Cours d'Automatique

Applications aux Systèmes Biomédicaux [1]

Faculté des Sciences, Département de Physique
Université de Sétif1

Seif Eddine Chouaba[2]

31 janvier 2019

1. Spécialité : Licence Physique Appliquée
2. E-mail:seif.chouaba@univ-setif.dz

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Résumé

Les progrès des technologies de l'information et de la communication, des capteurs, actionneurs, etc. ont permis l'émergence de différents dispositifs biomédicaux. Ces nouveaux dispositifs, souvent automatisés, contribuent considérablement à l'amélioration du diagnostic et du traitement de certaines maladies. L'automatisme est devenu une technologie incontournable aujourd'hui de par son utilisation dans tous les domaines de fabrication. Il est donc important d'en connaître les bases et d'en suivre l'évolution. Ce cours d'initiation à l'automatique dans un contexte général des applications biomédicales s'adresse principalement aux étudiants de la troisième année Physique Appliquée (département de Physique– faculté des sciences – unviversité de Sétif1). Ce cours vise à donner aux étudiants quelques notions de base sur l'automatique, les systèmes asservis linéaires, leurs modélisation (systèmes linéaires du 1er et 2ème ordre), leurs analyse (étude de leurs réponses), la notion de système en boucle ouverte, en boucle fermée et quelques techniques de commande rétroaction/asservissement (application sur des cas en biomédicale, physique, biologique,...).
Il y a peu de chances qu'un physicien médical partant travailler soit amené dans son métier à concevoir des lois de commande ou des systèmes automatisés. C'est plutôt la tâche d'un ingénieur en automatique. Toutefois, il est souhaitable que ce physicien médical connaisse un minimum de vocabulaire et les notions de base de l'Automatique et l'application de l'automatique dans le domaine médical afin de collaborer et comprendre les systèmes automatisés. C'est un des buts que ce fixe le cours.

1

Introduction à l'Automatique

1.1 Qu'est ce que c'est l'Automatique ?

L'Automatique, en anglais '***Automatic Control***', c'est la discipline scientifique qui étudie mathématiquement et techniquement le fonctionnement d'un système. Pour ce faire, elle fait appel à plusieurs savoirs, théoriques et technologiques, tels que : les mathématiques appliquées, le génie électrique, la théorie du signal et l'informatique, ...
Généralement, on peut distinguer trois étapes importantes dans l'étude d'un système : la modélisation, l'identification et la commande.

1. ***La modélisation*** est l'étape qui consiste à établir un modèle mathématique ou fonctionnel qui reproduit, le plus faible (fidèle) possible, le comportement du système étudié.
2. ***L'identification*** consiste alors à identifier, à partir des mesures prélevées sur le système étudié, les valeurs des paramètres du modèle établi.
3. En ce qui concerne la phase ***de commande***, elle consiste à choisir/concevoir/réaliser une loi de commande qui permet d'obtenir ou améliorer les performances (rapidité, précision, stabilité...) du système étudié.

Autrement, les professionnels en automatique se nomment automaticiens. Les objets que l'automatique permet de concevoir pour procéder à l'automatisation d'un système (automates, régulateurs, etc.) s'appellent les automatismes ou les organes de contrôle-commande d'un système piloté.

1.2 Qu'est ce que c'est un système ?

La notion de système est une notion générale qui s'applique à un grand nombre de domaines comme le monde médical (système de santé), de l'éducation (système éducatif), des affaires (système commertial, etc.)
En effet, il est difficile de donner une définition générale pour tous les systèmes. Dans ce qui suit, nous passons en revue quelques définitions selon la nature des système :

1.2.1 Les systèmes naturels :

Ce sont les systèmes comportant des éléments actifs, présentant un ordre lié à la nature, qui interagissent entre eux comme par exemple le système solaire ou l'écosystème terrestre.

1.2.2 Les systèmes artificiels :

Contrairement aux systèmes naturels, les systèmes artificiels sont des produits de l'activité humaine. Ils sont créés et conçus essentiellement par l'homme dans le but de répondre à ces besoins.

Il existe plusieurs sous-classe liées aux systèmes artificiels tels que les systèmes économiques, les systèmes sociaux, les systèmes techniques, etc.
Dans le cadre de ce cours, nous nous intéressons uniquement aux systèmes artificiels.

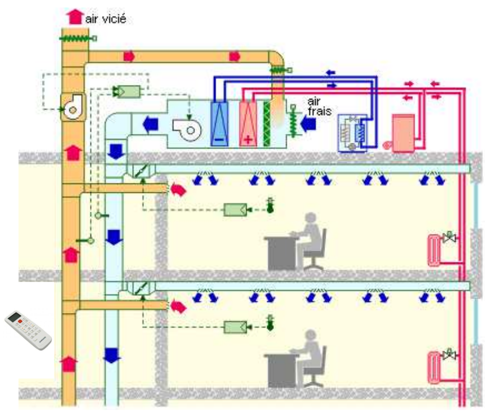
☐ **Les systèmes techniques :**

Ce sont les systèmes artificiels, fondés sur des connaissances scientificques et technologiques, qui gèrent l'ensemble de procédés méthodique et structurés dans le but d'obtenir généralement des résultats matriel qui satisfait un besoin humain préalablement fixé.
On peut également définir les systèmes techniques comme étant un ensemble d'éléments fonctionnels en interaction organisés en fonction d'une finalité ou d'un but.
Parmi les systèmes techniques les plus répondus dans notre vie quotidienne, nous nous intéressons aux systèmes automatisés.

1.3 Qu'est ce que c'est un système automatisé ?

Notre quotidient est peuplé de systèmes automatisés simples ou complexes qui nous rendent la vie plus ***facile*** (confort, sécurité,...). De nos jours tout presque tout est automatisé. A titre d'exemple, on peut citer le cas des distributeurs automatiques de billets de banque, les distributeurs automatiques de boissons, les systèmes automatiques de climatisation et de chauffage, les ascenseurs, les pilotes automatiques, le télépéage, les vols cosmiques, centre automatique de lavage de véhicule, robotique[1] médicale (bras robotisé),...

(a) Schéma d'ascenseur automatique



(b) Schéma d'une climatisation centrale automatique

FIGURE 1.1: Exemples de systèmes automatisés

Un système automatisé ou automatique est un système technique où l'intervention de l'être humain ***se limite*** à la programmation des tâches et des opérations exécutées par le système de façon ***répétitive*** et avec les mêmes ***performances*** (confort, sécurité, précision et rigueur) à chaque fois le système est lancé. Les systèmes automatisés vont probablement se développer de

1. Ensemble des études et des techniques de conception et de mise en œuvre des machines automatiques

plus en plus et prendre une place plus importante dans la manière de travailler, tant dans les ateliers de production que dans la robotique médicale. Pour la grande industrie l'automatisation est la formule de l'avenir.

1.4 Pourquoi des systèmes automatisés ?

Un système automatisé simplifie, sécurise et rend moins pénibles les tâches répétitives et opérationnelles. Par comparaison aux systèmes non automatisés, les systèmes automatisés permettent d'apporter quelques améliorations au fonctionnement des systèmes. Nous citons à titre d'exemple quelques-unes :

- Amélioration des conditions de travail en supprimant les tâches les plus pénibles et ingrates. Par exemple : le pilote automatique utilisé sur les avions de ligne qui permet de soulager le pilote humaine, surtout s'il sagit d'un vol long courrier, tout en maintenant l'avion sur sa trajectoire.
- Amélioration de l'accessibilité à des milieux de travail hostiles et dangereux (chimique, nuclaire) ou des sites inaccessible à l'homme (mer, espace,...). L'automatisme est donc aussi synonyme de sécurité. Exemple : le robot Curiosity est un robot entièrement automatisé envoyé par la NASA pour explorer la planète rouge où l'être humain ne peut pas y accéder.
- Amélioration de la productivité des systèmes de production, autrement dit, ça permet d'augmenter la qualité de produits élaborés pendant une durée donnée. Cet accroissement de productivité permet d'avoir une meilleure rentabilité (réduire son prix de revient) et compétivité pour les entreprises de production. Parfois, ces automatismes sont d'une telle rapidité et d'une telle précision, qu'ils réalisent des actions impossibles pour un être humain.
- ...etc.

1.5 Quels sont les constituants d'un système automatisé ?

Dans cette section, nous allons passer en revue les constituants d'un système automatisé (voir figure 1.2) sans prendre en considération les ineractions entres les différents composants.

➜ **La partie commande (PC)** reçoit les consignes de l'opérateur et les comptes rendus de la partie opérative. Les commandes peuvent être envoyées par une **Interface Homme Machine** (IHM) informatisée, un pupitre de commande ou une boite à bouton.

➜ **La partie opérative (PO)**, c'est la partie d'un système automatisé qui effectue le travail. Autrement dit, c'est la machine. C'est la partie qui reçoit les ordres de la partie commande et qui les exécute. Elle comporte les capteurs et les actionneurs.

  - ***L'actionneur*** est un organe qui reçoit de l'énergie (électrique, vapeur, eau, ...) et la transforme en une autre énergie capable de produire un mouvement, de la chaleur, de la lumière, un bruit. Par exemple : vérin pneumatique ou hydraulique entrainant un portail, un moteur, une vanne, ...
  - ***Le capteur*** est un élément de la partie opérative qui va réagir à un phénomène physique et envoyer le signal vers la partie commande. Parmi les capteurs on peut citer : pH, température, force, optique ; contact ; mouvement, ect.

➜ **Les comptes rendus** de la partie opérative sont les signaux envoyés par les capteurs installés sur les machines.

➜ Entre la partie commande et la partie opérative, se trouve le système qui est en réalité un automate dans lequel se trouve un programme.

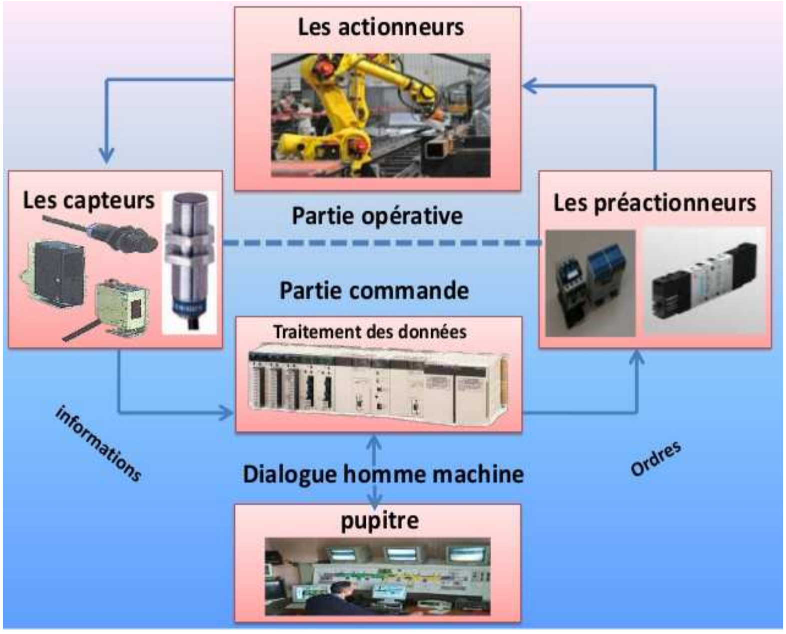


FIGURE 1.2: Constitution générale d'un système automatisé

1.6 Boucle de régulation

La régulation automatique des systèmes est la technique offrant les méthodes et outils nécessaire à la prise en contrôle d'une ou plusieurs grandeurs physique, sans aucune intervention manuelle, et qui assure la rapidité, sécurité, fiabilité, automatisation et la diminution des coûts. On peut conduire un système de manière automatisée pour :

— maintenir une grandeur de sortie constante (régulation). La mesure doit être maintenue à une valeur constante égale à la consigne quelles que soient les perturbations subies par le procédé. La vitesse de rejet de l'effet perturbateur pour une tolérance donnée évalue sa performance.

— faire suivre à certaines sorties une séquence (automatisme séquentiel) ou une loi donnée (asservissement). La mesure doit suivre toute évolution de la consigne. La rapidité d'obtention de la consigne et la valeur du dépassement de celle-ci qualifient sa performance.

— si on ajoute l'optimisation d'un critère (de coût par exemple) on parle alors de contrôle.

Il existe deux modes de fonctionnement de la régulation, soit en boucle de régulation ouverte, soit en boucle de régulation fermée. En mode de contrôle en boucle ouverte, l'objectif est de maintenir la sortie du système aussi proche que possible de la valeur souhaitée (référence) par un ajustement approprié de l'entrée via l'action combinée du contrôleur et de l'actionneur. Cependant, en raison des inconnues dans le modèle du système et des effets des perturbations externes, le contrôle en boucle ouverte n'est pas précis.

1.6.1 Boucle de régulation ouverte

C'est un système qui ne comporte pas de contre-réaction (feedback) entre la sortie $y(t)$ et l'entrée $r(t)$. Classiquement, elle est composée du processus physique, d'un capteur pour mesurer la sortie et d'un actionneur pour agir sur la grandeur d'entrée du système (voir figure 1.3).

1.6.2 Boucle de régulation fermée

Un système est dit en boucle fermé (***rétroaction*** ou en anglais, ***feedback***), lorsque la sortie de procédé est prise en compte pour calculer le signal de commande afin de mieux maîtriser le

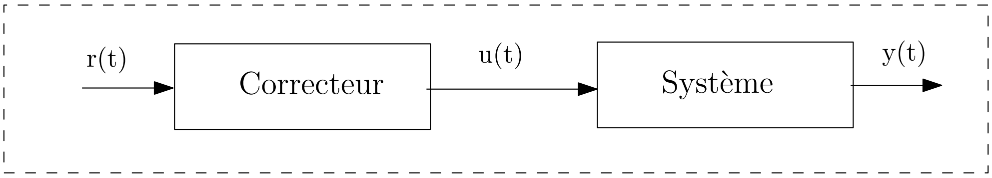


FIGURE 1.3: Schéma de principe d'un système en boucle ouverte

fonctionnement de ce dernier (la figure 1.4 présente un exemple général de boucle de régulation fermée).

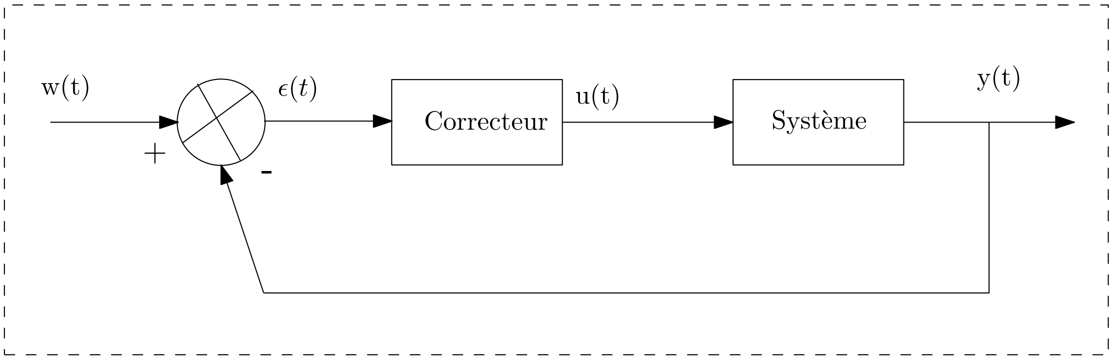


FIGURE 1.4: Schéma de principe d'un système en boucle fermée

1.7 Quelques applications en génie biomédical

Des progrès considérables ont été accomplis dans le traitement de problèmes complexes tels que le contrôle des organes artificiels, l'ingénierie de réadaptation, le matériel médical, la robotique médicale et d'autres systèmes médicaux grâce à l'application de techniques d'ingénierie de contrôle biomédical et de technologies de l'information de pointe. Les techniques de réadaptation aident les personnes handicapées à améliorer la qualité de la vie, telles que les appareils électriques fonctionnels, les prothèses motorisées et les bras ou les jambes multifonction. De plus, pour garantir l'équilibre du corps humain, beaucoup de variables physiologiques doivent être contrôlées et régulées. C'est par exemple le cas de la pression artérielle, de l'acidité du sang, du taux sanguin de sucre, de la fréquence cardiaque, de la température corporelle, du rythme respiratoire, etc. La figure 1.5 montre comment ce mécanisme de régulation peut être assimilé et modélisé par un système de régulation automatique en boucle fermée.

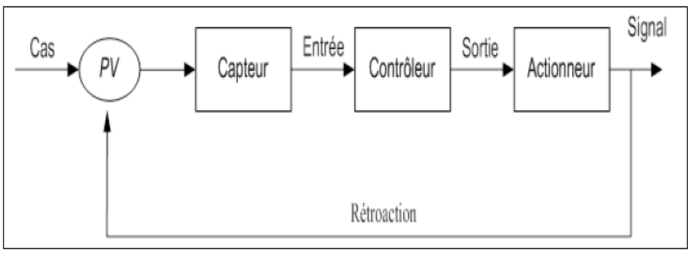


FIGURE 1.5: Modèle de régulation d'une variable physiologique

1.7.1 Boucle de régulation de Glucose-Insuline

Un système de contrôle en boucle fermée pour maintenir le niveau glycémique (diabète type 1) peut être représenté à par sa forme simplifiée, par le schéma bloc montré par la figure 1.6. Pour un diabétique Type 1, l'organe responsable de la régulation de cette concentration du Glucose (le pancréas) se trouve pratiquement en état d'échec d'où l'importance de cette boucle qui consisté essentiellement à la proposition d'un pancréas artificiel dont la fonction pancréatique est remplacée par un régulateur. Le système glucose-insuline représente le système sous contrôle, avec injection d'insuline et niveau glycémique en entrée et en sortie, respectivement. Un capteur de glucose est nécessaire pour convertir la concentration en glucose en tension, tandis qu'un système d'administration par pompe à insuline permet de maintenir le niveau de glucose contrôlé par l'injection d'insuline. Un circuit électronique basé sur des amplificateurs opérationnels est utilisé comme contrôleur afin de minimiser l'écart de glucose entre le niveau souhaité et le niveau mesuré. Ce système de contrôle automatique empêche le patient de subir des épisodes dangereux hypoglycémiques et hyperglycémiques.

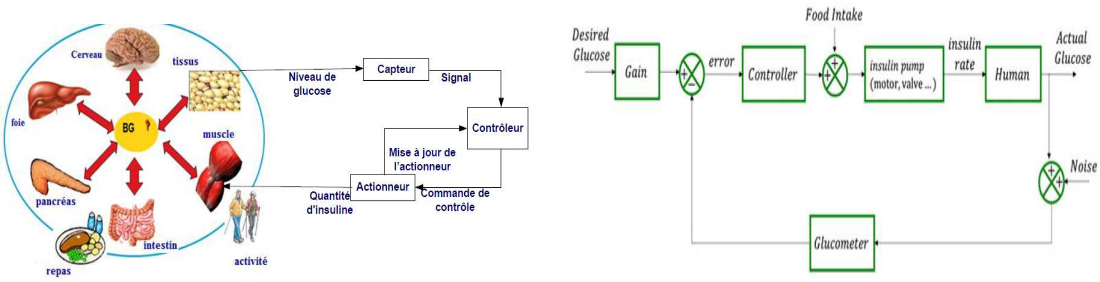


FIGURE 1.6: Contrôle en boucle fermée de la glycémie.

1.7.2 Boucle de régulation du débit d'un système d'hémodialyse

Le rôle du rein est de séparer les toxines du sang afin de pouvoir les éliminer. En cas d'insuffisance rénale, il faut donc purifier le sang par d'autres moyens, tels que l'hémodialyse ou la transplantation rénale. Dans le cas de l'hémodialyse, un traitement extracorporel du sang est réalisé à l'aide d'un rein artificiel appelé dialyseur. Dans le dialyseur se trouve dans deux compartiments séparés par une membrane. L'un d'entre eux est parcouru par le sang, et l'autre est parcouru à contre courant par le dialysat (liquide de dialyse).
Le schéma ci-contre (figure 1.7) montre le circuit des fluides pendant le traitement d'hémodialyse. Dans le circuit « sang » extracorporel, le sang est acheminé vers le dyaliseur grâce à une pompe péristaltique. Dans le circuit « dialysat », le dialysat est préparé et envoyé vers le dyaliseur grâce à une pompe à engrenage. Le dialysat ne contenant pas de toxines, il se crée un gradient de concentration au niveau de la membrane. Ce processus entraîne le transfert par diffusion (osmose inverse) des toxines présentes dans le sang qui traversent ainsi la membrane pour passer dans le dialysat. Le sang ainsi purifié et ensuite réinjecté dans le corps du patient et le mélange dialysat chargé en toxines est évacué.
L'hémodialyse nécessite une circulation extra corporel à l'aide d'une pompe à sang qui demande une régulation efficace afin d'annuler l'erreur statique, diminuer le temps de passage et réduire le temps de réponse dans le but d'avoir une réponse adéquat.

1.7.3 Boucle de régulation d'un système de perfusion 'Pousse-seringues'

La perfusion est une technique médicale permettant de délivrer des liquides à une personne directement dans son sang par l'intermédiaire d'une veine, généralement l'une de celles du bras. Un cathéter, sorte de tuyau souple, est introduit dans une veine périphérique, ou parfois une

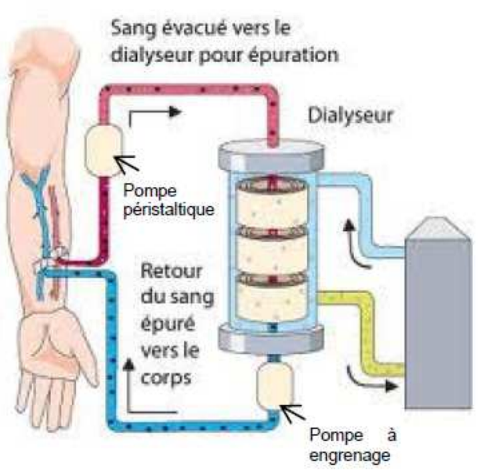


FIGURE 1.7: Schéma hydraulique d'un système d'hémodialyse.

grosse veine pour permettre la diffusion de plus gros débit. La perfusion intraveineuse permet de [3] :

➜ Délivrer des fluides et des électrolytes, afin de restaurer les pertes de liquide.
➜ Administrer des médicaments/drogues (effet thérapeutique).
➜ Assurer une nutrition parentérale.
➜ Faire des transfusions (injection de l'un des constituants du sang).
➜ Maintenir un équilibre hémodynamique.
➜ L'administration intraveineuse permet d'avoir une distribution immédiate et de maintenir un niveau constant de médication.

Les composants du pousse-seringues électrique sont : (voir figure 1.8)

— Unité Centrale (UC) (Gérer le fonctionnement des PSE) ;
— Le moteur mécanique (Alimente le mouvement de la seringue) ;
— Le capteur de force (Mesure de la force pour pousser la seringue) ;
— Le capteur de position (Pour mesurer le déplacement linéaire de la seringue) ;
— La batterie (Pour alimenter le moteur (Rechargeable)) ;
— La carte d'alimentation (Pour alimenter le moteur mécanique) ;
— Le capot (Contient les boutons de réglage (débit et la vitesse)).

FIGURE 1.8: Pousse-seringues électrique.

Le contôle et l'automatisation du système de perfusion de médicament pour l'administration d'une anesthésie par voie intraveineuse peut être représenté par le schéma bloc montré par la figure 1.9.

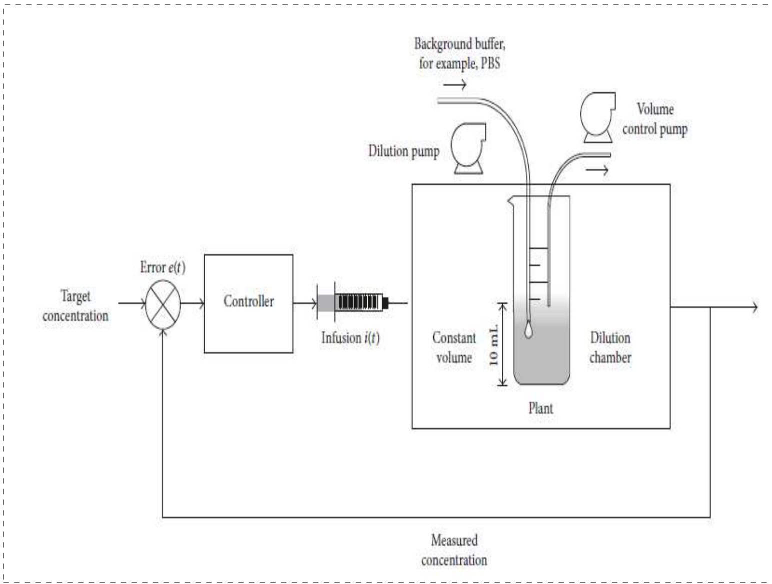


FIGURE 1.9: Schéma fonctionnel d'un système de perfusion de médicament à rétroaction contrôlée [4].

1.7.4 Robotique médicale

En ce qui concerne l'ingénierie de la réadaptation, la robotique médicale influe considérablement sur ce domaine à l'heure actuelle. Les technologies robotiques améliorent les processus médicaux ou chirurgicaux en améliorant la précision, la stabilité et la dextérité, et les robots sont aujourd'hui capables d'améliorer la rééducation des patients handicapés (voir figure 1.10).

➠ ***Pourquoi les robots manipulateurs ?***[5]

✔ la rapidité ; la précision ; la répétabilité ;

✔ le suivi de trajectoire automatique ;

✔ la capacité à satisfaire des contraintes de position, vitesse et effort ;

✔ la fusion en temps réel d'informations extéroceptives multimodales ;

✔ l'enregistrement automatique des gestes effectués.

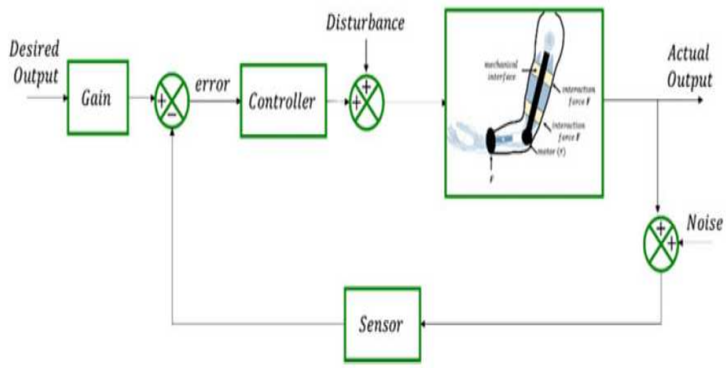


FIGURE 1.10: Contrôle en boucle fermée du membre supérieur en rééducation

➠ ***Quelques applications de la robotique médicale***

➜ la rééducation des patients handicapés ;

➜ la chirurgie de la tête et du cou (neurochirurgie, chirurgie maxillo-faciale, chirurgie dentaire) ;

➜ la chirurgie orthopédique ;

➜ la chirurgie mini-invasive du thorax et de l'abdomen (cardiaque, cardiovasculaire, générale, urologique, gynécologique, etc.) ;

➜ L'assistance à l'examen échographique ;

➜ la radiothérapie et la radiologie de diagnostic.

➠ ***Sécurité pour le patient et les soignants***

— Zéro «accident» toléré.

— Il faut au minimum :

  — un médecin dans la boucle ;
  — des protocoles précis d'utilisation bien documentés avec une formation adéquate du personnel médical ;
  — des interfaces homme-machine intuitives, ergonomiques et sans ambiguïtés ;
  — des procédures d'initialisation automatique ;
  — des procédures de débrayage et de reprise manuelle de l'intervention ;
  — des architectures robotiques intrinsèquement sécurisées ;
  — des fusibles mécaniques si les efforts peuvent être importants ;
  — des fusibles électriques ;
  — une redondance de capteurs ;
  — une limitation de l'espace de travail, de la vitesse et des efforts ;
  — des procédures de test logiciel du bon fonctionnement de tous les composants ;
  — des procédures de validation pas à pas de la bonne exécution de toutes les étapes du traitement médical ;
  — une modification de la procédure médicale qui n'ait pas d'impact sur la santé du patient (durée de l'anesthésie par exemple).

FIGURE 1.11: Positionnement d'instruments en neurochirurgie

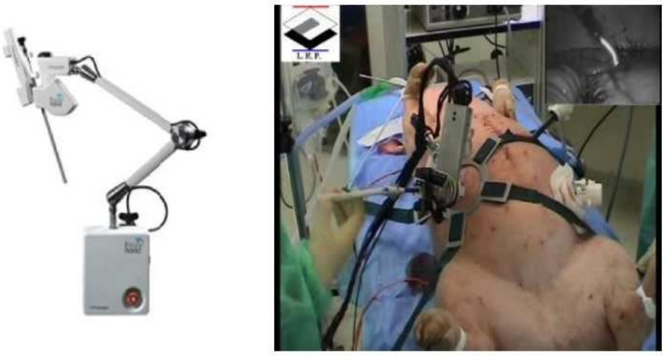


FIGURE 1.12: Les porte endoscope

FIGURE 1.13: Robots pour améliorer l'examen échographique

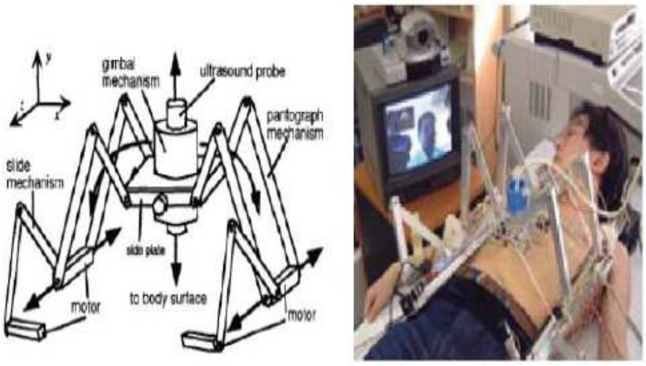


FIGURE 1.14: Système porté par le patient pour la télé-échographie

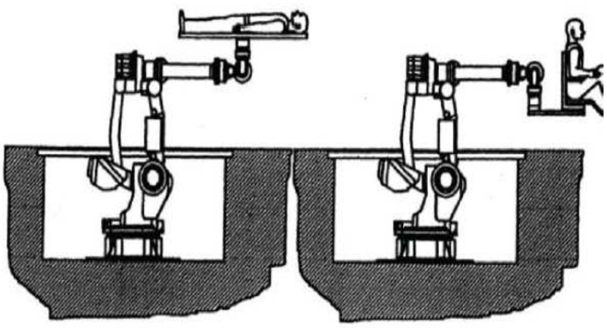


FIGURE 1.15: Positionnement de patient en protonthérapie

2

Modélisation mathématique des systèmes linéaires

2.1 Introduction

Dans le domaine de l'automatique l'élaboration des modèles ayant des structures particulières est une étape nécessaire à l'ingénieur pour ses tâches d'analyse, de prévision et de synthèse de systèmes de commande. La modélisation de système est une tâche plutôt difficile, car l'expérience, la pratique et l'intuition sont nécessaires pour être un bon modélisateur de système. Les bases de la construction de modèles mathématiques sont les lois physiques fondamentales, telles que les lois de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. Les modèles mathématiques seront obtenus sous la forme d'équations différentielles décrivant la dynamique du système.

2.2 Notions de bases

2.2.1 Procédé

Les différents éléments d'interaction entre un système (procédé) dynamique et son environnement sont généralement représentés schématiquement par des schémas fonctionnels dans la figure qui suit (2.1). Les entrées d'un processus représentent des causes qui agissent sur lui de l'extérieur, par exemple des perturbations, ou encore des excitations standard (impulsion, échelon, sinusoïde) et son comportement est décrit par des équations différentielles. Les sorties regroupent les effets qui en découlent et désignent le plus souvent des signaux mesurés. Dans la pratique, un procédé peut correspondre à un dispositif physiologique, mécanique, électronique, chimique... Les procédés peuvent être de nature très diverse, et donc, leurs classification est nécessaire pour une meilleure compréhension et étude.

- ✔ Invariant/Variant ;
- ✔ Statique/Dynamique ;
- ✔ Causale/anticipative ;
- ✔ Linéaire/Non linéaire ;
- ✔ Stochastique/Déterministe ;
- ✔ à temps continu/à temps discret.

Pour ce cours a donc pour but l'étude des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires déterministes linéaires à coefficients constants.

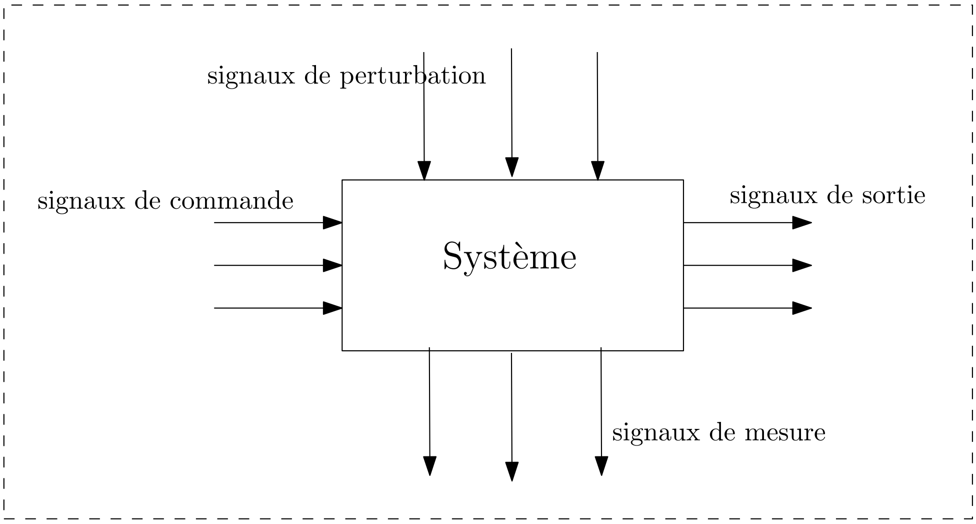


FIGURE 2.1: Un système comprenant des entrées, des sorties et des pertubations

2.2.2 Modèle

On appelle modèle d'un système la loi qui relie l'entrée à la sortie. Un modèle est obtenu soit par :

- identification (on fait correspondre un modèle de structure donnée au comportement entrées/sorties du système) ;
- une utilisation des équations de la physique régissant le comportement du système.

Un modèle doit fournir une approximation fidèle du comportement du système physique.

Exemples

➠ ***RC circuit***

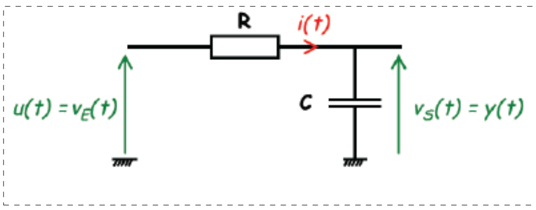


FIGURE 2.2: RC circuit

on a le courant du condensateur :

$$i = C\frac{dv_s}{dt} \tag{2.1}$$

D'après la loi d'additivité des tensions (ou loi des mailles),

$$v_E = v_s + Ri \tag{2.2}$$

Équation différentielle du circuit RC :

$$v_E = v_s + RC\frac{dv_s}{dt} \tag{2.3}$$

➠ ***Niveau liquide***

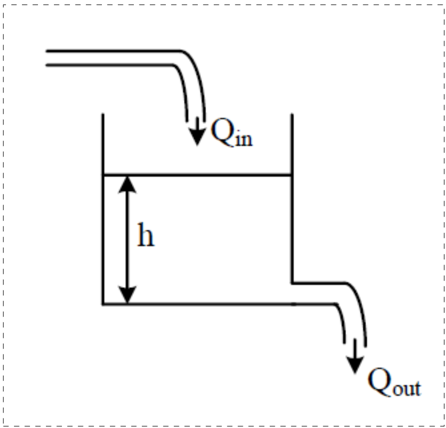


FIGURE 2.3: Niveau liquide

section transversal : A
Assumer : $Q_{out} = k.h$ (k est une constante)

$$Q_{in} - Q_{out} = A\frac{dh}{dt} \tag{2.4}$$

Équation différentielle du système de niveau de liquide :

$$Q_{in} = A\frac{dh}{dt} + k.h \tag{2.5}$$

➠ ***Système masse / ressort / amortisseur***

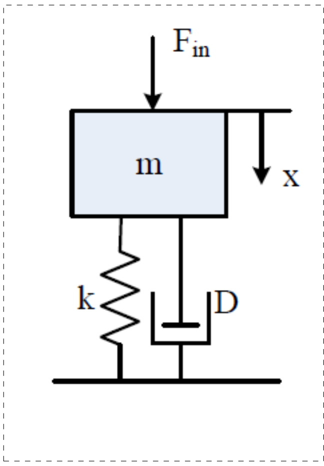


FIGURE 2.4: Système masse / ressort / amortisseur

— inertie : $F = m.a$=$m.\frac{d^2x}{dt^2}$
— ressort : $F = D.v$=$D.\frac{dx}{dt}$
— amortisseur : $F = k.x$

L'équation différentielle du système est donnée par :

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = F_{in} - D.\frac{dx}{dt} - k.x \tag{2.6}$$

➠ ***Modèle de Westheimer du mouvement oculaire saccadique humain***

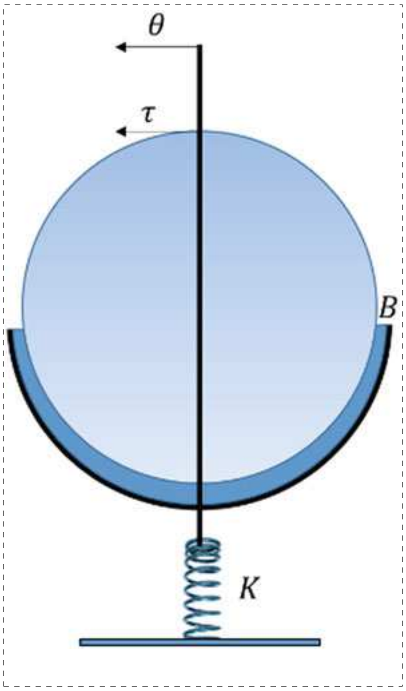


FIGURE 2.5: Modèle de Westheimer du mouvement oculaire saccadique humain.

Le modèle Westheimer pour les mouvements saccadés de l'oeil humain, donnée par :

$$J.\frac{d^2\theta}{dt^2} + B.\frac{d\theta}{dt} + k.\theta = K_\tau \tau(t) \tag{2.7}$$

où $\theta(t)$ est la sortie, c'est-à-dire la position angulaire de l'oeil, et $\tau(t)$ représente l'entrée générée par les muscles de l'oeil.

2.2.3 Estimation paramétrique

On général on dispose des mesures et éventuellement d'une excitation. On veut à partir de mesures identifier le système, c-à-d, trouver la structure de la loi mathématique et estimer ses paramètres. Souvent, on se contante d'estimer les paramètres en supposant la loi connue. De plus, le problème d'identification est très complexe et afin de l'aborder on est obligé de faire des hypothèses pour limiter le champ de l'étude. Il existe une multitude de types de méthodes d'identification, selon les modèles et les applications.

2.2.4 Système Continu

Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque la variations des grandeurs physiques qui le caractérisant sont une fonction continue du temps. On parle de système ***analogique***.

2.2.5 Systèmes linéaires

La combinaison des deux conditions mentionnées est connue sous le nom **de principe de superposition** , soit : $f(u_1 + u_2)(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Si l'excitation $u_1(t)$ produit la réponse $y_1(t)$, et si l'excitation $u_2(t)$ produit la réponse $y_1(t)$, alors la somme des excitations conduit à une réponse qui est la somme des réponses obtenues séparément $y_1(t) + y_2(t)$ (voir figure 2.6).

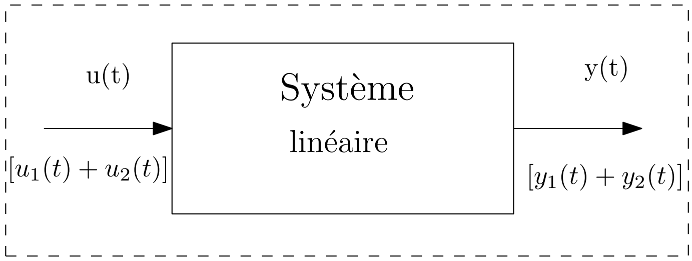


FIGURE 2.6: Linéarité

2.2.6 Systèmes non linéaires

Un système non linéaire est un système qui ne satisfait pas les conditions de linéarité en particulier le théorème de superposistoin.

Quelques exemples de non linéairité

— Saturation ;
— Relais parfait ;
— Zone morte ;
— $P = RI^2$;
— ...

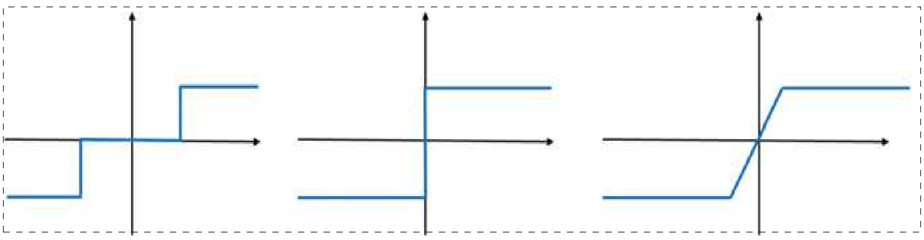


FIGURE 2.7: Quelques exemples de relations non linéaires

2.2.7 Système avec retard

Un système linéaire est dit avec retard pur si le signal de sortie est décalé par rapport à celui d'entrée d'un temps τ. Le retard est dû aux éléments physiques du système, à titre d'exemple le transfert de l'information.

2.2.8 Système dynamique

La notion de dynamique est liée à l'évolution des grandeurs étudiées au cours du temps. Autrement dit, Un système dont les grandeurs de sortie dépondent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrée (***effet mémoire***).

2.2.9 Stabilité

Une notion très importante est celle de stabilité. Un système est dit stable si le système produit des sorties bornées à partir des entrées d'amplitude borné.

Illustration de la notion stabilité

— Stabilité asympthotique globale ⇒ la bille revient toujours à son point d'équilibre, quelque soit la perturbatoin (figure 2.8).

— Stabilité non asympthotique ⇒ la bille écartée de son point d'équilibre restera dans le voisinage de ce point (figure 2.8).

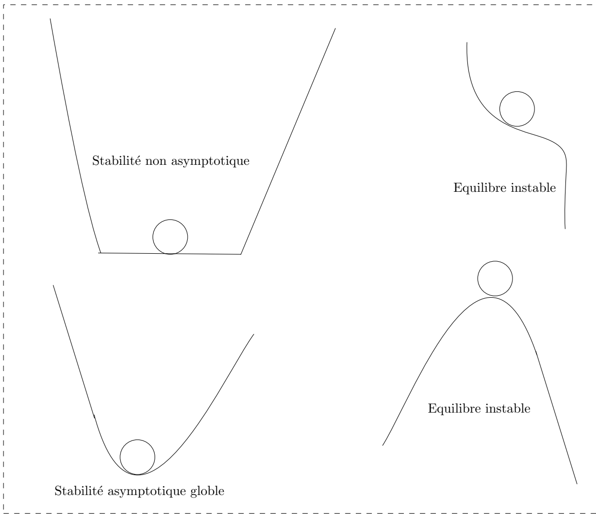


FIGURE 2.8: Stabilité des systèmes

2.3 Transformation de Laplace (TL)

Cette section a pour but de rappeler ce qu'est la transformation de Laplace, outil mathématique nécessaire pour obtenir la fonction de transfert d'un système. Chaque grandeur physique est décrite par un signal temporel, c'est-à-dire une fonction du temps. Seuls les fonctions du temps dites causales, c'est-à-dire pour lesquelles $h(t) = 0$, $\forall t < 0$, sont considérées. Par définition, la transformée de Laplace unilatérale $H(s)$ d'une fonction causale $h(t)$ est définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{h(t)\} =&H(s)\\ =&\int_0^\infty h(t)e^{-st}dt.\end{aligned} \tag{2.8}$$

La fonction $H(s)$ est une fonction complexe d'une variable complexe s (avec $s = \sigma + j\omega$), l'opérateur s sera l'inverse du temps donc une fréquence.
L'avantage principal d'analyser des systèmes de cette façon est que le calculs sont beaucoup plus simples dans le domaine de Laplace. Dans le domande de Laplace, les dérivées et les intégrales se combinent à l'aide de simples opérations algébriques, pas besoin d'équations différentielles. On peut diviser la TL en deux types :

1. **Transformée fonctionnelle :** c'est la TL d'une fonction spécifique, comme $cos(\omega t)$, e^{-at}, t, etc.
2. **Transformée opérationnelle :** c'est une propriété mathématique de la TL, comme le calcul de la dérivée de $h(t)$.

2.3.1 Propriétés fondamentales de la TL

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformation de Laplace) les transformées de Laplace de certains signaux.

Propriétés	h(t)	$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$
Linéarité	$ah_1(t) + bh_2(t)$	$aH_1(s) + bH_2(s)$
Dérivation	$\frac{d}{dt}h(t)$	$sH(s) - h(0)$
Intégration	$\int_0^t h(\alpha)d\alpha$	$\frac{H(s)}{s}$
Retard	$h(t-\tau)$	$e^{-\tau s}H(s)$
Décalage	$e^{-at}h(t)$	$H(s+a)$
Théorème de la valeur finale	$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} h(t)$	$\lim_{s\to 0} sH(s)$
Théorème de la valeur initiale	$f(0) = \lim_{t\to 0} h(t)$	$\lim_{s\to\infty} sH(s)$
Produit de convolution	$\int_0^t h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau$	$H_1(s)H_2(s)$

Table 2.1: Propriétés de la transformée de Laplace

2.3.2 TL de quelques signaux usuels

Cette table 2.2 de transformées permet de trouver l'originale d'une fonction $H(s)$ sans effectuer de calculs à partir de la définition de la transformée de Laplace. La table de transformées suivante présente quelques-unes des relations entre $H(s)$ et $h(t)$ les plus courantes.

h(t)	Transformée de Laplace $H(s)$
Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
Echelon : A.u(t)	$\frac{A}{s}$
Rampe : at.u(t)	$\frac{a}{s^2}$
$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t.e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n.e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Table 2.2: Table de transformées de laplace de quelques signaux simples

2.4 Fonction de Transfert (FT)

Considérons un système linéaire quelconque possédant une entrée $u(t)$ et une sortie $y(t)$. L'objectif est de représenter la fonction de transfert reliant l'entrée et la sortie du système. Cette fonction s'écrit à l'aide d'une équation différentielle de degré n :

$$a_n y^{(n)}(t) + ... + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + ... + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \tag{2.9}$$

En considérant les conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation 2.9 est :

$$a_n s^n Y(s) + ... + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + ... + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \tag{2.10}$$

ou encore,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + ... + a_1 s + a_0} \tag{2.11}$$

La fonction $H(s)$ est une fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe s et appelée fonction de trasnfert du système. Elle peut être représenté par un schéma fonctionnel (voir, figure 2.9).

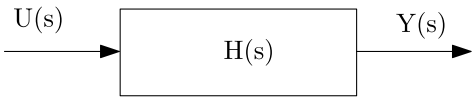


FIGURE 2.9: Fonction de transfert $H(s)$

En fait, la réponse de sortie $Y(s)$ pour un signal d'entrée $U(s)$ peut être obtenue en utilisant la relation

$$Y(s) = H(s)U(s) \tag{2.12}$$

En faisant apparaître les racines (complexes éventuellement) du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert, peut s'écrire :

$$H(s) = \frac{b_m (s - z_m)(s - z_{m-1})...(s - z_1)}{a_n (s - s_n)(s - s_{n-1})...(s - s_1)} \tag{2.13}$$

— $k = \frac{b_m}{a_n}$ est le gain statique du système.
— Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelés les zéros de la fonction de transfert.
— Les racines s_i qui annulent son dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert.
— La valeur de n exprime l'ordre de la fonction de transfert.

Les pôles du systèmes peuvent être complexes ou réels. Nous verrons plus loin que l'étude, le signe ou l'appartenance à l'ensemble des réels de ces pôles ou zéros, jouent des rôles très importants dans l'étude des systèmes pour avoir une idée des performances du système (notamment la stabilité).

Exemple :

➠ ***Fonction de transfert du modèle de Westheimer du mouvement oculaire saccadique humain***

A partir de l'équation différentielle 2.7 la fonction de transfert du modèle Westheimer pour les mouvements saccadés de l'oeil humain, peut être donner par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{K_\tau}{Js^2 + Bs + K} \tag{2.14}$$

2.4.1 Recherche de l'origine d'une Fonctions de transfert

La transformée de Laplace inverse est définie par :

$$h(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\alpha - j\beta}^{\alpha + j\beta} H(s) e^{st} ds. \tag{2.15}$$

En général, la fonction de transfert $H(s)$ est une fraction rationnelle $\frac{N(s)}{D(s)}$. On décompose alors $H(s)$ en une somme d'éléments simples (linéarité) pour lesquels on peut établir facilement les originaux.

Fraction rationnelle possédant des pôles simples

La fonction de transfert $H(s)$ d'une fraction rationnelle $\frac{N(s)}{D(s)}$ possédant uniquement des pôles simples s'écrit :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n)} \tag{2.16}$$

Sa décomposition en éléments simples s'écrit alors :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{(s - s_1)} + \frac{K_2}{(s - s_2)} + ... + \frac{K_n}{(s - s_n)} \tag{2.17}$$

où les K_i sont les coefficients réels ou complexes calculés par :

$$K_i = lim_{s \to s_i} (s - s_i) H(s) \qquad i = 1...n \tag{2.18}$$

D'après la table de TL 2.2, l'original s'écrit :

$$h(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + ... + K_n e^{s_n t} \tag{2.19}$$

Fraction rationnelle possédant des pôles doubles

La fonction de transfert $H(s)$ d'une fraction rationnelle $\frac{N(s)}{D(s)}$ possédant des pôles doubles s'écrit :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_j)^2...(s - s_n)} \tag{2.20}$$

où s_j est un pôle double.
Sa décomposition en éléments simples s'écrit alors pour chaque pôle double :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{(s - s_1)} + \frac{K_2}{(s - s_2)} + ... + \frac{K_{j2}}{(s - s_j)^2} + \frac{K_{j1}}{(s - s_j)} ... + \frac{K_n}{(s - s_n)} \tag{2.21}$$

où les K_{j1} et K_{j2} sont les coefficients réels ou complexes calculés par :

$$K_{j2} = lim_{s \to s_j} (s - s_j)^2 H(s) \qquad K_{j1} = lim_{s \to s_j} \frac{d}{ds} [(s - s_j)^2 H(s)] \tag{2.22}$$

D'après la table de TL 2.2, l'original pour chaque pôle double s'écrit :

$$h(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + ... + K_{j2} t e^{s_j t} + K_{j1} e^{s_j t} + ... + K_n e^{s_n t} \tag{2.23}$$

Exemple

Considérons un système qui régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y(t) = 3u(t) \tag{2.24}$$

On injecte dans ce système un signal d'entrée $u(t)$ correspondant à un échelon. Par ailleurs, à la lecture de la table, la fonction temporelle échelon possède pour transformée de Laplace $\frac{1}{s}$.
La fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$F(s) = \frac{3}{s(s+3)(s+2)} \tag{2.25}$$

La décomposition de cette fraction rationnelle nous donne :

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+3)} + \frac{c}{(s+2)} \tag{2.26}$$

Par identification on trouve : $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = -\frac{3}{2}$
d'où :

$$F(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{(s+3)} - \frac{3}{2(s+2)} \tag{2.27}$$

Compte tenu de la linéarité de la TL, il suffit à présent de rechercher dans la table des transformées de Laplace les fonctions temporelles originales des trois termes simples qui constituent cette combinaison et d'écrire $f(t)$ comme étant la même combinaison des trois fonctions temporelles originales :

$$f(t) = [\frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{2}{3}e^{-2t}]u(t) \tag{2.28}$$

2.4.2 Association de fonctions de transfert et schémas fonctionnels

Chaque bloc du schéma bloc représente une fonction de transfert ; il comporte systématiquement une flèche entrante et une flèche sortante.

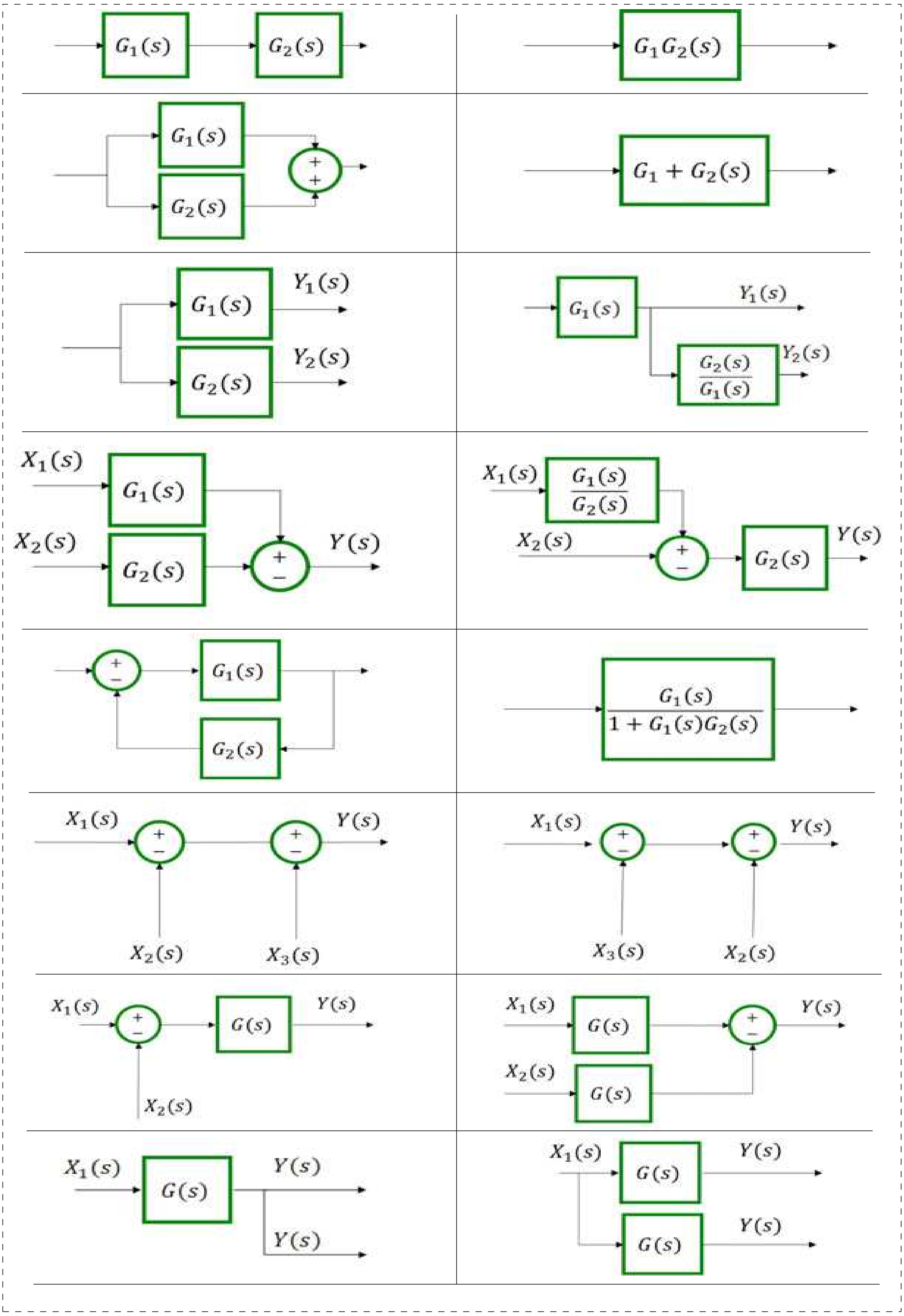


FIGURE 2.10: Liste des règles couramment utilisées pour réduire un schéma fonctionnel

3

Réponses des systèmes linéaires du premier et du second ordre

3.1 Introduction

L'analyse temporelle consiste à étudier la réponse d'un système représenté par sa fonction de transfert à un signal d'entré variant dans le temps. le signal d'entrée peut en principe être quelconque. Toutefois, pour obtenir une expression analytique, nous utilisons des signaux élémentaires (Impulsion, échelon, rampe,...(voir figure 3.1)). La manière dont les systèmes physiques réagissent aux éxcitations d'entrée dépend évidemment de leurs nature et de l'entrée donnée. En considérant les systèmes biomédicaux, il devient essentiel de comprendre comment ces systèmes réagissent pour les différentes entrées afin de les adapter pour répondre aux exigences requises en termes de performances (rapidité, précision et stabilité).

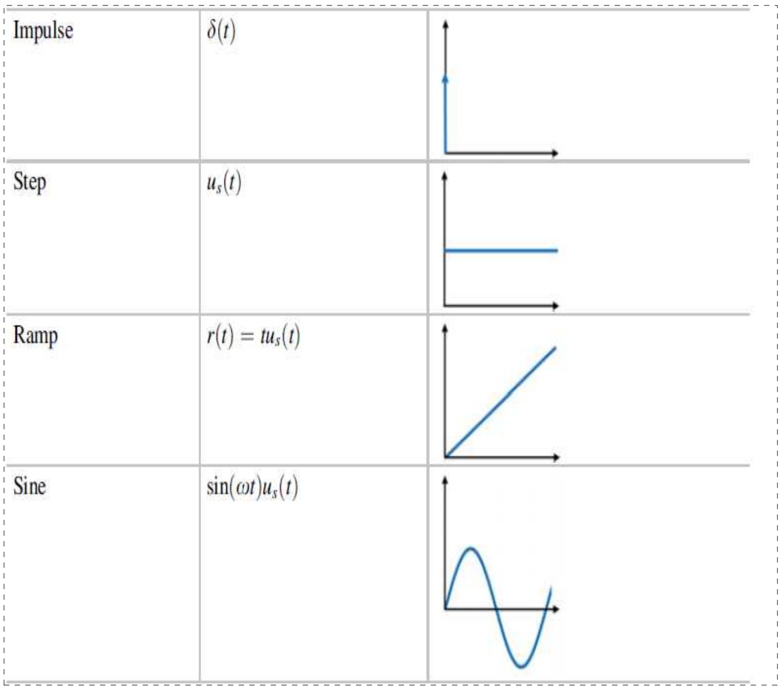


FIGURE 3.1: Quelques signaux d'excitation standard

3.2 Réponse du système de premier ordre

Par définition, ces systèmes obéissant à une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$u(t) = a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) \tag{3.1}$$

où $u(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système. En général, la fonction de transfert d'un système du premier ordre obtenue au moyen de la transformation de Laplace de l'équation précédente (en considérant les conditions initiales comme nulles) est donnée par :

$$H(s) = \frac{1}{as+b} = \frac{1/b}{(a/b)s+1} \tag{3.2}$$

avec un changement de variables, $k = \frac{1}{b}$ et $\tau = \frac{a}{b}$, on obtient la forme standard d'une fonction de transfert du premier ordre :

$$H(s) = \frac{k}{\tau s+1} \tag{3.3}$$

H(s) possède deux paramètres caractéristiques : le gain k et la constante de temps τ du système qui caractérise la dynamique du système.

3.2.1 Réponse indicielle

La réponse du système $Y(s)$ à une entrée en échelon d'amplitude A peut être obtenue comme suit :

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s+1}\frac{A}{s} \tag{3.4}$$

En appliquant la méthode des résidus, cette expression peut être calculée comme :

$$Y(s) = A.k(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+(1/\tau)}) \tag{3.5}$$

$\overset{TL^{-1}}{\rightarrow}$

$$y(t) = A.k(1-e^{t/\tau}) \tag{3.6}$$

La réponse en échelon d'un système du premier ordre présente un comportement exponentiel négatif, comme illustré à la figure 3.2.

Remarques

- le coefficient directeur de la tangente à l'origine est donné par : $\dot{y}(0) = \frac{Ak}{\tau}$.
- l'amplitude de la réponse indicielle pour $t = \tau$ est $y(\tau) = 0.632A.k$
- Valeur de la sortie en régime permanent $lim_{t\rightarrow+\infty}y(t) = lim_{s\rightarrow 0}sY(s) = Ak$, la réponse atteint donc un régime finale stable.

Temps de réponse

C'est le temps que met la réponse indicielle du système pour ne plus sortir de l'intervalle ± 5 autour de sa réponse finale. Pour déterminer le temps de réponse d'un système du premier ordre :

$$\begin{aligned} y(t_r) =& 0.95A.k \\ =& A.k(1-e^{t/\tau}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

et donc $t_r = 3\tau$

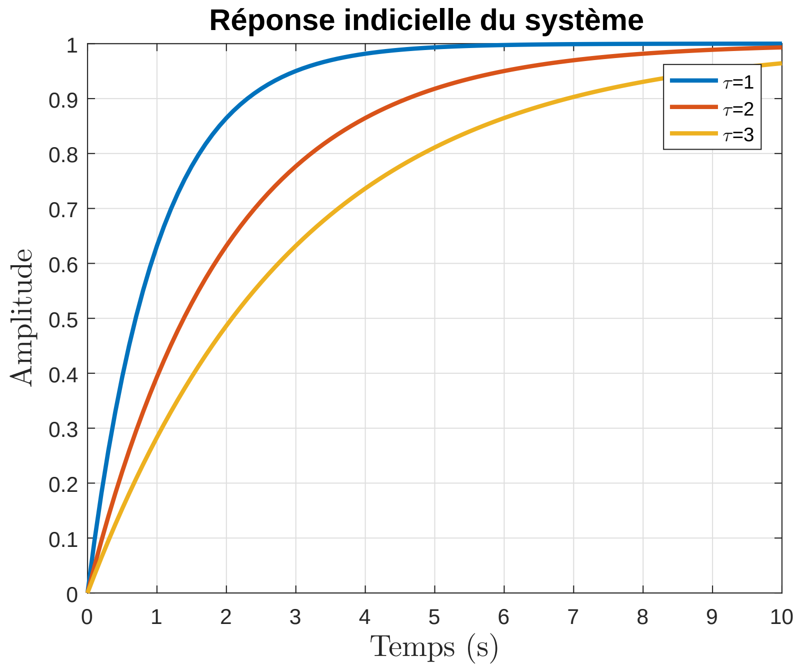


FIGURE 3.2: Réponses du système du premier ordre pour des valeurs variables de la constante de temps τ

Erreur statique

Si le signal est stable on appelle l'erreur statique (aussi erreur de position)

$$\begin{aligned} lim_{t\to+\infty}\epsilon(t) =& lim_{t\to+\infty}[u(t)-y(t)] \\ =& lim_{s\to 0}s[U(s)-Y(s)] \\ =& A(1-k) \end{aligned} \tag{3.8}$$

l'erreur statique n'est donc nulle que pour les systèmes du premier ordre dont gain statique k est unitaire c'est-à-dire $k=1$.

3.2.2 Exemple 1

Un thermomètre utilisé pour mesurer la température des patients (figure 3.3) peut être modélisé à l'aide de l'équation différentielle :

$$C\frac{dT}{dt} = \frac{T_r(t)-T(t)}{R} \tag{3.9}$$

où C est la capacité thermique du thermomètre, R la résistance thermique, $T(t)$ la température mesurée et $T_r(t)$ la température de référence. Ainsi, cette équation peut être réécrite pour correspondre au format général

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{RC}T(t) = \frac{T_r(t)}{RC} \tag{3.10}$$

étant $T(t)$ la sortie système et $T_r(t)$ l'entrée de référence et avec une valeur initiale de $T(t)=T_0$.
Pour obtenir une réponse du système avec $RC=20sec$ à partir de $T_0=20°C$ (Condition Initiale CI)et pour un signal d'entrée échelon $T_r(t)=38°C$.

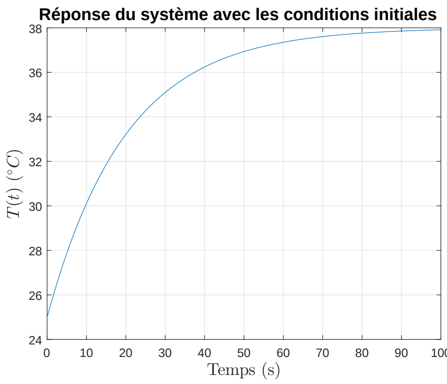
En appliquant la transformation de Laplace, on obtient :

$$T(s) = \frac{0.05}{s+0.05}T_r(s) + \frac{1.25}{s+0.05} = Y_1(s) + Y_2(s) \tag{3.11}$$

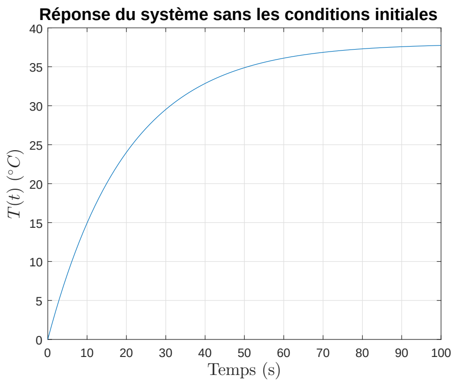
with $T_r(s) = \frac{38}{s}$ the input signal in Laplace domain.

FIGURE 3.3: Thermomètre utilisé pour mesurer la température des patients

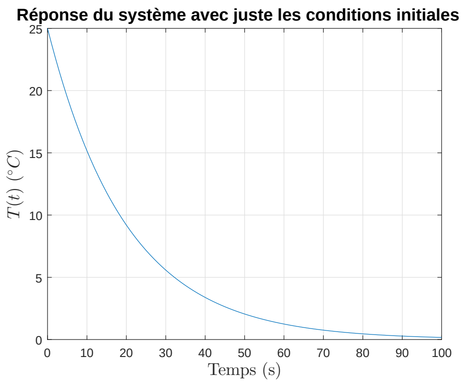
La figure 5.1 montre les graphiques correspondant aux différentes parties des réponses obtenues.



(a) Réponse indicielle avec les CI



(b) Réponse forcée



(c) Réponse naturelle

FIGURE 3.4: Réponses du système

3.3 Réponse du système de deuxième ordre

En général, les systèmes de second ordre peuvent être représentés sous forme d'équations différentielles sous cette forme

$$u(t) = a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) \tag{3.12}$$

TL, CI=0

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \tag{3.13}$$

ou sous forme canonique,

$$G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{3.14}$$

- k : gain statique du système ;
- ω_0 : pulsation propre non amortie du système (rd/s) ;
- ξ : facteur d'amortissement du système.

Ces trois grandeurs sont suffisent à caractériser tout système du deuxième ordre.

3.3.1 Exemple 1

Un exemple de système de second ordre peut être présenté à la figure 3.5. La force passive qui se développe dans un tissu allongé est la somme des effets inertiels, élastiques et visqueux permettant de représenter un tissu humain au moyen d'une simple équation dynamique mécanique.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + kx(t) = F(t) \tag{3.15}$$

où m représente la masse du tissu, D la constante de viscosité, K la constante d'élasticité avec $x(t)$ le déplacement en sortie et la force $F(t)$ en entrée du système.

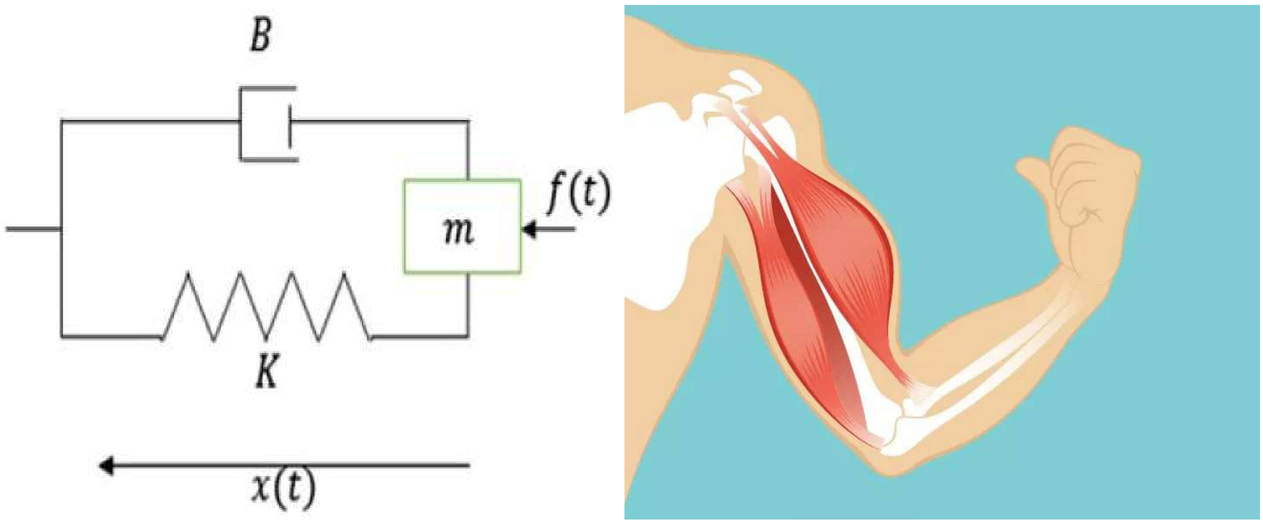


FIGURE 3.5: Schéma simplifié d'un modèle musculaire

3.3.2 Etude des pôles du système de deuxième ordre

Les pôles de la fonction de transfert $G(s)$ sont les valeurs de (s) qui annulent le dénominateur de $G(s)$. Ce sont les racines de l'équation caractéristique.

$$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \tag{3.16}$$

avec le discriminant réduit $\Delta = (\xi^2 - 1)\omega_0^2$.
Selon la valeur de ξ sera superieur ou inférieur à 1 l'équation admettera des solutions réelles ou complexes conjuguées.

Valeur de ξ	$\xi > 1$	$\xi = 1$	$\xi < 1$
Pôles du système $s_{1,2}$	$-\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_{1,2}}$	$-\omega_0 = -\frac{1}{\tau_0}$	$-\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$
Fonction de transfert	$H(s) = \frac{k}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$H(s) = \frac{k}{(1+\tau_0 s)^2}$	$\frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$
Caractéristiques	apériodique sans oscillation	critique	pseudo-périodique

Remarques

1. Pour étudier la forme de la réponse d'un système d'ordre supérieur, on peut :
   — Faire une bonne approximation de son comportement du système en négligeant certaines dynamiques rapides.
   — Décomposer la transformée de Laplace du système en éléments simples (d'ordre 1 ou 2) .
2. On voit que les pôles sont de natures différentes selon la valeur de ξ. Les réponses temporelles vont donc s'étudier en fonction de la valeur de ξ.

3.3.3 Allures des réponses indicielles

Voici plusieurs réponses indicielles convergentes de systèmes de deuxème ordre. On considère le gain statique du système $k = 1$ ce qui ne change rien à la forme des courbes. On peut constater

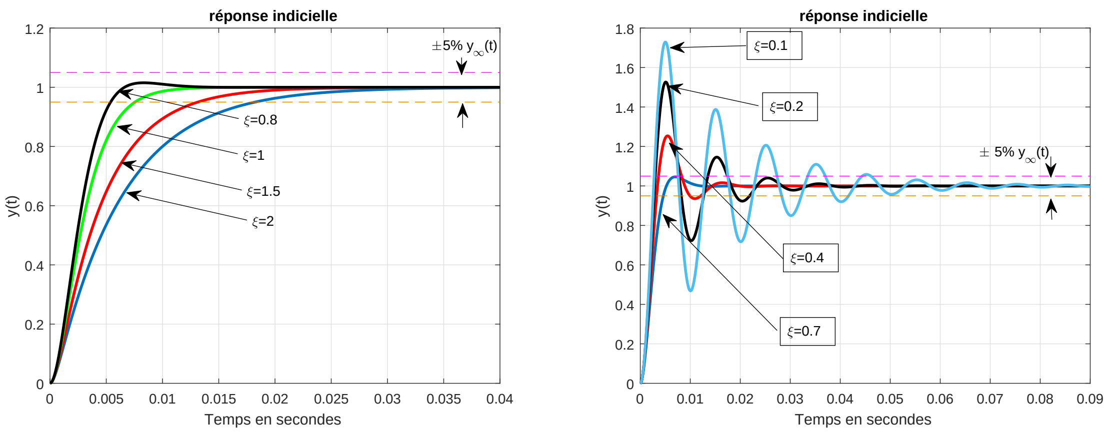


FIGURE 3.6: Réponses à un échelon d'un deuxième ordre en fonction de la valeur de ξ.

qu'un amortissement faible engendre de grands dépassements, c'est-à-dire, les oscillations sont d'autant plus importantes (en hauteur et en durée), et des dépassements faibles ou inexistants correspondent à un fort amortissement (figure 3.6). Par contre, si ξ est nul, le signal de sortie est une sinusoïde oscillant.

3.3.4 Spécifications sur le régime transitoire

- t_r : temps de réponse à $\pm 5\%$.
- D_1 : dépassement maximal en %, avec $D_1 = 100 * \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$;

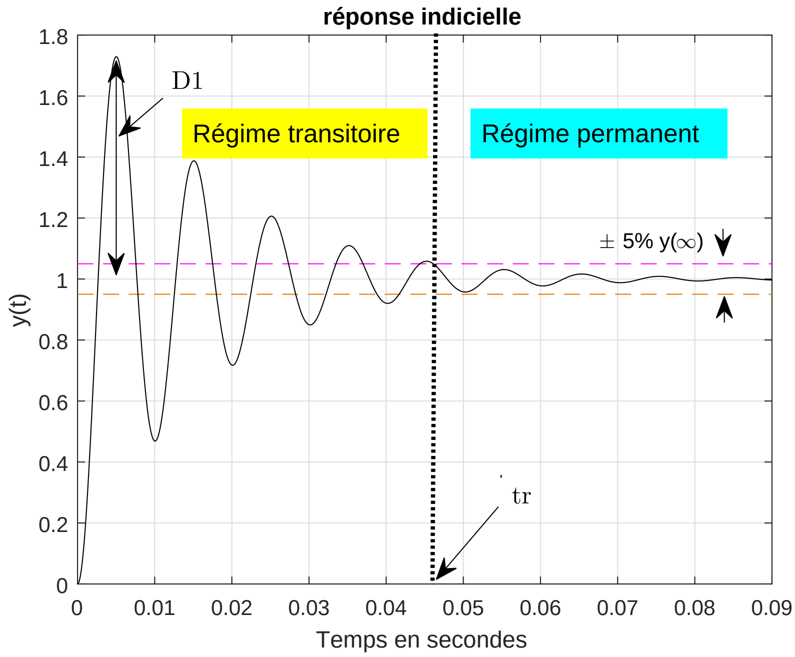


FIGURE 3.7: Analyse transitoire

3.3.5 Exemple 2

Un capteur de pression sanguine (figure 3.8) peut être modélisé comme un système de second ordre dont la dynamique est donnée par des pôles réels situés à $s_1 = -1$ et $s_2 = -10$ et un gain statique $K_s = 10$. La fonction de transfert du système est donnée par :

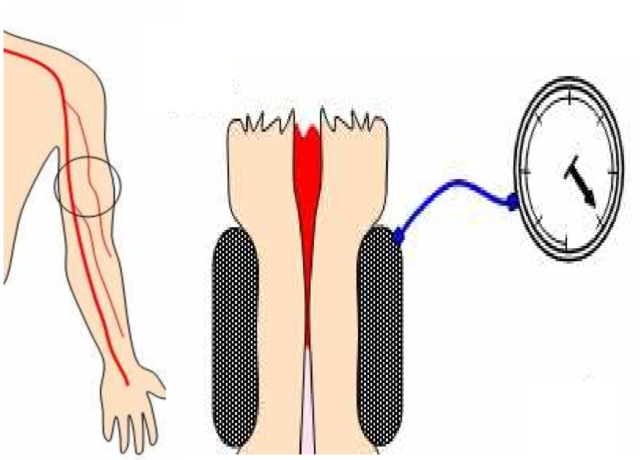


FIGURE 3.8: Un transducteur de pression sanguine

$$H(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)} \tag{3.17}$$

La réponse en sortie $y(t)$ de ce système est illustrée à la figure 3.9, dont la forme est similaire à celle des systèmes du premier ordre, mais un peu plus lente au début.

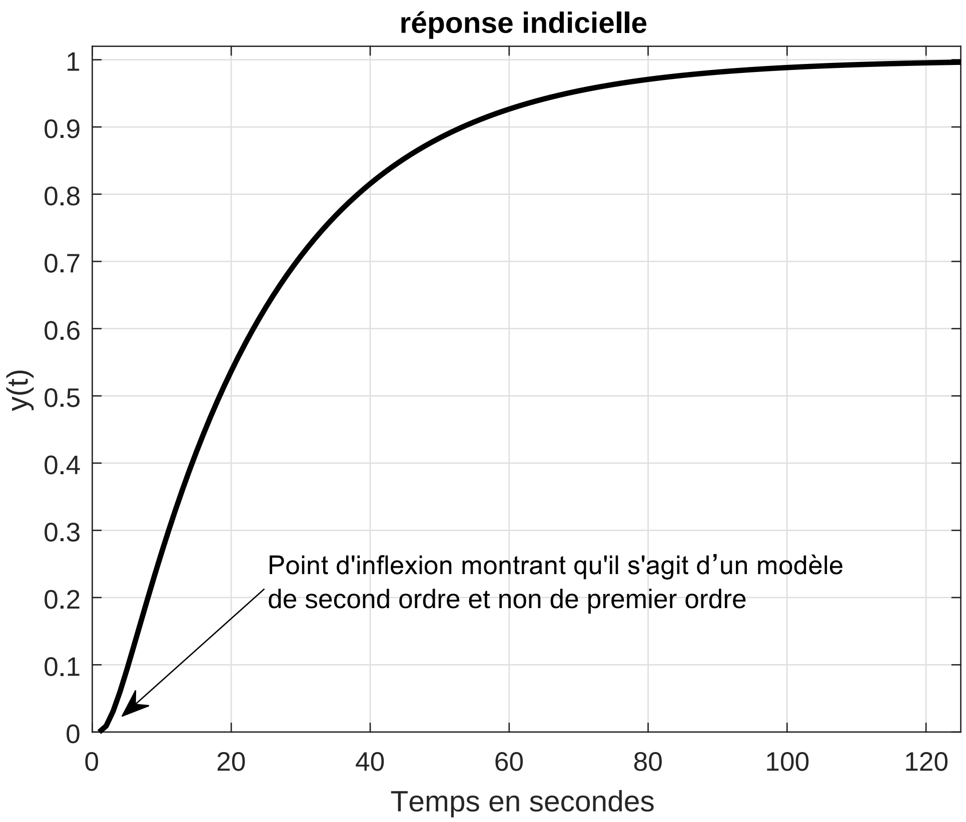


FIGURE 3.9: Réponse indicielle du modèle du transducteur de pression sanguine

4

Régulation des systèmes linéaires

4.1 Régulation

Dans le domaine biomédicale, nombreux sont les appareils dont leur fonction est t'assurer par une régulation, par exemple dans les pompes à insuline pour maintenir constant le niveau de sucre d'une personne diabétique ou dans les Dispositifs d'Assistance Ventricule Gauche (DAVG) [1]. La régulation constitue l'étape, délicate, de la réflexion du contrôle puisqu'elle doit garantir un fonctionnement du processus conforme à l'objectif fixé. Or, lorsqu'un écart par rapport à cet objectif survient, la régulation doit annuler ou amoindrir cet écart en suivant les lois d'évolution du procédé définies par le concepteur.

4.1.1 Généralités

- ***Régulation en chaîne ouverte :*** Cette régulation forme une chaîne ouverte car l'action ne modifie pas la grandeur mesurée (voir figure 1.3).
- ***Régulation en boucle fermée :*** Cette régulation forme une boucle fermée (voir figure 4.1) car l'action modifie la grandeur mesurée. Elle comporte une contre-réaction ou retour d'information. Plus performante, la régulation en boucle fermée est la plus employée industriellement.
- ***Régulation de maintien (ou régulation) :*** la mesure doit être maintenue à une valeur constante égale à la consigne quelles que soient les perturbations subies par le procédé.
- ***Régulation de poursuite (ou asservissement) :*** la mesure doit suivre toute évolution de la consigne.
- ***Régulation manuelle***, effectuée par ***un technicien ou opérateur***.
- ***Régulation automatique***, assurée par ***un régulateur***.

Le schéma de principe d'une régulation automatique est illusté sur la figure 4.1.

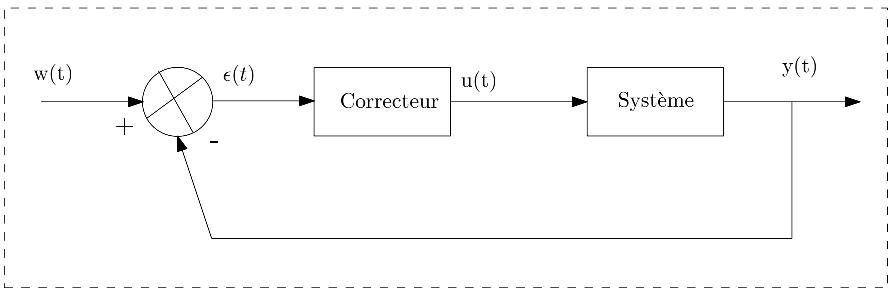


FIGURE 4.1: Schéma de principe d'un système en boucle fermée

1. des pompes cardiaques artificielles

- ➜ $W(t)$: signal de consigne ou référence ;
- ➜ $e(t)$: signal d'erreur (construit par le comparateur) ;
- ➜ $u(t)$: signal de commande déduit par le régulateur après traitement du signal d'erreur ;
- ➜ $y(t)$: signal mesuré fournit par un capteur.

Le schéma fonctionnel peut aussi faire apparaitre les fonctions de transfert (voir figure 4.2) :

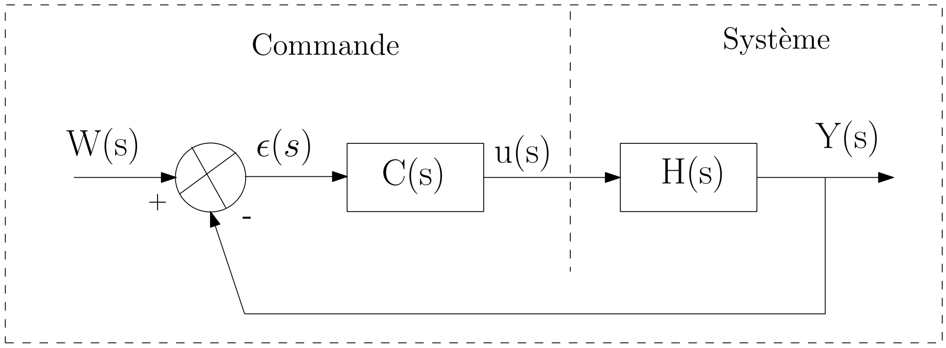


FIGURE 4.2: Schéma de principe d'une boucle de régulation automatique avec retour unitaire.

- ➜ $C(s)$, FT du régulateur ;
- ➜ $H(s)$, FT du processus (système) à régler ;
- ➜ $H_{BO}(s) = C(s)H(s)$, FT en boucle ouverte ;
- ➜ $H_{BF}(s) = \frac{H_{BO}(s)}{1+H_{BO}(s)}$, FT en boucle fermée.

4.1.2 Qualités attendues d'une régulation

- ➠ La première qualité à assurer d'une régulation est la ***stabilité*** puisque toute instabilité conduit à la perte de contrôle du procédé. En l'absence de stabilité, toute autre performance ne peut être atteinte.
- ➠ La ***précision***, statique ou dynamique, est souvent la deuxième qualité attendue d'une régulation. La précision d'une régulation de maintien ou de poursuite se chiffre par la différence entre la consigne et la mesure en régime permanent. Plus cet écart est petit, plus la régulation est précise.
- ➠ ***La rapidité*** est une qualité opposée à la précision dynamique et liée à l'amortissement. Elle traduit la durée du régime transitoire et s'évalue, par : le temps de réponse t_r.

4.2 Régulateurs

Un régulateur est un système (mécanisme) automatique a pour rôle essentiel de contrôler le procédé. Autrement dit, le régulateur a pour charge de maintenir le signal d'erreur aussi proche de zéro que possible bien que le système soit soumis à des perturbations non contrôler et assez souvent non mesurés, dans ce but, il fournit au système à régler une commande en fonction de l'erreur de réglage et selon un algorithme donné.
La loi de commande du régulateur peut être très simple (par exemple, le régulateur tout-ou-rien) ou beaucoup plus compliquée (régulateur flous, réseaux de neurones,...). Le régulateur le plus utilisé dans l'industrie est le régulateur PID (Proportionnel, Intégral et Dérivé) car il permet de régler à l'aide de ses trois paramètres les performances d'une régulation d'un procédé.

4.2.1 Régulateur à action Proportionnelle 'P'

Le régulateur le plus simple à savoir le régulateur dit proportionnel, pour ce régulateur la commande $u(t)$ est proportionnelle à l'erreur $e(t)$ (figure 4.3) :

$$u(t) = K_p.e(t) \tag{4.1}$$

La fonction de transfert du régulateur P est donnée par :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = Kp \tag{4.2}$$

On dit que ce régulateur est statique car il ne dépend pas de s.

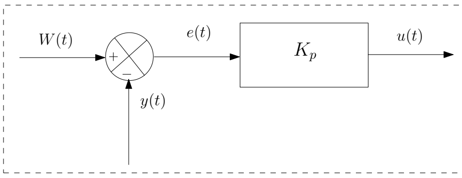


FIGURE 4.3: Schéma fonctionnel régulateur P

Avantages et inconvénients de l'action 'P'

- ✚ une transmission intantannée du signal d'erreur donc l'action est relativement dynamique, plus K_p est grand, plus la réponse est rapide.
- \- risque d'entraîner des oscillations, voire l'instabilité.
- \- l'incapacité à annuler l'erreur statique.

4.2.2 Régulateur à action Intégrale 'I'

L'équation temporelle est donnée par :

$$u(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt. \tag{4.3}$$

avec : T_i constante du temps de l'action I.
La fonction de transfert d'un tel régulateur est (figure 4.4) :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i s} \tag{4.4}$$

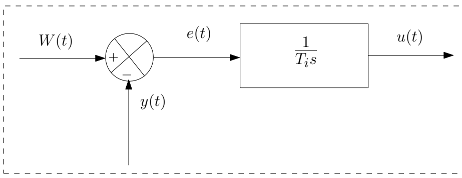


FIGURE 4.4: Schéma fonctionnel régulateur I

Avantages et inconvénients de l'action 'I'

- ✚ annulation de l'erreur statique, assure la précision.
- \- Action lente, entraîne un ralentissement du transitoire et peut générer des oscillations allant jusqu'à l'instabilité.

4.2.3 Régulateur à action Dérivé 'D'

$$u(t) = T_d \frac{de(t)}{dt}. \tag{4.5}$$

avec : T_d constante du temps de l'action D. On peut aussi exprimer la fonction de transfert d'un régulateur D comme suit (figure 4.5) :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = T_d s \tag{4.6}$$

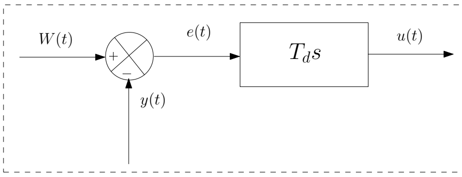


Figure 4.5: Schéma fonctionnel régulateur D

Avantages et inconvénients de l'action 'D'

- ✚ Action très rapide, anticipe la réaction du système car utilise la variation de l'écart. Ceci évite des oscillations et a a un effet stabillisateur.
- \- Sensibilité aux bruits en particulier celles apparaissant sur la mesure des sorties. A ce propos, il faut noter qu'en pratique, on préfère implanter un effet dérivé filtré plutôt qu'une dérivée pure (voir l'annexe TP 02) et que parfois, l'effet dérivée n'est appliquée qu'à la sortie y mais pas à l'écart $e(t)$.

4.2.4 Régulateur 'PID'

Les actions d'un régulateur peuvent être associées de plusieurs façons (série, parallèle, mixte). On parle de la structure d'algorithme du régulateur. Par exemple, la structure parallèle [2] du régulateur PID dont la description temporelle correspond à l'équation suivante :

$$u(t) = K_p(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt}) \tag{4.7}$$

La fonction de transfert d'un tel régulateur est (figure 4.6) :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_p}{T_i s} + K_p T_d s. \tag{4.8}$$

ou encore,

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p(\frac{1 + T_i s + T_d T_i s^2}{T_i s}) \tag{4.9}$$

2. sert notamment à l'implantation physique d'un tel régulateur

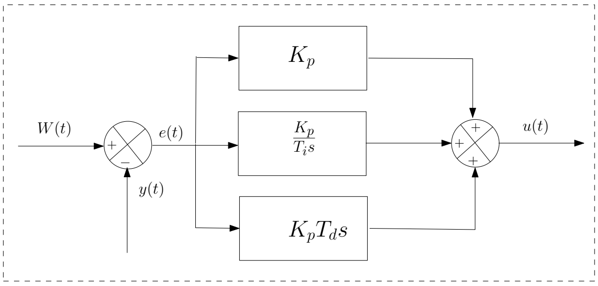


FIGURE 4.6: Schéma fonctionnel régulateur PID 'structure parallèle'

Réglage des paramètres des régulateurs

Les comportements en régulation de maintien ou de poursuite étant différents, le réglage **empirique** idéal n'existe pas. Un bon réglage est un **compromis** entre les trois actions $'K_p, T_i, T_d'$, pour obtenir une réponse rapide et précise en dynamique comme en statique.
Il existe en particulier **une technique de calcul théorique** des régulateurs dite par compensation de pôle qui consiste à compenser un pôle de la chaîne directe par un zéro du régulateur.

Remarque

— La méthode théorique de calcul des paramètres nécessite la connaissance du modèle du système à commander donc leur efficacité dépend de la précision et de la robustesse du modèle. Dans l'industrie elles sont rarement utilisées, surtout pour la commande des processus complexes ;

— Le PID reste le plus célèbre, le plus couramment utilisé, et il résout, en monovariable, une bonne part des problèmes d'asservissement et de regulation rencontrés dans l'industrie, ceci de manière assez satisfaisante.

Principe de la méthode de compensation (Pôles/Zéros)

Le schéma fonctionnel de régulation avec un correcteur $C(s)$ correspond à un correcteur PID, est donné ci-dessous (voir figure 4.7) :

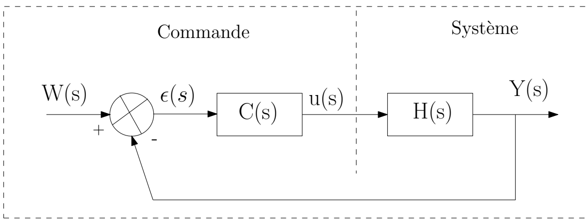


FIGURE 4.7: Boucle de régulation.

$$H_{BO}(s) = C(s)H(s) \tag{4.10}$$

On prend à titre d'exemple un système de second ordre :

$$H(s) = \frac{k_0}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \tag{4.11}$$

$$H_{BO}(s) = \frac{k_o K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{(1 + (\tau_1 + \tau_2)s + (\tau_1 \tau_2)s^2)T_i s} \tag{4.12}$$

Pour calculer K_p, T_i et T_d on compense les deux constantes de temps dominantes τ_1, τ_2 et on règle le gain K_p.

Si on met, $\tau_1 + \tau_2 = T_i$ et $\tau_1.\tau_2 = T_i T_d$, on obtient,

$$T_d = \frac{\tau_1.\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \tag{4.13}$$

les deux constantes du temps τ_1 et τ_2 du système à commander ont été compensés, donc on obtient :

$$H_{BO}(s) = \frac{K_p K_0}{(\tau_1 + \tau_2)s} \tag{4.14}$$

4.2.5 Exemple 1

Boucle intensité de courant électrique 4.8.
Le système est modélisé par une fonction de transfert de premier ordre :

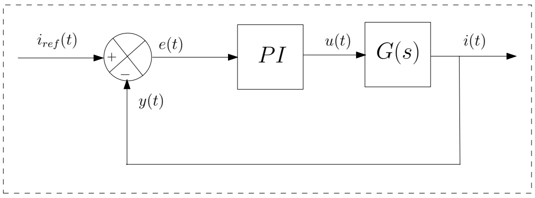


Figure 4.8: Asservissement d'intensité

$$G(s) = \frac{k_0}{1 + \tau s} \tag{4.15}$$

En pratique, on utilise un correcteur PI.

$$C(s) = \frac{1 + K_p T_i s}{T_i s} \tag{4.16}$$

La fonction de transfert du système bouclé est donnée par

$$\frac{I(s)}{I_{red}(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \tag{4.17}$$

avec,

$$C(s)G(s) = \frac{1 + K_p T_i s}{T_i s} \frac{k_0}{1 + \tau s} \tag{4.18}$$

En effectuant le réglage $K_p T_i = \tau$, le numérateur compense le dénominateur.
$\Rightarrow C(s)G(s) = \frac{k_0}{T_i s}$ on obtient,

$$H_{BF}(s) = \frac{1}{1 + (\frac{T_i}{k_0})s} \tag{4.19}$$

avec $\tau_{ref} = \frac{T_i}{k_0}$ qui caractérise le régime transitoire.

4.2.6 Exemple 2

Le contrôle et régulation d'une variable physiologique peut reposer sur un modèle. Un capteur est chargé par la transmission des variations de la variable physiologique à surveiller à un contrôleur. Nous souhaitons conserver un taux de glucose prédéfini chez un patient en utilisant une pompe à insuline. Supposons que les fonctions de transfert des systèmes impliqués sont :

➜ $G_{pompe}(s) = \frac{1}{s+2}$

➜ $G_{patient}(s) = \frac{1}{s+1}$

➜ $G_{capteur}(s)\frac{1}{s+5}$

La fonction de transfert du système peut être dérivée en tant que :

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} \tag{4.20}$$

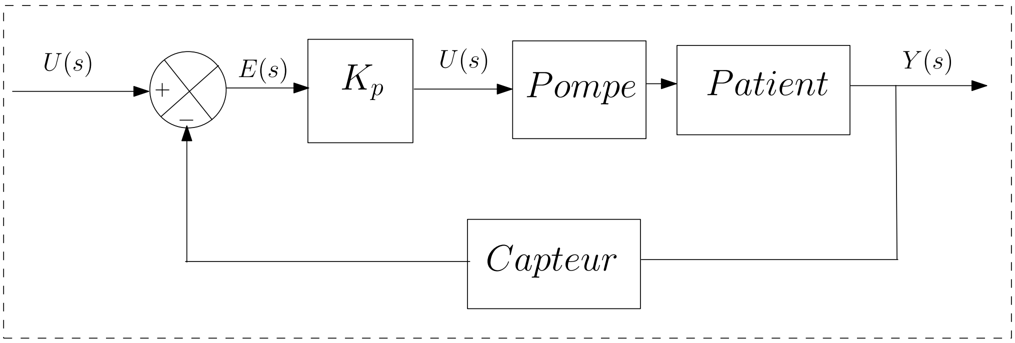


FIGURE 4.9: Système de contrôle du glucose.

La commande en boucle fermée, considérant un contrôleur proportionnel, est représentée par la fonction de transfert :

$$H_{BF}(s) = \frac{K_p}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10 + K_p} \tag{4.21}$$

Dans les travaux pratique de ce cours, nous étudierons l'effet de l'ajout d'un contrôleur proportionnel utilisant différentes valeurs de K_p.

5

Annexes

TRAVAUX PRATIQUES

5.1 TP01 : Système 1^{er} et $2^{ème}$ ordre "Etude temporelle"

I. Etude d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre est représenté par son gain et sa constante de temps τ. Sa fonction de transfert est la suivante :

$$G(s) = \frac{k}{1 + \tau s} \tag{5.1}$$

$k = 5$; $\tau = 0.5sec$;
I.1. Exécution
I.1.1. Ecriture de la fonction de transfert
Taper le code suivant :
num=[k] ;
den= [τ 1] ;
G=tf(num,den) ;
figure(1)
impulse (G) ;
figure(2) ; % permet de définir une nouvelle fenêtre sans écraser la précédente
step (G) ;

1. Que fait ce code ? Commenter les lignes de ce code ?
2. Déterminer graphiquement le temps de stabilisation à $\pm 5\%$ à partir des réponses indicielles représentées à la question précédente.
3. Faire la même chose pour différentes valeurs de la constante du temps : τ= 0.1 et 5 sec.

II. Etude d'un système du second ordre

Considérons un système du second ordre donné par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} \tag{5.2}$$

II.1. Exécution
num= [10]
den= [1 2 10]

```
H=tf(num,den)
printsys(num,den)
```

II.2. Etude de la réponse à un échelon

```
step(num,den) ;
figure(2)
t =0 :0.1 :10 ;
y=step(H,t) ;
plot(t,y)
```

— Donner un titre, un label aux axes. Fonctions title, xlabel, ylabel.

```
line([0 10],[0.95 0.95],'color','r')
line([0 10],[1.05 1.05],'color','g')
tpic=ginput(1) ;
t5=ginput(2) ;
k=dcgain(num,den)
ξ=damp(H)
```

— Que fait ce code ? Commenter les lignes de ce code (Utiliser le help).

II.2. Etude de la réponse à un signal quelconque (ex. rampe unitaire)

```
figure(3)
ramp=t ;
y=lsim(num,den,ramp,t) ;
plot(t,y)
grid
```

— Que fait la fonction **lsim** ? modifier ce code afin de voir la réponse à un signal sinus.

5.2 TP02 : Etude de la régulation du débit d'un système d'hémodialyse

L'hémodialyse nécessite une circulation extra corporel à l'aide d'une pompe à sang qui demande une régulation efficace afin d'annuler l'erreur statique, diminuer le temps de passage et réduire le temps de réponse dans le but d'avoir une réponse adéquat. On s'intéresse au comportement du moteur entraînant la pompe péristaltique qui permet d'aspirer le sang du patient et de le refouler dans le dialyseur.

La fonction de transfert reliant le débit à la tension appliquée à la pompe en boucle ouverte s'écrit :

$$H(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)} \tag{5.3}$$

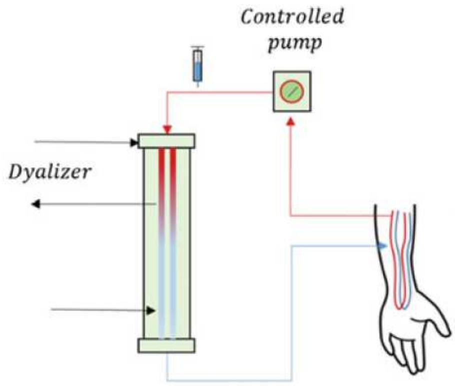
où s désigne la variable de Laplace.

Les valeurs numériques choisies des paramètres du modèle en boucle ouverte sont :

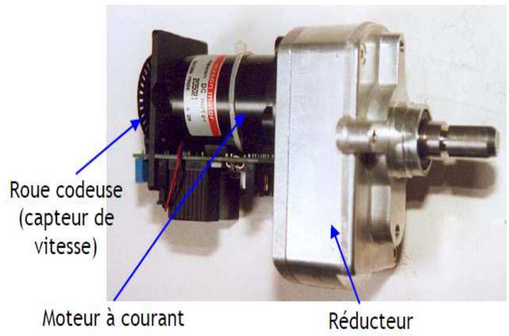
— $K = 12$ gain statique du système ;

— $\tau = 10ms$ constante de temps du système.

1. Calculer les pôles de cette fonction de transfert. Que peut-on dire de la stabilité du système.



(a) Schéma hydraulique.



(b) Pompe qui permet d'aspirer le sang.

FIGURE 5.1: Régulation du débit d'un système d'hémodialyse.

2.1. Utilisation des schémas de simulation Simulink
Introduction à Simulink
Simulink est une interface graphique pour la simulation des systèmes dynamiques sous *Matlab*. On se propose ici d'utiliser *Simulink* pour définir l'asservissement de débit. On pourra ainsi visualiser notamment les réponses du système à différents types d'entrées. Pour lancer Simulink, on peut soit utiliser les menus disponibles, soit taper sur la ligne de commande *»simulink*. Pour créer un nouveau modèle Simulink choisir New dans le menu File, puis Model. Une feuille de travail apparaît, sur laquelle on va pouvoir définir graphiquement notre système. Les différents outils disponibles seront trouvés dans les menus correspondants : sources, visualisation, automatique continue, automatique discrète, fonctions, mathématiques, fonctions et tables, automatique non-linéaire, signaux et systèmes. De par sa nature graphique *Simulink* peut être aisément découvert intuitivement. Cet outil utilise la technique de sélectionner et faire glisser. Il est facile de positionner les éléments nécessaires dans la fenêtre du modèle. Ensuite, on relie ces éléments entre eux pour constituer le modèle. Chaque élément possède une description et éventuellement des paramètres qui peuvent être modifiés. Pour y accéder double-cliquer sur un élément. Par exemple si on veut visualiser le signal d'un générateur sinusoïdal, on utilise la source correspondante (**menu Sources**) et un oscilloscope (**menu Sinks**). On connecte ensuite ces deux éléments en attrapant la sortie du générateur et amenant la souris enfoncée sur l'entrée de l'oscilloscope. La simulation est jouée en cliquant sur Run, dans le menu simulation. La encore, on peut définir l'ensemble de la simulation à l'aide d'un **script**. En effet, Simulink partage les variables de l'espace de travail Matlab. On peut ainsi définir le modèle Simulink à l'aide de variables dont les valeurs sont définies dans un script. On peut aussi jouer la simulation depuis la ligne de commande (donc lancer cette simulation depuis un script). Par ailleurs, l'utilisateur peut analyser le comportement de son système dynamique soit par l'interface graphique soit directement depuis l'environnement Matlab. Ainsi il est possible de visualiser l'évolution des variables au cours de la simulation et de sauvegarder les résultats finaux dans l'espace de travail Matlab (***Workspace***).

— Créer dans le bureau un répertoire qui porte votre nom et prénom.

2.2 Simulation de la pompe
2.2.1 Construction du Schéma Simulink

— En utilisant les différentes bibliothèques disponibles, recomposer le schéma suivant.

Remarque :
dans ce schéma ne doivent apparaître que des noms de variables. Aucunes valeurs numériques

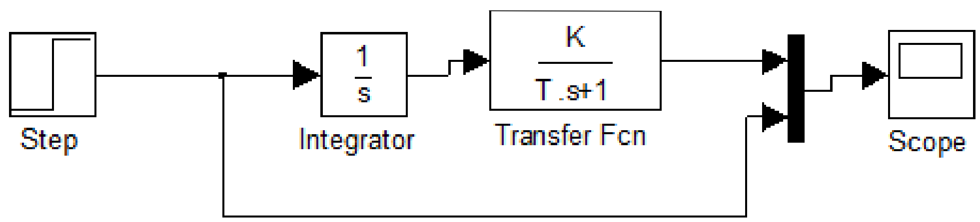


FIGURE 5.2: Schéma simulink de la pompe en BO

ne doivent être introduites ici. Une fois terminé, vous enregistrez votre schéma sous le nom ***pompe.m***.

2.2.2 Simulation temporelle avec le modèle de la vanne en boucle ouverte.

L'excitation du système est réalisée en appliquant un signal de type échelon en entrée du procédé. Ce signal peut être généré via le bloc ***step*** présent dans le menu Sources. Il permet plus précisément de générer un signal échelon,

— Tracer la réponse indicielle du système à une entrée en échelon unitaire de tension. Analyser la réponse indicielle.

Les paramètres de simulation seront réglés dans le sous menu « *parameters* » du menu simulation. Vous sélectionnerez la méthode d'intégration Runge Kutta (*ODE 45*), la tolérance sera de 10^{-3} et la durée de simulation (*stop time*) sera fixée à $t_{sim} = 200s$. Vous pourrez observer l'évolution de la sortie du système en utilisant le bloc scope de la bibliothèque *Sinks*. Les paramètres du schéma seront initialisés en lançant votre programme ***param.m***. La simulation sera lancée en sélectionnant la commande start du menu simulation.

3. Régulation de débit

3.1. Réglage avec un correcteur P

L'asservissement du débit de la vanne est défini à la figure 5.3. Le système est en boucle fermée avec un correcteur proportionnel de gain K_p, c'est-à-dire, $C(s) = K_p$.

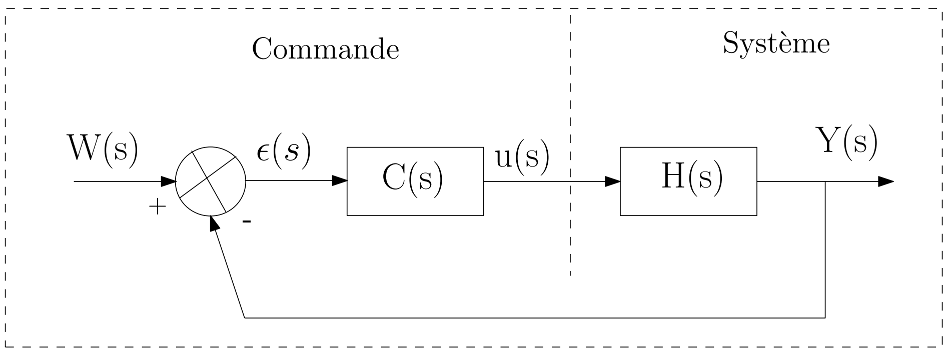


FIGURE 5.3: Asservissement de débit

— Calculer les pôles en boucle fermée pour $K_p = 1$. Que peut-on dire de la stabilité du système.

— Pour différentes valeurs de $K_p = 1, 2, 3, 4$, tracer les réponses indicielles du système $H_{bf}(s)$ en boucle fermée et comparer les à celle obtenue en boucle ouverte.

3.2. Réglage avec un correcteur PD

Pour obtenir de meilleures performances dynamiques, on se propose d'asservir le débit de la vanne avec un correcteur PD de la forme :

$$C(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} \tag{5.4}$$

— Calculer la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(s) = C(s)H(s)$.

Afin d'analyser l'influence d'un tel correcteur sur le temps de réponse.

— Déterminer la valeur de K_p, $T_(d)$ et T_f (par la méthode de compensation pôle/zéro) pour avoir un amortissement $\xi = 0.7$ et atteindre un temps de réponse t_r de $20s$ en boucle fermée. On impose $\xi = 0.7$ et on fixe un temps de réponse $t_r = 3/(\xi\omega_0)$.

Remarque

On obtient en boucle fermée un système du deuxième ordre générique :

$$H(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{5.5}$$

ξ : le coefficient d'amortissement et ω_0 : pulsation propre du système

— Tracer la réponse du système corrigé et comparer la à celle obtenue avec un correcteur P pour $K_p = 4$. Conclusion.

Références bibliographiques

[1] J. Fernández de Cañete, et al, Automatic Control Systems in Biomedical Engineering, Springer International Publishing (2018).

[2] D. Lannoy, Optimisation de la qualité et de l'efficacité des dispositifs médicaux de perfusion simple et complexe. Sciences du Vivant. Université du Droit et de la Santé - Lille II, 2010.

[3] Z. Khan Jadoon, et al, A Comparative Analysis of PID, Lead, Lag, Lead-Lag, and Cascaded Lead Controllers for a Drug Infusion System, Journal of Healthcare Engineering, 2017.

[4] G. Morel, cours robotique chirurgicale, septembre 2014 – Guillaume.Morel@upmc.fr.

[5] P. Prouvost, 'Automatique contrôle et régulation : cours, exercices et problèmes corrigés', Dunod (2010).

[6] Y. Granjon, 'Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état : Cours et exercices corrigés', Dunod (2010).

[7] P. Prouvost, 'Instrumentation et régulation en 30 fiches BTS', Dunod (2010).

[8] B. Le Ballais ; Matlab/Simulink, Application à l'automatique linéaire, ellipse (2001).

[9] M. Etique, cours : Régulation automatique (REG), HEIG-VD, (2014).