

EXERCICE

Étapes à suivre pour démontrer l'inégalité de Minkowski.

1) En remarquant que la fonction $\log$ est une fonction concave i.e.:

$\forall x \geq 0, y \geq 0$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$ on a:

$$\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \log x + (1-\lambda) \log y.$$

Montrer que $\forall a \geq 0, b \geq 0$ et $\forall p \geq 1, q \geq 1$
tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors,

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2) déduire de (1) que, $\forall a_i \geq 0, b_i \geq 0, i=1, n$,

si $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$, alors $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$.

3) déduire de (2) que,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(Inégalité de Hölder)

4) En remarquant que $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$ et en appliquant l'inégalité (3) de Hölder, montrer que,

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Inégalité de Minkowski)