Université Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Physique
Le 15/01/2015 à 11h45

Année Universitaire 2014/2015
LMD Sciences de la Matière

Durée : 1h30min

Examen de contrôle en Maths1

Exercice 1 (4 pts)
Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4^n + 2 \text{ est divisible par } 3$$

(a divisible par 3 veut dire $a = 3q$, $q \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 2 (5 pts)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\alpha |x|}, & x \neq 0 \\ \alpha + 2, & x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^*$ de manière à ce que f soit continue en 0 à gauche? à droite?
2. f est-elle continue en 0?

Exercice 3 (5 pts)
Montrer que l'ensemble $A = \{\dfrac{1+2m}{1+2n} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{Q}^*, \times)$, ($\times$ est la multiplication usuelle dans $\mathbb{Q}^*$).

Exercice 4 (6 pts)
Soit f une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y, z - t, 0)$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $Kerf$ et Imf.
3. Déduire une base B_1 de $Kerf$ et une base B_2 de Imf.
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Bon courage à tous!

Exercice 1 (4 pts)
Soit $P(n)$ la proposition : $4^n + 2$ est divisible par 3
1. Pour $n = 0$, on $4^0 + 2 = 3$ est divisible par 3 donc $P(0)$ est vraie.
2. On suppose que $P(n)$ est vraie, donc $4^n + 2 = 3q$, $q \in \mathbb{N}^*$ et on démontre que $P(n+1)$ est vraie, c.à.d. $4^{n+1} + 2$ est divisible par 3? on a

$$4^{n+1} + 2 = 4 \times 4^n + 2 = 4 \times (3q - 2) + 2 = 12q - 6 = 3(4q - 2) = 3q' \text{ tel que } q' = 4q - 2 \in \mathbb{N}^*$$

donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 4^n + 2$ est divisible par 3.

Exercice 2 (5 pts)
1. On a $f(0) = \alpha + 2$ et

$$f \text{ est continue à gauche en } 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{-\alpha x} \right) = -\frac{1}{\alpha}$, donc

$$\begin{aligned} f \text{ est continue à gauche en } 0 &\Longleftrightarrow -\frac{1}{\alpha} = \alpha + 2 \\ &\Longleftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\alpha + 1)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha = -1 \end{aligned}$$

alors f est continue à gauche en 0 si et seulement si $\alpha = -1$.
Et

$$f \text{ est continue à droite en } 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{\alpha x} \right) = \frac{1}{\alpha}$, donc

$$\begin{aligned} f \text{ est continue à droite en } 0 &\Longleftrightarrow \frac{1}{\alpha} = \alpha + 2 \\ &\Longleftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha = -1 - \sqrt{2} \text{ ou } \alpha = -1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

alors f est continue à droite en 0 si et seulement si $\alpha \in \left\{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\right\}$
2. On a $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = -\frac{1}{\alpha}$ et $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{\alpha}$, d'où $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$ donc f est discontinue en 0.

Exercice 3 (5 pts)

A est un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{Q}^*, \times) \Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ \ 1 \in A \\ (2)\ \ \forall p, q \in A : pq \in A \\ (3)\ \ \forall p \in A : \dfrac{1}{p} \in A \end{cases}$

(1) Pour $m = n = 0$ on a $1 = \dfrac{1+2\times 0}{1+2\times 0} \in A$

(2) $p, q \in A \Longrightarrow \exists m, n, m', n' \in \mathbb{Z} : pq = \dfrac{1+2m}{1+2n} \times \dfrac{1+2m'}{1+2n'} = \dfrac{1+2m''}{1+2n''} \in A$, tel que $m'' = m + m' + 2mm'$ et $n'' = n + n' + 2nn'$

(3) $p \in A \Longrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : p = \dfrac{1+2m}{1+2n}$ d'où $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1+2n}{1+2m} \in A$

$(1) \wedge (2) \wedge (3) \Longrightarrow A$ est un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

Exercice 4 (6 pts)

Soit f une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y, z - t, 0)$$

1. f une application de $\mathbb{R}^4 \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall (x, y, z, t), (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ (1)\ \ f[(x, y, z, t) + (x', y', z', t')] = f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t') \\ (2)\ \ f[\alpha(x, y, z, t)] = \alpha f(x, y, z, t) \end{cases}$

$$\begin{aligned} (1)\ \ f[(x, y, z, t) + (x', y', z', t')] &= f(x + x', y + y', z + z', t + t') \\ &= (x + x' - y - y', z + z' - t - t', 0) \\ &= (x - y, z - t, 0) + (x' - y', z' - t', 0) \\ &= f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t') \\ (2)\ \ f[\alpha(x, y, z, t)] &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha t) \\ &= (\alpha x - \alpha y, \alpha z - \alpha t, 0) \\ &= \alpha(x - y, z - t, 0) \\ &= \alpha f(x, y, z, t) \end{aligned}$$

De (1) et (2), on déduit que f est une application de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}^3$.

2.

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y, z, t) : f(x, y, z, t) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z, t) : (x - y, z - t, 0) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z, t) : x = y, z = t\} \\ &= \{(x, x, z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1) : x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{vect}\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\ &\Longrightarrow \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\} \text{ est génératrice de } \ker f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \left\{f(x,y,z,t) : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\right\} \\
&= \left\{(x-y, z-t, 0) : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\right\} \\
&= \left\{(x-y,0,0) + (0,z-t,0) : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\right\} \\
&= \{x'(1,0,0) + y'(0,1,0) : x' = x-y \text{ et } y' = z-t\} \\
&= \operatorname{vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\} \\
&\Longrightarrow \{(1,0,0),(0,1,0)\} \text{ est génératrice de } \operatorname{Im} f
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\alpha(1,1,0,0) + \beta(0,0,1,1) &= (0,0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0 \\
&\Longrightarrow \{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\} \text{ est libre} \\
&\Longrightarrow B_1 = \{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\} \text{ est une base de} \ker f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) &= (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0 \\
&\Longrightarrow \{(1,0,0),(0,1,0)\} \text{ est libre} \\
&\Longrightarrow B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \text{ est une base de} \operatorname{Im} f
\end{aligned}$$

4. On a

$$\ker f \neq \{(0,0,0,0)\} \text{ donc } f \text{ n'est pas injective}$$

$$\dim \operatorname{Im} f = 2 < 3 \Longrightarrow \operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$$

donc f n'est pas surjective. On déduit que f n'est pas bijective.