`UFA Sétif 1, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences.`
`Master I : Optimisation et contrôle. Module d'Analyse Matricielle.`

Interrogation écrite

Q 1.
a) Soient A et B deux matrices orthogonales. Montrer que le produit AB est aussi une matrice orthogonale.
b) Supposons maintenant que A et B sont des matrices normales de $\mathbb{R}^{n\times n}$. La matrice AB est-elle normale?
Q 2. Soit H une matrice réelle donnée par :

$$H = I - 2uu^T \quad \text{où } u \in \mathbb{R}^n - \{0\}\,.$$

Montrer que H est diagonalisable. Soit $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T \in \mathbb{R}^3$ (u est un vecteur unitaire $u^Tu = 1$), calculer Hu et puis déduire que $\lambda = -1 \in Sp(H)$ avec $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Q 3. Soit la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le spectre de A ($Sp(A)$), est réel et que A est à diagonale strictement dominante. Déduire que A est inversible.
Donner les trois disques de Ghershgorin $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2, 3$ pour localiser $Sp(A)$ et puis déduire à travers les $\mathcal{D}_i$ que A est définie positive.

Bon courage

Correction partielle

Q 1.
a) A et B sont orthogonales alors AB est orthogonale. On a : $AA^T = A^TA = I$ et $BB^T = B^TB = I$. Alors $AB(AB)^T = ABB^TA^T = I$, donc AB est othogonale.
b) Si maintenant A et B sont normales c'est à dire $AA^T = A^TA$ et $BB^T = B^TB$. On a :

$$AB(AB)^T = ABB^TA^T = AB^TBA^T \neq (AB)^TAB.$$

Donc AB n'est pas normale meme si A et B sont normales.
Q2.
Il est facile de vérifier que la matrice H est normale car elle symétrique réelle. Donc d'après le Lemme de Schur, H est diagonalisable.
Calcul de Hu avec $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$H = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc avec un simple calcul, on trouve :

$$Hu = -u.$$

Ce qui montre que $\lambda = -1$ est une valeur propre de H associe au vecteur propre unitaire u.
Q 3. Soit la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme A est symétrique réelle donc elle est hermitienne et par conséquent son spectre est réel. (Voirs le cours).
En effet A est à diagonal strictement dominante car :

$$|a_{11}| = 2 > 1, |a_{22}| = 2 > 1.5, |a_{33}| = 3 > 1.5.$$

Alors si A est à diagonal strictement dominate, A est inversible.
Par un simple calcul les trois disques de Guershgorin pour localiser les valeurs propres de A sont donnés par les intervalles suivants :

$$\mathcal{D}_1 = [1,3], \mathcal{D}_2 = [0.5, 3.5], \mathcal{D}_3 = [1.5, 4.5].$$

Alors $\mathrm{Sp}(A)$ est inclu dans l'union des disques i.e., dans l'intervalle $[0.5, 4.5]$. Comme A est symétrique réelle et $\mathrm{Sp}(A)$ est inclu dans l'intervalle $[0.5, 4.5]$, ceci montre que les valeurs propres de A, $\lambda \in [0.5, 4.5]$ i.e.,λ sont strictement positives et par conséquent A est définie positive.