :

$$|H(j\omega)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad (3.13)$$

$$G_{dB} = 20. \log_{10} |H_0| - 20. \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (3.14)$$

En ce qui concerne l'argument de la fonction de transfert est donné comme suit :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(H_0) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (3.15)$$

Afin de tracer le diagramme de Bode, nous procédons à la détermination de quelques points importants : Pour $\omega \rightarrow 0$, $|H(j0)| = |H_0| \Rightarrow G_{dB} = 20. \log_{10} |H_0| = G_0$.

$$\text{Arg}(H(j0)) = \text{Arg}(H_0).$$

Pour $\omega = \omega_c$, $|H(j\omega_c)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}}$, $G_{dB} = G_0 - 3dB$.

$$\text{Arg}(H(j\omega_c)) = \text{Arg}(H_0) - \frac{\pi}{4}.$$

Pour $\omega = 10\omega_c$, $|H(j10\omega_c)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1+100}} \approx \frac{H_0}{10}$, $G_{dB} = G_0 - 20dB$.

$$\text{Arg}(H(j10\omega_c)) = \text{Arg}(H_0) - \arctan(10).$$

Pour $\omega \rightarrow +\infty$, $|H(j\infty)| = 0$, $G_{dB} = 20. \log_{10}(0) = -\infty$.

$$\text{Arg}(H(j\infty)) = \text{Arg}(H_0) - \frac{\pi}{2}.$$

Le tracé asymptotique du diagramme de Bode du filtre considéré est représenté ci-après :

— **Filtre passe-bas du deuxième ordre**

Un filtre passe-bas réel du second ordre est caractérisé par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{H_0}{(1 + \tau s)^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{H_0}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (3.16)$$

Avec $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ est la fréquence de coupure. Pour ce qui est du module de la fonction de transfert, on peut écrire alors :

$$|H(j\omega)| = \frac{|H_0|}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \Rightarrow G_{dB} = G_0 - 20. \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right) \quad (3.17)$$

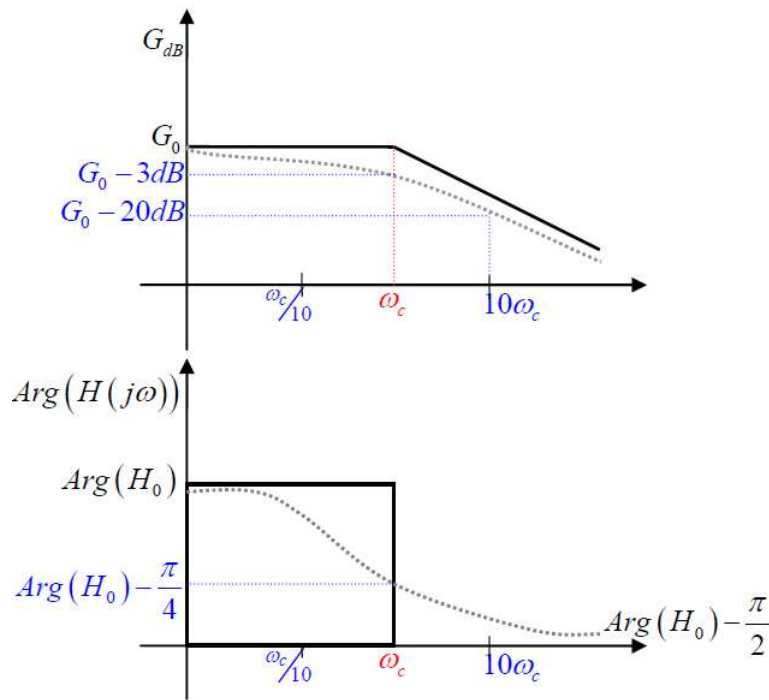


FIGURE 3.9: diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre.

En ce qui concerne l'argument de la fonction de transfert :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(H_0) - 2 \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (3.18)$$

Afin de tracer le diagramme de Bode, nous déterminons quelques points importants : Pour $\omega \rightarrow 0$, $|H(j0)| = |H_0| \Rightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |H_0| = G_0$.

$$\text{Arg}(H(j0)) = \text{Arg}(H_0).$$

Pour $\omega = \omega_c$, $|H(j\omega_c)| = \frac{|H_0|}{2}$, $G_{dB} = G_0 - 6dB$.

$$\text{Arg}(H(j\omega_c)) = \text{Arg}(H_0) - \frac{\pi}{2}.$$

Pour $\omega = 10\omega_c$, $|H(j10\omega_c)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1+1000}} \approx \frac{H_0}{100}$, $G_{dB} = G_0 - 40dB$.

$$\text{Arg}(H(j10\omega_c)) = \text{Arg}(H_0) - \arctan(100).$$

Pour $\omega \rightarrow +\infty$, $|H(j\infty)| = 0$, $G_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(0) = -\infty$.

$$\text{Arg}(H(j\infty)) = \text{Arg}(H_0) - \pi.$$

Le tracé asymptotique du diagramme de Bode du filtre considéré est présenté ci-après : En comparant les deux filtres (filtre passe-bas du premier ordre et le filtre passe-bas du second ordre), nous pouvons constater que celui du second ordre est meilleur en termes d'atténuation des hautes fréquences (fréquences supérieure à ω_c). Ceci est dû à une pente d'atténuation de l'ordre de $-40dB/décade$.

— Filtre passe-haut du premier ordre

Un filtre passe-haut réel du 1^{er} ordre est caractérisé par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{K \cdot s}{\tau + s} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K \cdot j \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \quad (3.19)$$

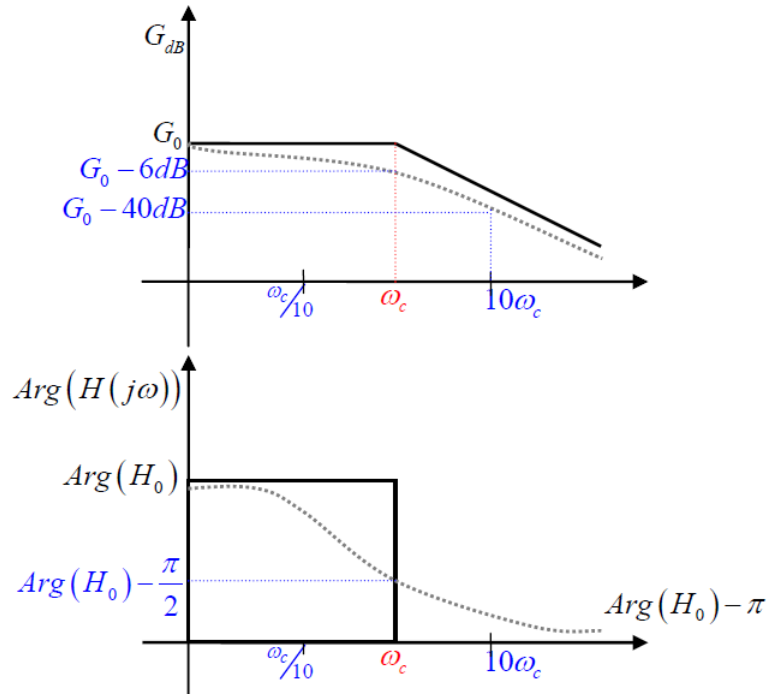


FIGURE 3.10: diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du second ordre.

avec $\omega_c = \tau$ est la fréquence de coupure du filtre. Le module de la fonction de transfert du filtre est déterminé comme suit :

$$|H(j\omega)| = K \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \Rightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(K) + 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) - 20 \cdot \log_{10}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right) \quad (3.20)$$

En ce qui concerne l'argument de la fonction de transfert, il est déterminé comme suit :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (3.21)$$

Afin de pouvoir tracer le diagramme de Bode, nous déterminons quelques points importants : Pour $\omega \rightarrow 0$, $|H(j0)| = 0 \Rightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(0) = -\infty$.

$$\text{Arg}(H(j0)) = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $\omega = \omega_c$, $|H(j\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$, $G_{dB} = G_\infty - 3dB$.

$$\text{Arg}(H(j\omega_c)) = \frac{\pi}{4}.$$

Pour $\omega = \omega_c/10$, $|H(j\omega_c/10)| \approx \frac{K}{10}$, $G_{dB} = G_\infty - 20dB$. Pour $\omega \rightarrow +\infty$, $|H(j\infty)| = K$, $G_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(K) = G_\infty$.

$$\text{Arg}(H(j\infty)) = 0.$$

Le tracé asymptotique du diagramme de Bode du filtre considéré est présenté ci-après :

— **Filtre passe-bande du premier ordre**

Un filtre passe-bande du premier ordre est caractérisé par une fonction de transfert qui possède quelques spécificités qu'on doit définir :

- ω_0 est la pulsation ou la fréquence centrale du filtre.

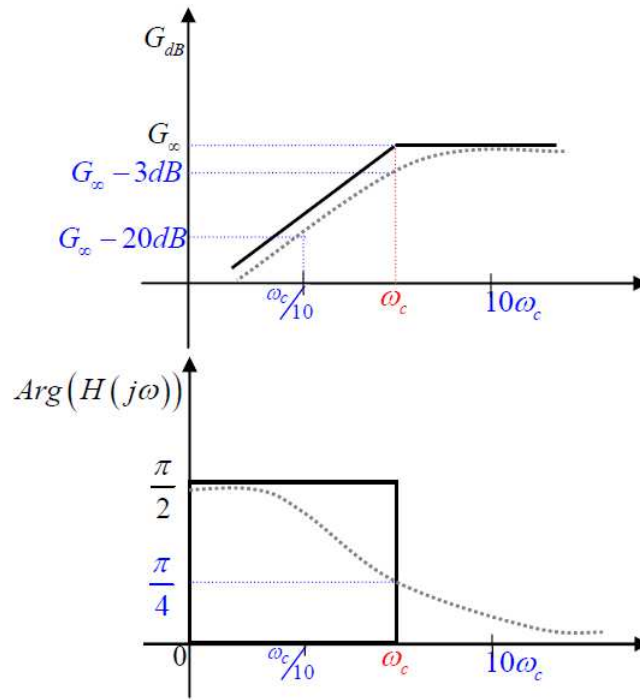


FIGURE 3.11: diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre.

- T_{\max} est le module de la fonction de transfert pour $\omega = \omega_c$ (on considère que $T_{\max} > 0$).
- Q est le facteur de qualité du filtre défini par la bande passante $\Delta\omega = \omega_0/Q$ (plus Q est grand, plus la bande passante $\Delta\omega$ est étroite et plus le filtre est sélectif).

La fonction de transfert s'écrit alors comme suit :

$$H(j\omega) = \frac{T_{\max}}{1 + Q \cdot j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (3.22)$$

Le module de la fonction de transfert est déterminé de la façon suivante :

$$|H(j\omega)| = \frac{T_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (3.23)$$

En ce qui concerne l'argument de la fonction de transfert, il est calculé de la manière suivante :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (3.24)$$

Dans ce qui suit, nous déterminons quelques points importants pour tracer le diagramme de Bode. Pour $\omega \rightarrow 0$, $|H(j0)| = 0 \Rightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(0) = -\infty$.

$$\text{Arg}(H(j0)) = \frac{\pi}{2}.$$

Notons que pour les basses fréquences le filtre passe-bande se comporte de façon similaire à celle d'un filtre passe-haut. Pour $\omega \rightarrow +\infty$, $|H(j\infty)| = 0$, $G_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(T_{\max}) = G_{\max}$.

$$\text{Arg}(H(j\infty)) = -\frac{\pi}{2}.$$

Contrairement à son comportement en basse fréquence, le filtre passe-bande se comporte en hautes fréquences comme un filtre passe-bas. Pour $\omega = \omega_0$, $|H(j\omega_0)| = T_{\max}$, $G_{dB} = G_\infty - 3\text{ dB}$.

$$\text{Arg}(H(j\omega_0)) = 0.$$

Pour $\omega = \omega_0/10$ et $\omega = 10.\omega_0$,

$$|H(j\omega_0/10)| \approx \frac{T_{\max}}{\sqrt{1+100.Q^2}}, G_{dB} = 20.\log_{10}(T_{\max}) - 20.\log_{10}\left(\sqrt{1+100.Q^2}\right).$$

Le tracé asymptotique du diagramme de Bode du filtre considéré est représenté ci-après :
Donnons dans le paragraphe suivant, un exemple de filtre passe-bas dans le cas d'un

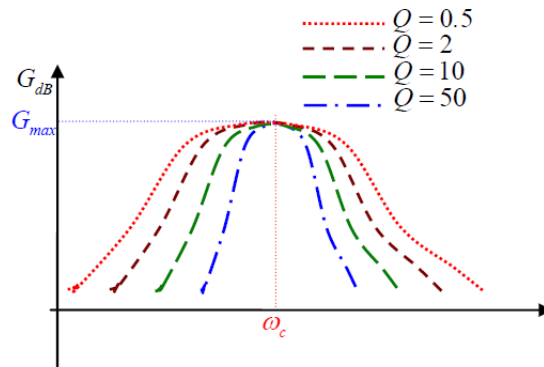


FIGURE 3.12: diagramme de Bode d'un filtre passe-bande du premier ordre.

système mécanique.

Exemple 4 : La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue. La suspension d'un véhicule permet :

1. aux roues de suivre les inégalités du sol sans communiquer au châssis des efforts trop importants, ceci en filtrant les sollicitations de la route.
2. d'assurer le maintien du contact des roues avec le sol (la tenue de la route).

Le confort vibratoire du conducteur ainsi que des passagers dépend essentiellement de deux paramètres :

1. la fréquence des oscillations.
2. et l'accélération verticale qu'ils subissent.

Les principaux éléments constitutifs d'une suspension sont indiqués sur la figure 3.13 :

- le pneu (1) avec son amortisseur (caoutchouc)
- le ressort (2)
- l'amortisseur (3)
- le siège (4) avec son amortisseur (mousse).

On suppose que la masse m_v du châssis et des passagers est également répartie entre les quatre systèmes de suspension. On désigne par m la masse supportée par chacun des systèmes, qui sera appelé « suspension » par la suite (on parle aussi de « modèle de quart de voiture »).

Modèle de suspension simplifié :

Les pneus et les sièges sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude. Les pneus sont supposés rester en contact avec la route. On utilise le modèle de suspension simplifié de la figure 3.14. La suspension est constituée :

1. d'un ressort métallique de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 ,
2. d'un amortisseur à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de coefficient f .

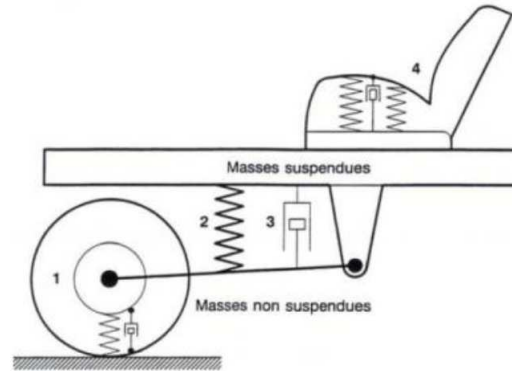


FIGURE 3.13: les éléments constitutifs d'une suspension.

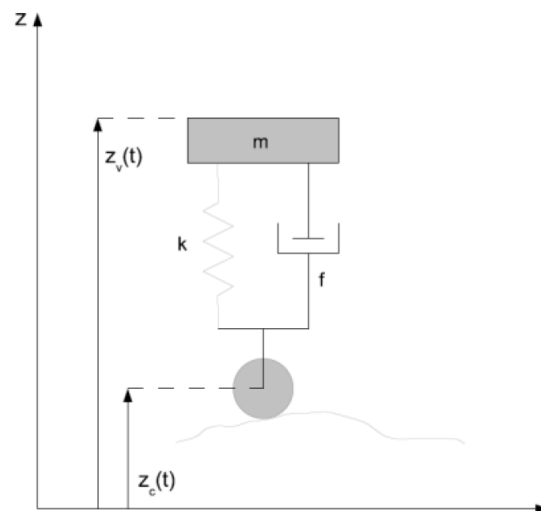


FIGURE 3.14: modèle simplifié d'une suspension.

On désigne par $z_v(t)$ les variations de la hauteur du châssis par rapport à l'équilibre. On suppose que le profil de la route impose au centre de la roue un déplacement vertical $z_c(t)$ par rapport à sa position d'équilibre. Étudions un système idéal Masse-Ressort-Amortisseur, avec une masse m fixe (dans le sens où le corps garde la même masse tout au long de l'étude), une constante de raideur k , et un coefficient d'amortissement f :

$$F_r = -k(z_v(t) - z_c(t)) \quad (3.25)$$

$$F_a = -f(\dot{z}_v(t) - \dot{z}_c(t)) \quad (3.26)$$

D'après la conservation de la quantité de mouvement :

$$-k(z_v(t) - z_c(t)) - f(\dot{z}_v(t) - \dot{z}_c(t)) = m\ddot{z}_v(t) \quad (3.27)$$

En utilisant la transformée de Laplace, la fonction de transfert du système s'écrit comme suit :

$$H(s) = \frac{Z_v(s)}{Z_c(s)} = \frac{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (3.28)$$

Pour les valeurs numériques suivante : $m_v = 1260 \text{ kg}$, soit $m = 315 \text{ kg}$, $k = 29.5 \text{ kN/m}$, $f = 1850 \text{ Ns/m}$, nous traçons le diagramme de Bode de la fonction de transfert $H(s)$ (Figure 3.15). Nous pouvons alors constater que le système présenté se comporte comme un filtre passe-bas.

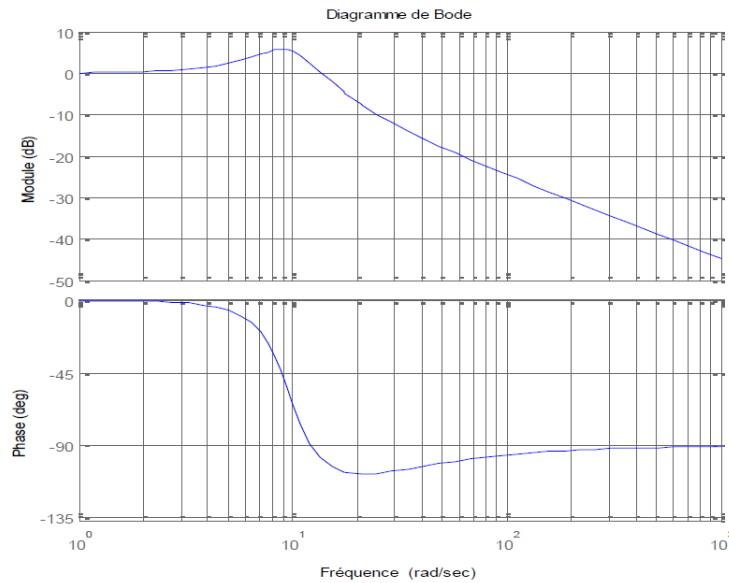


FIGURE 3.15: diagramme de Bode de la suspension.

4

Réponse temporelle des systèmes linéaires

Nous passons en revue dans ce chapitre deux types de réponses temporelles, à savoir, la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle. Deux types de systèmes seront étudiés ; les systèmes linéaires du premier ordre et les systèmes linéaires du second ordre.

Mots clés : Réponse impulsionnelle, Réponse indicielle.

4.1 Système du premier ordre

C'est un système régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$y(t) + \tau \frac{dy(t)}{dt} = K \cdot e(t) \quad (4.1)$$

avec $y(t)$ et $e(t)$ sont respectivement la sortie et l'entrée du système. En appliquant la transformée de Laplace sur l'équation (4.1) tout en supposant que la condition initiale $y(0^+) = 0$ est nulle, nous pouvons alors obtenir :

$$Y(s) \cdot (1 + \tau s) = K \cdot E(s) \quad (4.2)$$

La fonction de transfert d'un système linéaire du premier ordre est donnée donc :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot s} \quad (4.3)$$

avec K et τ sont respectivement le gain statique et la constante de temps. Dans ce qui suit, nous étudions la réponse temporelle du système du premier ordre pour deux types d'entrée ; la réponse à une impulsion de Dirac et la réponse à un échelon.

4.1.1 Réponse à une impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle)

Soit le signal d'entrée $e(t)$ est une impulsion de Dirac $\delta(t)$ définie comme suit :

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.4)$$

Notons que la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est égale à 1. Alors, la sortie du système est définie comme suit :

$$Y(s) = H(s) \cdot E(s) = \frac{K}{1 + \tau \cdot s} \cdot 1 = \frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau} + s} \quad (4.5)$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, la réponse temporelle du système peut être déterminée comme suit :

$$y(t) = \frac{K}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \quad (4.6)$$

Le tracé de la réponse impulsionnelle (4.6) d'un système du premier ordre est présenté dans la figure suivante :

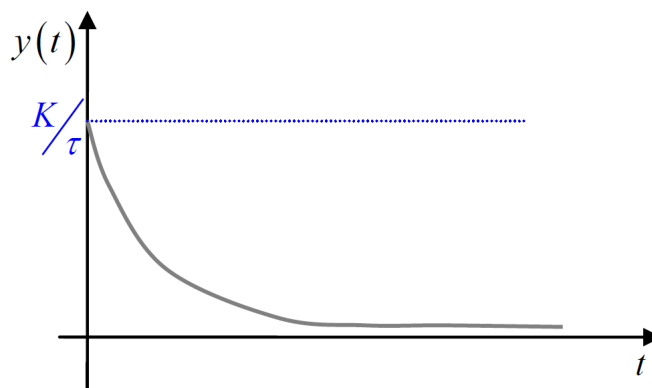


FIGURE 4.1: réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

4.1.2 Réponse à un échelon (réponse indicielle)

Dans cette section, nous considérons que le signal d'entrée $e(t)$ est un échelon $u(t)$. La fonction échelon est une fonction réelle de la variable réelle t définie par :

$$u(t) = \begin{cases} +A & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

La transformée de Laplace de la fonction échelon est définie comme suit :

$$TL[u(t)] = U(s) = \frac{A}{s} \quad (4.8)$$

Dans ce cas, la sortie du système du premier ordre peut être calculée de la façon suivante :

$$Y(s) = H(s) \cdot E(s) = \frac{K}{1 + \tau \cdot s} \cdot \frac{A}{s} = \frac{K \cdot A}{s \cdot (1 + \tau \cdot s)} = \frac{K \cdot A / \tau}{s \cdot \left(\frac{1}{\tau} + s\right)} \quad (4.9)$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse temporelle du système du premier ordre à une entrée de type échelon peut être écrite comme suit :

$$y(t) = K \cdot A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (4.10)$$

Nous présentons dans ce qui suit quelques points caractéristiques de la réponse indicielle d'un système du premier ordre.

- Pour $t = \tau \Rightarrow y(t) = K \cdot A (1 - e^{-1}) = 0.63 \cdot K \cdot A$.
- Pour $t = 2 \cdot \tau \Rightarrow y(t) = K \cdot A (1 - e^{-2}) = 0.86 \cdot K \cdot A$.
- Pour $t = 3 \cdot \tau \Rightarrow y(t) = K \cdot A (1 - e^{-3}) = 0.95 \cdot K \cdot A$.

On définit alors le temps de réponse à 95% obtenu pour $t = 3 \cdot \tau$: $t_r \text{ à } 95\% = 3 \cdot \tau$. Comme on définit également la valeur finale lorsque le temps tend vers l'infinie : *

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} K \cdot A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = K \cdot A \quad (4.11)$$

Ainsi, l'erreur statique est définie comme suit :

$$\varepsilon = A - K \cdot A = (1 - K) \cdot A \quad (4.12)$$

Le tracé graphique de la réponse indicielle d'un système du premier ordre est donné dans la figure suivante :

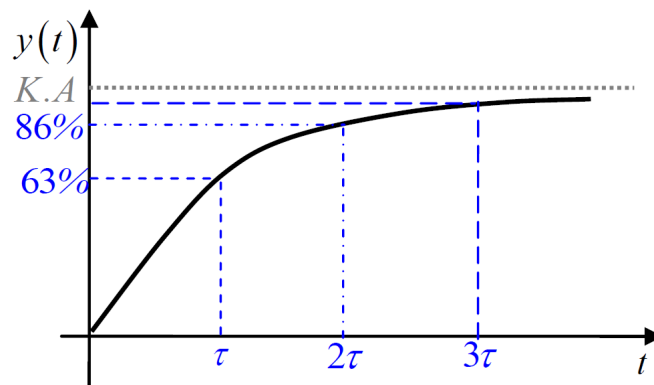


FIGURE 4.2: réponse indicielle d'un système du premier ordre.

4.1.3 Application 1

Un thermomètre utilisé pour mesurer la température des patients (figure 4.3) peut être modélisé à l'aide de l'équation différentielle :

$$C \frac{dT}{dt} = \frac{T_r(t) - T(t)}{R} \quad (4.13)$$

où C est la capacité thermique du thermomètre, R la résistance thermique, $T(t)$ la température mesurée et $T_r(t)$ la température de référence. Ainsi, cette équation peut être réécrite pour correspondre au format général

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{RC}T(t) = \frac{T_r(t)}{RC} \quad (4.14)$$

étant $T(t)$ la sortie système et $T_r(t)$ l'entrée de référence et avec une valeur initiale de $T(t) = T_0$. Pour obtenir une réponse du système avec $RC = 20\text{sec}$ à partir de $T_0 = 20^\circ\text{C}$ (Condition Initiale CI) et pour un signal d'entrée échelon $T_r(t) = 38^\circ\text{C}$. En appliquant la transformation de Laplace, on obtient :

$$T(s) = \frac{0.05}{s + 0.05}T_r(s) + \frac{1.25}{s + 0.05} = Y_1(s) + Y_2(s) \quad (4.15)$$

with $T_r(s) = \frac{38}{s}$ the input signal in Laplace domain.



FIGURE 4.3: Thermomètre utilisé pour mesurer la température des patients

La figure 4.4 montre les graphiques correspondant aux différentes parties des réponses obtenues.

4.2 Système du second ordre

Il s'agit d'un système régi par une équation différentielle à coefficients constants du second ordre.

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y = b e(t) \quad (4.16)$$

avec $y(t)$ et $e(t)$ sont respectivement la sortie et l'entrée du système. Si toutes les conditions initiales sont supposées nulles, la transformée de Laplace de l'équation différentielle (4.16) est déterminée comme suit :

$$\left[a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \right] \cdot Y(s) = b E(s) \quad (4.17)$$

La fonction de transfert décrivant le fonctionnement d'un système du second ordre est donnée par :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.18)$$

L'équation (4.18) peut être mise sous les deux formes canoniques suivantes :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2m \cdot \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4.19)$$

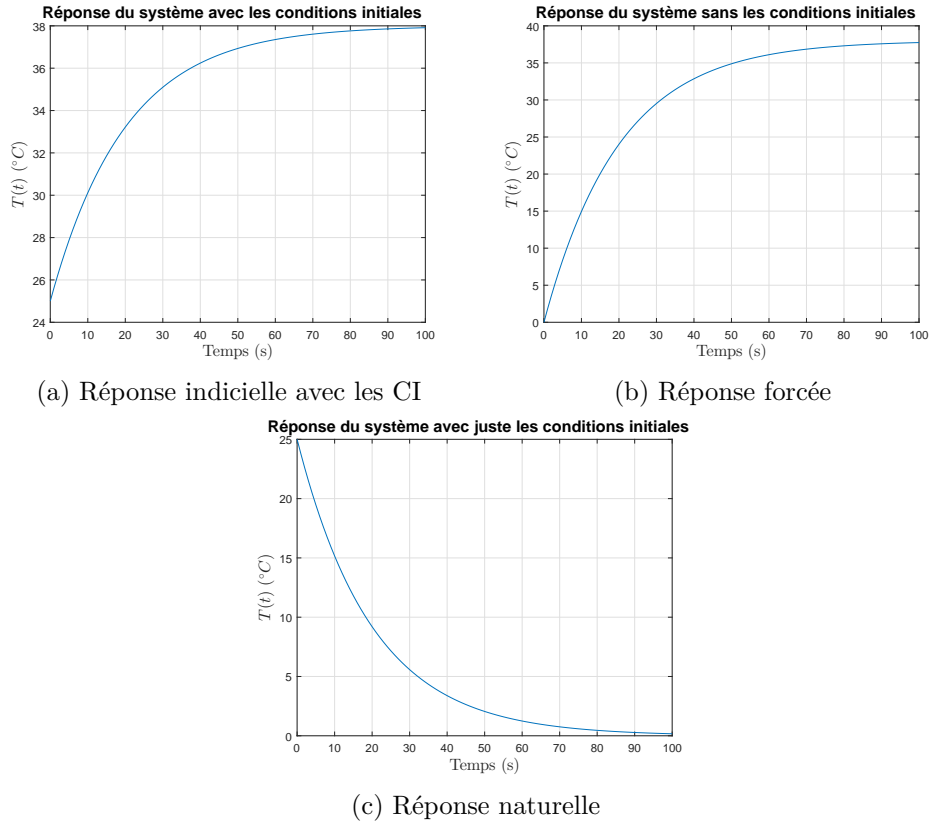


FIGURE 4.4: Réponses du système

avec ω_0 est la pulsation propre et m est le coefficient d'amortissement. Comme nous pouvons aussi la mettre sous la forme canonique suivante :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{G}{1 + \frac{2m}{\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2} \quad (4.20)$$

Afin de mettre en évidence les formes canoniques, nous présentons l'exemple suivant.

Exemple 1 : Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{6}{4s^2 + 7s + 8} \quad (4.21)$$

Mettons la fonction de transfert (4.21) sous la forme canonique (4.19). Soit,

$$H(s) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{(s^2 + 7/4s + 2)} \quad (4.22)$$

Par identification, nous pouvons dire que $\omega_0^2 = 2$, $m = \frac{7\sqrt{2}}{16}$ et $K = \frac{3}{4}$. En ce qui concerne l'analyse temporelle d'un système du second ordre, nous présentons dans ce qui suit les réponses impulsionnelle et indicielle.

4.2.1 Réponse à une impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle)

Dans cette section, nous considérons que l'entrée est une impulsion de Dirac. Nous supposons également que la constante $K = 1$. Ainsi, la sortie du système dans le domaine de Laplace est définie comme suit :

$$Y(s) = H(s) \cdot E(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2m\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot 1 = \frac{\omega_0^2}{D(s)} \quad (4.23)$$

Calculons alors le déterminant du polynôme $D(s)$:

$$\Delta^* = (m\omega_0)^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 (m - 1) \quad (4.24)$$

En analysant le déterminant (4.24), quatre cas de figures sont possibles.

1. *Cas de deux racines réelles (système amorti $m > 1$)*

Supposons que $\Delta^* > 0$, dans ce cas nous avons deux racines p_1 et p_2 définies comme suit : $p_1 = \omega_0 (-m + \sqrt{m^2 - 1})$ et $p_2 = -\omega_0 (m + \sqrt{m^2 - 1})$ Ainsi, la fonction de transfert du système peut être reformulée de la manière suivante :

$$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{(s - p_1)(s - p_2)} = \omega_0^2 \left(\frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} \right) \quad (4.25)$$

Par identification, nous pouvons déterminer les constantes A et B . Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

$$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0\sqrt{m^2 - 1}} \cdot \left(\frac{1}{s - p_1} - \frac{1}{s - p_2} \right) \quad (4.26)$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, nous obtenons la réponse impulsionnelle : $y(t) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$ avec $p_1 < p_2 < 0$ Le tracé de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre amorti est donné dans la figure suivante.

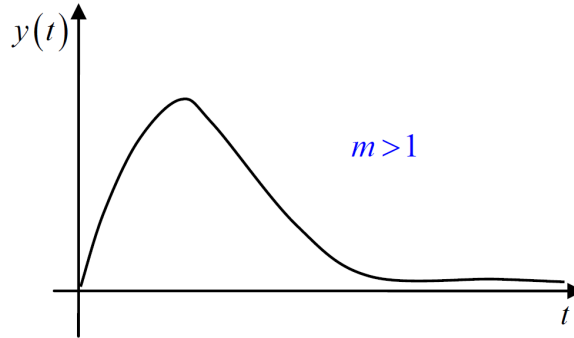


FIGURE 4.5: réponse impulsionnelle d'un système du second ordre amorti.

2. *Cas de deux racines complexes conjuguées (système non amorti $m < 1$)*

Dans ce cas, les racines du polynôme $D(s)$ sont définies comme suit :

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - m^2} \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - m^2} \end{cases} \quad (4.27)$$

Les deux racines (4.27) peuvent être reformulées comme suit :

$$\begin{cases} p_1 = \sigma + j\omega_n \\ p_2 = \sigma - j\omega_n \end{cases} \quad (4.28)$$

avec $\sigma = -m\omega_0$ et $\omega_n = \omega_0\sqrt{1 - m^2}$. Ainsi, la sortie du système dans le domaine de Laplace devient alors :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_0^2}{(s - p_1)(s - p_2)} \\ &= \frac{\omega_0^2}{(s - \sigma - j\omega_n)(s - \sigma + j\omega_n)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

En développant l'équation (4.29), nous pouvons obtenir la formule suivante :

$$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{(s + m\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - m^2)} \quad (4.30)$$

Cette dernière peut être écrite de la manière suivante :

$$Y(p) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} \cdot \frac{\omega_n}{(s + a)^2 + \omega_n^2} \quad (4.31)$$

avec $\omega_n^2 = \omega_0^2(1 - m^2)$ et $a = m\omega_0$. En appliquant la transformée de Laplace inverse, nous obtenons alors :

$$y(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\left(\omega_0 \sqrt{1 - m^2}\right) \cdot t\right) \quad (4.32)$$

Le tracé de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre non amorti est présenté dans la figure suivante.

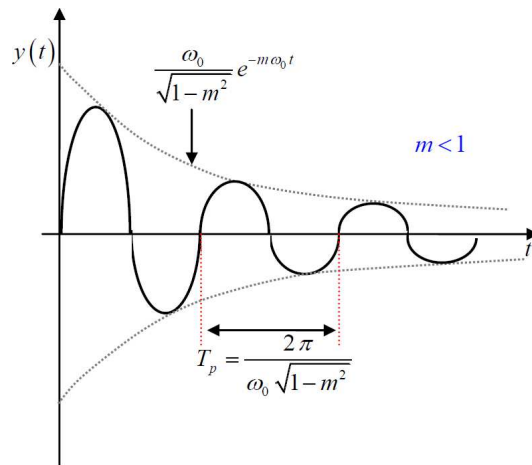


FIGURE 4.6: réponse impulsionnelle d'un système du second ordre nonamorti.

3. **Cas de deux racines réelles multiples ($m=1$)** La réponse impulsionnelle pour $m = 1$ est donnée comme suit :

$$Y(s) = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + 2m\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4.33)$$

Le déterminant dans ce est nul : $\Delta^* = 0$, donc les deux racines sont :

$$p_1 = p_2 = -\omega_0 \quad (4.34)$$

Dans ce cas, la réponse impulsionnelle dans le domaine de Laplace s'écrit comme suit :

$$Y(s) = \frac{K \omega_0^2}{(p + \omega_0)^2} \quad (4.35)$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle dans le domaine temporel s'écrit comme suit :

$$y(t) = K \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} \quad (4.36)$$

4. **Cas de deux racines réelles multiples ($m=0$)** Dans ce cas la réponse impulsionnelle dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$H(s) = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} \quad (4.37)$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, nous pouvons déduire la réponse impulsionnelle temporelle :

$$y(t) = K \omega_0 \sin \omega_0 t \quad (4.38)$$

Le tracé de la réponse impulsionnelle pour $m = 0$ est présenté dans la figure suivante :

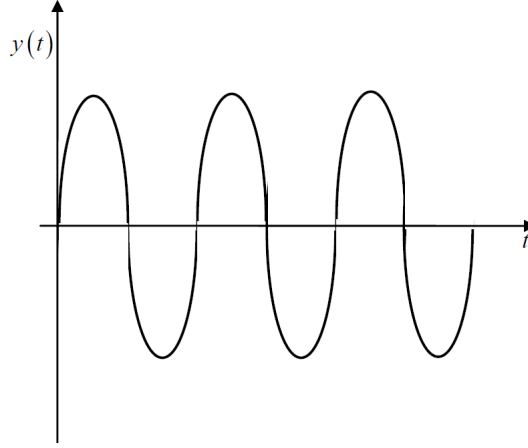


FIGURE 4.7: réponse impulsionnelle d'un système du second ordre avec $m=0$.

4.2.2 Réponse à un échelon (réponse indicielle)

Comme pour le cas de la réponse impulsionnelle, nous avons quatre cas de figure pour la réponse indicielle d'un système du second ordre.

1. *Deux racines réelles (système amorti $m > 1$)*

Dans ce cas de figure, la réponse impulsionnelle dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$Y(s) = H(s) \cdot E(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2m\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot \frac{A}{s} \quad (4.39)$$

En se basant sur les propriétés de la transformée de Laplace, nous pouvons remarquer que la réponse indicielle est l'intégrale de la réponse impulsionnelle entre 0 et t .

$$y(t) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} \cdot \int_0^t (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) dt \quad (4.40)$$

En calculant l'intégrale (4.40), nous obtenons alors :

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{m^2 - 1}} \cdot \left[\frac{e^{(-m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1})t}}{-m + \sqrt{m^2 - 1}} + \frac{e^{(-m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1})t}}{m + \sqrt{m^2 - 1}} \right] \quad (4.41)$$

Le tracé de la réponse indicielle d'un système du second ordre avec un facteur d'amortissement supérieur à 1 est donné dans la figure suivante.

2. *Deux racines complexes conjuguées (système non amorti $m < 1$)*

La réponse indicielle dans le domaine de Laplace d'un système du second ordre avec un facteur d'amortissement $m < 1$ est donnée comme suit :

$$Y(s) = H(s) \cdot E(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2m\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot \frac{A}{s} \quad (4.42)$$

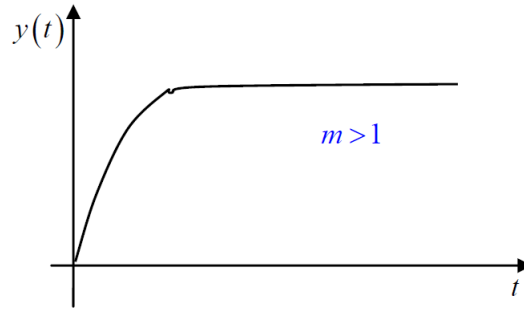


FIGURE 4.8: réponse indicielle d'un système du second ordre amorti.

En intégrant la réponse impulsionnelle, nous pouvons obtenir la réponse indicielle dans le domaine temporelle :

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \varphi) \quad (4.43)$$

avec $\varphi = \arccos(m)$. Le tracé de la réponse indicielle d'un système du second ordre non-amorti est donné dans la figure suivante.

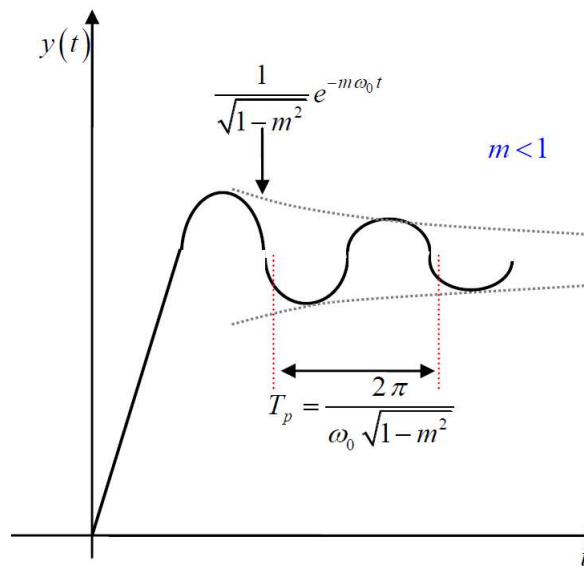


FIGURE 4.9: réponse indicielle d'un système du second ordre amorti.

3. Deux racines multiples ($m=1$)

Dans ce cas, la réponse indicielle dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$Y(s) = H(s) \cdot E(s) = \frac{K \omega_0}{s(s + \omega_0)^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (4.44)$$

L'équation (4.44) peut être reformulée comme suit :

$$Y(s) = H(s) \cdot E(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)^2} \quad (4.45)$$

avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$. En utilisant la transformée de Laplace inverse, nous obtenons :

$$y(t) = K \left(1 - (1 + \omega_0 t) e^{-t\omega_0} \right) \quad (4.46)$$

4. Deux racines multiples ($m=0$)

Dans ce cas, la réponse indicielle dans le domaine de Laplace s'écrit comme suit :

$$Y(s) = H(s) \cdot E(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{K}{s} \quad (4.47)$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, nous obtenons la réponse indicielle dans le domaine temporelle d'un système du second ordre avec un facteur d'amortissement $m = 0$.

$$y(t) = K(1 - \cos \omega_0 t) \quad (4.48)$$

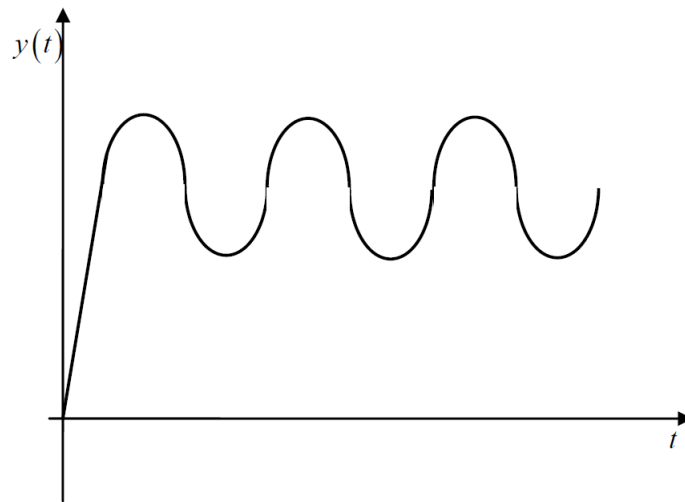


FIGURE 4.10: réponse indicielle d'un système du second ordre avec $m = 0$.

4.2.3 Spécifications sur le régime transitoire

- ➡ t_r : temps de réponse à $\pm 5\%$.
- ➡ D_1 : dépassement maximal en %, avec $D_1 = 100 * \frac{y_{max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}$;

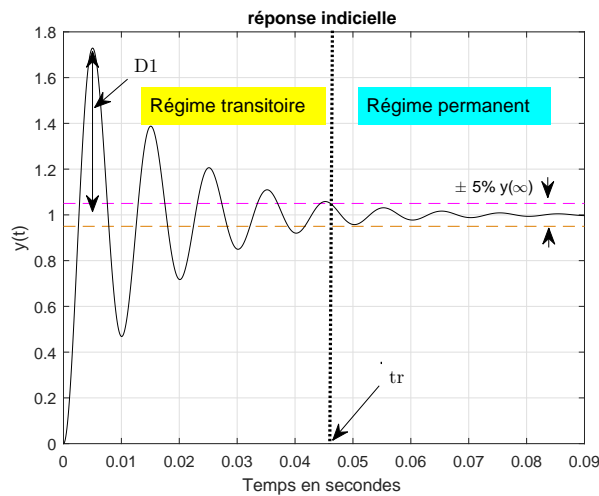


FIGURE 4.11: Analyse transitoire

4.2.4 Application 2

Un capteur de pression sanguine (figure 4.12) peut être modélisé comme un système de second ordre dont la dynamique est donnée par des pôles réels situés à $s_1 = -1$ et $s_2 = -10$ et un gain statique $K_s = 10$. La fonction de transfert du système est donnée par :

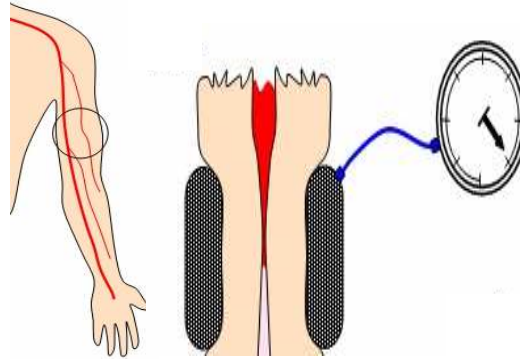


FIGURE 4.12: Un transducteur de pression sanguine

$$H(s) = \frac{10}{(s + 1)(s + 10)} \quad (4.49)$$

La réponse en sortie $y(t)$ de ce système est illustrée à la figure 4.13, dont la forme est similaire à celle des systèmes du premier ordre, mais un peu plus lente au début.

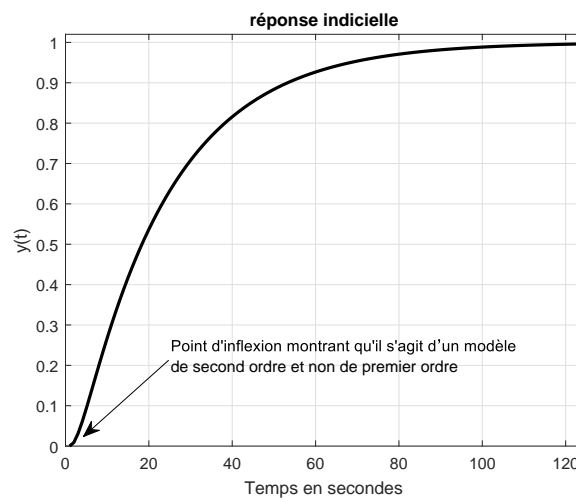


FIGURE 4.13: Réponse indicielle du modèle du transducteur de pression sanguine

5

Rétroaction/asservissement

Dans le domaine biomédical, nombreux sont les appareils dont leur fonction est assuré par une rétroaction ou asservissement, par exemple dans les pompes à insuline pour maintenir constant le niveau de sucre d'une personne diabétique. Dans ce chapitre, quelques exemples seront considérés pour mettre en évidence certaines applications de régulation dans le domaine biomédical. Afin de permettre d'appréhender le contenu de ce chapitre, nous présenterons dans ce qui suit quelques notions sur les systèmes de régulation.

Mots clés : Rétroaction, Asservissement, Applications en génie biomédical.

La rétroaction (en anglais feedback) est l'action en retour d'un effet sur sa propre origine : la séquence de causes et d'effets forme donc une boucle dite boucle de rétroaction. Les rétroactions sont très importantes dans de nombreux domaines, aussi bien pour les systèmes physiques, chimiques et biologiques que dans de nombreuses technologies.

5.1 Objectif

La régulation doit garantir le fonctionnement du procédé selon un objectif détaillé. Cet objectif, traduit en une consigne, est assuré en maîtrisant une ou plusieurs grandeurs mesurées quelles que soient les perturbations subies par le procédé.

5.2 Boucle de régulation

5.2.1 Étapes nécessaires

Pour réaliser une boucle, ou une chaîne, de régulation, trois étapes sont nécessaires (figure 5.1) :

- l'observation de la grandeur à maîtriser, faite par le capteur-transmetteur ;
- la réflexion sur l'action à entreprendre, qui est fonction de l'écart en rapport avec l'objectif fixé, effectuée par le régulateur ;
- l'action sur une grandeur incidente, à l'aide d'un actionneur, vanne ou moteur.

5.2.2 Terminologie employée

- Grandeur réglée : grandeur à maîtriser.
- Grandeur incidente : grandeur ayant une influence sur la grandeur réglée.
- Grandeur réglante : grandeur incidente commandée par le régulateur.
- Grandeur perturbatrice : grandeur incidente non contrôlée.

5.2.3 Régulation en chaîne ouverte

L'observation n'est pas celle de la grandeur à maîtriser mais celle d'une grandeur incidente. La réflexion est l'étape où la commande prend en compte une relation préétablie entre la grandeur observée et la grandeur réglante. L'action modifie alors la grandeur à maîtriser.

Avantages

- Pas de problème de stabilité.
- Simple et rapide à mettre en place.
- Coût d'étude faible.

Inconvénients

- Impossibilité de réguler un procédé intégrateur.
- L'objectif n'est pas toujours atteint car l'effet des perturbations n'est pas pris en compte.
- On ne maîtrise ni le temps de réponse ni la précision

5.2.4 Régulation en boucle fermée

L'observation se porte sur la grandeur à maîtriser. L'étape de réflexion détermine l'écart entre la consigne et la grandeur à maîtriser. En fonction de cet écart et des règles d'évolution fixées, on en déduit l'action à entreprendre. L'action modifie la grandeur réglante et finalement la grandeur à maîtriser.

Avantages

- L'effet des perturbations est pris en compte.
- Le temps de réponse défini est atteint.
- La précision définie est atteinte.
- Un procédé intégrateur régulé devient autoréglant.
- La linéarité du procédé est améliorée.

Inconvénients

- La stabilité doit être étudiée.
- Étude et mise au point peuvent être complexes.
- Coût d'étude important.

Nota : Plus performante, la régulation en boucle fermée est la plus employée industriellement car la rétroaction continue fournie par le capteur permet au contrôleur de mettre à jour ses actions. Cependant, la configuration en boucle ouverte peut également être trouvée dans certains systèmes de contrôle simples et bon marché. Dans une configuration en boucle ouverte, aucun retour n'est fourni (notez que le capteur disparaît) et le contrôleur est câblé pour produire une réponse fixe à la référence donnée. De toute évidence, ce type de systèmes de contrôle ne peut pas gérer les perturbations et ne convient que pour des systèmes simples.

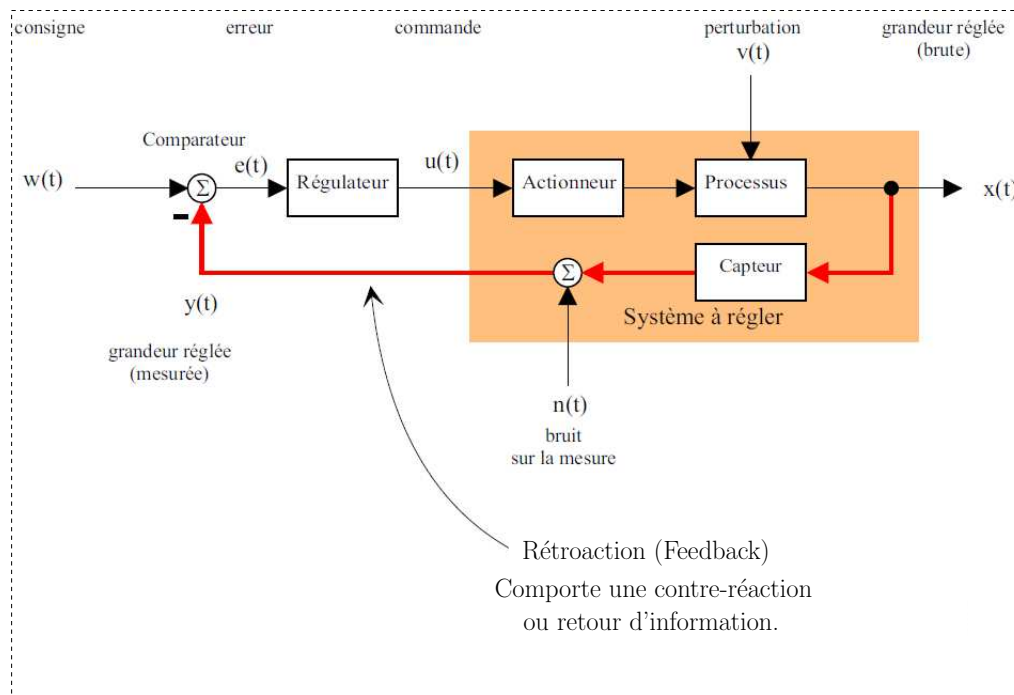


FIGURE 5.1: Schéma de principe d'un système en boucle fermée

5.2.5 Régulation de maintien, ou « régulation »

La mesure doit être maintenue à une valeur constante égale à la consigne quelles que soient les perturbations subies par le procédé. La vitesse de rejet de l'effet perturbateur pour une tolérance donnée évalue sa performance.

5.2.6 Régulation de poursuite, ou « asservissement »

La mesure doit suivre toute évolution de la consigne. La rapidité d'obtention de la consigne et la valeur du dépassement de celle-ci qualifient sa performance. Un asservissement agit sur une ou plusieurs caractéristiques de la grandeur asservie telles que :

- la position : asservissement de position ;
- la vitesse : asservissement de vitesse ;
- la concentration : asservissement de concentration ;
- l'accélération : asservissement d'accélération.

5.3 Qualités d'une régulation

1. La première qualité à assurer d'une régulation est **la stabilité** puisque toute instabilité conduit à la perte de contrôle du procédé. **L'amortissement** quantifie le degré de stabilité dans l'espace temporel.
2. **La précision, statique ou dynamique**, est souvent la deuxième qualité attendue d'une régulation.
3. **La rapidité** est une qualité opposée à la précision dynamique et liée à l'amortissement.

Exemple 1 :

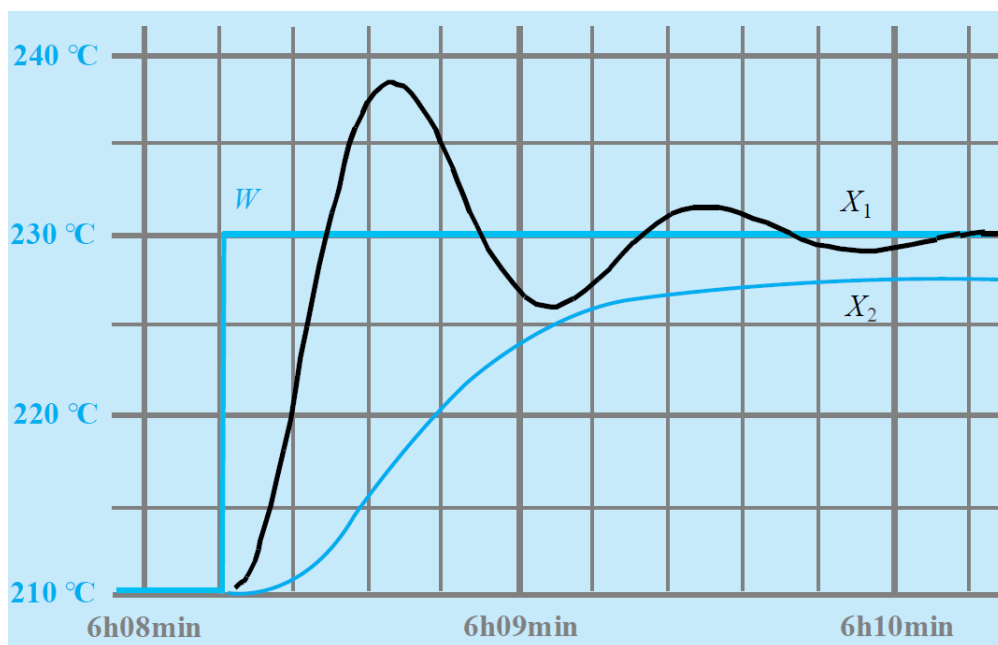


FIGURE 5.2: Analyse des qualités d'une régulation de température.

Pour chaque essai X_1 et X_2 , on passe d'un régime stable à un autre régime stable : les deux régulations de poursuite sont stables. La rapidité de la réponse de X_1 et X_2 est définie par la vitesse à laquelle une valeur stable en sortie est atteinte. C'est le temps de réponse. Concernant la précision, la mesure X_1 est plus précise car la mesure X_2 n'atteint pas la consigne.

5.4 Régulateur PID

Un régulateur, également connu sous le nom de compensateur, est constitué d'un comparateur pour observer l'écart entre la mesure et la consigne, et d'un correcteur dont l'algorithme permet d'obtenir une loi d'évolution de la mesure du procédé conforme au cahier des charges. Le correcteur a une action PID (Proportionnelle, Intégrale et Dérivée) et, associé à un comparateur, forme un régulateur PID (figure 5.3).

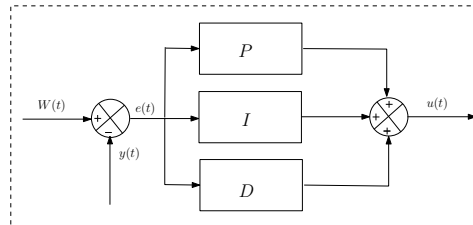


FIGURE 5.3: Schéma fonctionnel régulateur PID

5.5 Applications en biomédical

Des progrès considérables ont été accomplis dans le traitement de problèmes complexes tels que le contrôle des organes artificiels, l'ingénierie de réadaptation, le matériel médical, la robotique médicale et d'autres systèmes médicaux grâce à l'application de techniques d'ingénierie de contrôle biomédical et de technologies de l'information de pointe. Les techniques de réadaptation aident les personnes handicapées à améliorer la qualité de la vie, telles que les appareils électriques fonctionnels, les prothèses motorisées et les bras ou les jambes multifonction. De plus, pour garantir l'équilibre du corps humain, beaucoup de variables physiologiques doivent être contrôlées et régulées. C'est par exemple le cas de la pression artérielle, de l'acidité du sang, du taux sanguin de sucre, de la fréquence cardiaque, de la température corporelle, du rythme respiratoire, etc. On présente ci-après quelques exemples de systèmes de régulation automatique dans le domaine biomédical. Ceux-ci sont également appelés systèmes asservis. Indépendamment de leur complexité, nous pouvons identifier les éléments suivants dans tout système de contrôle :

5.5.1 Application 1 : Boucle de régulation de Glucose-Insuline

Un système de contrôle en boucle fermée pour maintenir le niveau glycémique (diabète type 1) peut être représenté à par sa forme simplifiée, par le schéma bloc montré par la figure 5.4. Pour un diabétique Type 1, l'organe responsable de la régulation de cette concentration du Glucose (le pancréas) se trouve pratiquement en état d'échec d'où l'importance de cette boucle qui consisté essentiellement à la proposition d'un pancréas artificiel dont la fonction pancréatique est remplacée par un régulateur. Le système glucose-insuline représente le système sous contrôle, avec injection d'insuline et niveau glycémique en entrée et en sortie, respectivement. Un capteur de glucose est nécessaire pour convertir la concentration en glucose en tension, tandis qu'un système d'administration par pompe à insuline permet de maintenir le niveau de glucose contrôlé par l'injection d'insuline. Un circuit électronique basé sur des amplificateurs opérationnels est utilisé comme contrôleur (par exemple contrôleur PID) afin de minimiser l'écart de glucose entre le niveau souhaité et le niveau mesuré. Ce système de contrôle automatique empêche le patient de subir des épisodes dangereux hypoglycémiques et hyperglycémiques.

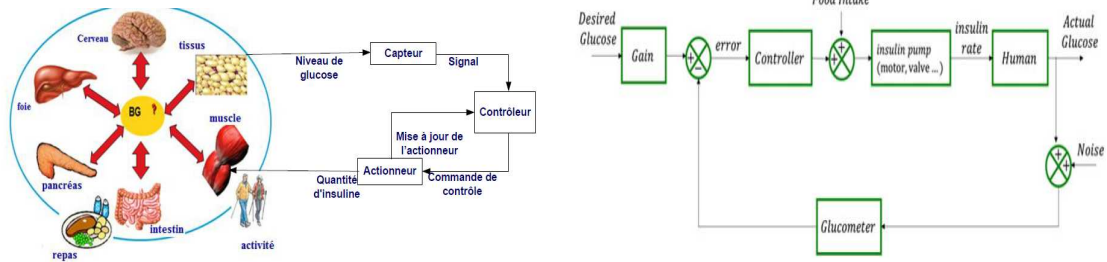


FIGURE 5.4: Contrôle en boucle fermée de la glycémie.

5.5.2 Application 2 : Boucle de régulation d'un système de perfusion 'Pousse-seringues'

La perfusion est une technique médicale permettant de délivrer des liquides à une personne directement dans son sang par l'intermédiaire d'une veine, généralement l'une de celles du bras. Un cathéter, sorte de tuyau souple, est introduit dans une veine périphérique, ou parfois une grosse veine pour permettre la diffusion de plus gros débit. La perfusion intraveineuse permet de :

- Délivrer des fluides et des électrolytes, afin de restaurer les pertes de liquide.
- Administrer des médicaments/drogues (effet thérapeutique).
- Assurer une nutrition parentérale.
- Faire des transfusions (injection de l'un des constituants du sang).
- Maintenir un équilibre hémodynamique.
- L'administration intraveineuse permet d'avoir une distribution immédiate et de maintenir un niveau constant de médication.

Les composants du pousse-seringues électrique sont : (voir figure 5.5)

- Unité Centrale (UC) (Gérer le fonctionnement des PSE) ;
- Le moteur mécanique (Alimente le mouvement de la seringue) ;
- Le capteur de force (Mesure de la force pour pousser la seringue) ;
- Le capteur de position (Pour mesurer le déplacement linéaire de la seringue) ;
- La batterie (Pour alimenter le moteur (Rechargeable)) ;
- La carte d'alimentation (Pour alimenter le moteur mécanique) ;
- Le capot (Contient les boutons de réglage (débit et la vitesse)).



FIGURE 5.5: Pousse-seringues électrique.

Le contrôle et l'automatisation du système de perfusion de médicament pour l'administration d'une anesthésie par voie intraveineuse peut être représenté par le schéma bloc montré par la figure 5.6.

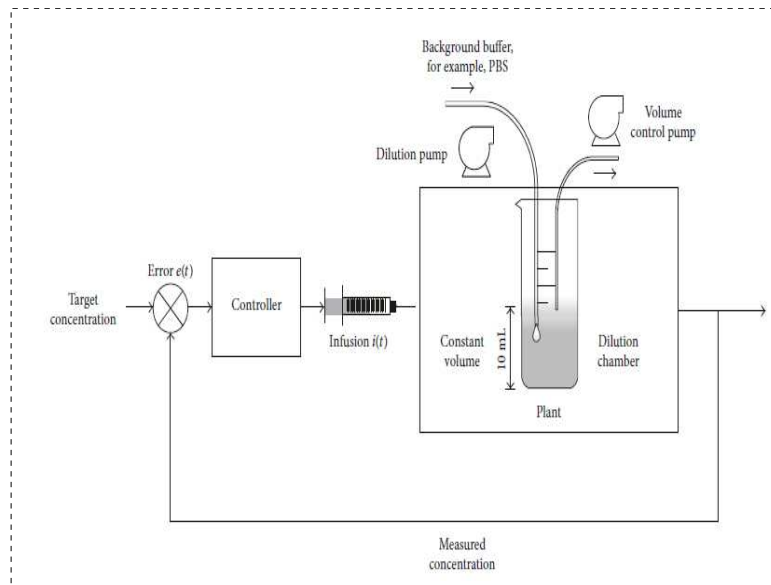


FIGURE 5.6: Schéma fonctionnel d'un système de perfusion de médicament à rétroaction contrôlée [4].

5.5.3 Application 3 : Robotique médicale

En ce qui concerne l'ingénierie de la réadaptation, la robotique médicale influe considérablement sur ce domaine à l'heure actuelle. Les technologies robotiques améliorent les processus médicaux ou chirurgicaux en améliorant la précision, la stabilité et la dextérité, et les robots sont aujourd'hui capables d'améliorer la rééducation des patients handicapés (voir figure 5.7).

► Pourquoi les robots manipulateurs ?

- ✓ la rapidité ; la précision ; la répétabilité ;
- ✓ le suivi de trajectoire automatique ;
- ✓ la capacité à satisfaire des contraintes de position, vitesse et effort ;
- ✓ l'enregistrement automatique des gestes effectués.

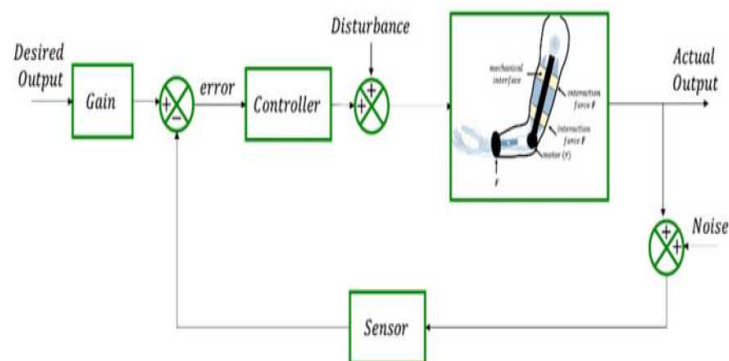


FIGURE 5.7: Contrôle en boucle fermée du membre supérieur en rééducation

Annexes

Annexe A : Table de transformées de Laplace

$$f(t) \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$1 \quad \frac{1}{s} \quad (1)$$

$$e^{at}f(t) \quad F(s-a) \quad (2)$$

$$\mathcal{U}(t-a) \quad \frac{e^{-as}}{s} \quad (3)$$

$$f(t-a)\mathcal{U}(t-a) \quad e^{-as}F(s) \quad (4)$$

$$\delta(t) \quad 1 \quad (5)$$

$$\delta(t-t_0) \quad e^{-st_0} \quad (6)$$

$$t^n f(t) \quad (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (7)$$

$$f'(t) \quad sF(s) - f(0) \quad (8)$$

$$f^n(t) \quad s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (9)$$

$$\int_0^t f(x)g(t-x)dx \quad F(s)G(s) \quad (10)$$

$$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (11)$$

$$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R}) \quad \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \quad (12)$$

$$\sin kt \quad \frac{k}{s^2 + k^2} \quad (13)$$

$$\cos kt \quad \frac{s}{s^2 + k^2} \quad (14)$$

$$e^{at} \quad \frac{1}{s-a} \quad (15)$$

Annexe B : TD

- ✓ TD 1 : Algèbres matricielles -Rappels-
- ✓ TD 2 : Estimation par Moindres Carrés (MC)
- ✓ TD 3 : Analyse temporelle des systèmes linéaires (1er & 2ème ordre)
- ✓ TD 4 : Filtrage linéaire

Annexe C : TP

- ✓ TP1 : Régression et interpolation
- ✓ TP2 : Transformée de Fourier (TF)
- ✓ TP3 : Echantillonnage et théorème de Shannon
- ✓ TP4 : Régulation de débit

Références bibliographiques

- [1] O. BACHELIER, cours Modélisation, analyse et commande : notions de base et un peu plus, Éditions Lily et Aksel, Ed. Avril 2019.
- [2] J. Fernández de Cañete, et al, Automatic Control Systems in Biomedical Engineering, Springer International Publishing (2018).
- [3] M. Etique, cours : Régulation automatique (REG), HEIG-VD, (2014).
- [4] Y. Granjon, 'Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état : Cours et exercices corrigés', Dunod (2010).
- [5] P. Prouvost, 'Instrumentation et régulation en 30 fiches BTS', Dunod (2010).
- [6] S. Moreau, T. Poinot, cours : Traitement du signal, Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers 2^{ème} année, (2006).