REPUPLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ferhat ABBAS Sétif1

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Polycopié de cours

Module : Physique2
Électricité

Réalisé par : *Dr. BOUKELKOUL Mebarek*

2018/2019

Sommaire

Chapitre 1 : Rappel mathématique

I. Longueurs, surfaces et volumes élémentaires

II. Opérateurs vectoriels

Chapitre 2 : Électrostatique

Densité de charges électriques

Interactions électrostatiques

Champ et potentiel électrostatiques

Théorème de Gauss

Dipôle électrique

Chapitre 3 : Les conducteurs

Applications des conducteurs

Les condensateurs

Chapitre 4 : L'électrocinétique

Circuit électrique

Chapitre 5 : Magnétostatique

Chapitre 1
Rappel mathématique

Chapitre 1 : Rappel mathématique

I. Longueurs, surfaces et volumes élémentaires

1) En coordonnées cartésiennes

a) Longueurs élémentaires

$$dl = dx = dy = dz$$

b) Surfaces élémentaires

$$dS = dx.dy = dx.dz = dy.dz$$

c) Volume élémentaire

$$dV = dx.dy.dz$$

2) En coordonnées cylindriques

a) Longueurs élémentaires

$$dl = d\rho = \rho d\theta = dz$$

b) Surfaces élémentaires

$$dS = \rho d\theta dz = d\rho.dz = \rho d\theta d\rho$$

c) Volume élémentaire

$$dV = \rho d\theta d\rho dz$$

3) En coordonnées sphériques

d) Longueurs élémentaires

$$dl = dr = rd\theta = rsin\theta d\varphi$$

e) Surfaces élémentaires

$$dS = rdrd\theta = rsin\theta drd\varphi = r^2 sin\theta \rho d\theta d\varphi$$

f) Volume élémentaire

$$dV = r^2 sin\theta drd\theta d\varphi$$

Application

En utilisant les longueurs, les surfaces et les volumes élémentaires, Calculer :

- Le périphérique *P* d'un cercle de rayon *R*.
- La surface latérale *S* d'un cylindre de rayon *R* et de hauteur *z=h.*
- Le volume *V* d'une sphère de rayon *R*.

Solution

- Le périphérique du cercle

$$dl = R.d\theta$$

$$P = \int dl = \int_0^{2\pi} R.d\theta = 2\pi R$$

- La surface latérale du cylindrique

$$dS = Rd\theta dz$$

$$S = \iint dS = \oiint_{0\ 0}^{2\pi\ h} Rd\theta dz = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = [\theta]_0^{2\pi}.[z]_0^h = 2\pi Rh$$

- Le volume de la sphère

$$dV = r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$V = \iiint dV = \oiiint_{0\ 0\ 0}^{R\ \pi\ 2\pi} r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2\, dr \int_0^\pi sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R [-cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

II. Les opérateurs vectoriels

Le gradient

Soit U une fonction (un champ scalaire)

1) En coordonnée cartésiennes : $U = U(x, y, z)$

$$\overrightarrow{grad}U(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

2) En coordonnées cylindriques : $\boldsymbol{U = U(\rho, \theta, z)}$

$$\overrightarrow{grad}U(\rho,\theta,z) = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

3) En coordonnées sphériques : $\boldsymbol{U = U(r, \theta, \varphi)}$

$$\overrightarrow{grad}U(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Remarque

Si $\overrightarrow{grad}U = \vec{A} \quad \Rightarrow \quad U = \int \vec{A}.\overrightarrow{dl}$

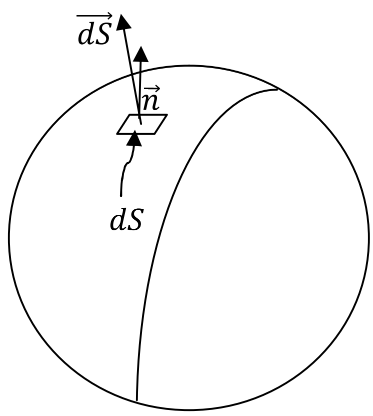
III. Flux d'un champ vecteur à travers une surface fermée

1) Vecteur élément de surface

a) Surface fermée

Une surface fermée délimite un volume fini de l'espace (sphère, cylindre…).

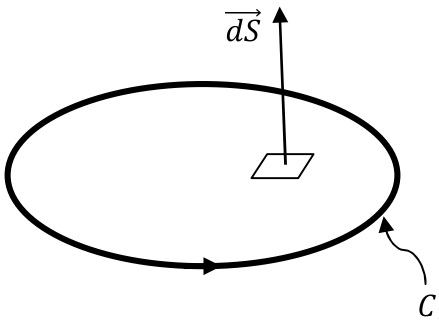
Pour ce type de surface il y'a deux régions : l'intérieur de S et l'extérieur de S. le vecteur élément de surface est orienté vers l'extérieur.



$$\boldsymbol{\overrightarrow{dS} = dS.\vec{n}}$$

b) Surface s'appuyant sur un contour

Pour une surface s'appuyant sur un contour fermé, il suffit d'orienter le contour pour définir le sens du vecteur normal à la surface en utilisant la règle de la main droite.

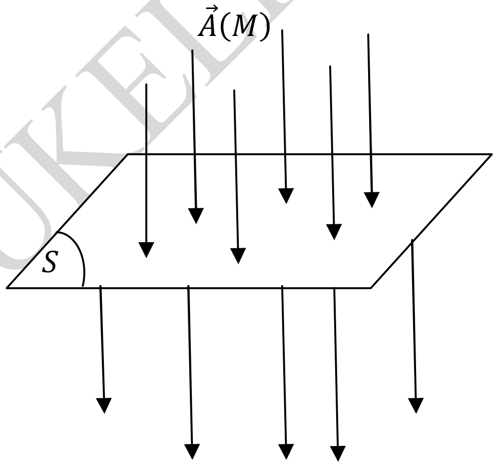


2) Flux d'un champ vecteur à travers une surface

Flux élémentaire

Le flux élémentaire $d\phi$ d'un champ vecteur $\vec{A}(M)$ à travers une surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$ située en un point M est par définition le produit scalaire de $\vec{A}(M)$ par $\overrightarrow{dS}$

$$d\phi = \vec{A}(M).\overrightarrow{dS} = \vec{A}(M).\vec{n}.dS$$



Le flux total du champ vecteur $\vec{A}(M)$ à travers la surface S s'obtient par :

$$\phi = \int d\phi = \oiint_S \vec{A}(M).\overrightarrow{dS}$$

Chapitre 2
Électrostatique

Chapitre 2 : Électrostatique

I. Introduction

L'électrostatique est la branche de physique qui étudie les phénomènes (champs, potentiel, forces…) créés par des charges statiques i.e. des charges qui ne sont pas animées d'une vitesse.

Les forces électrostatiques s'exerçant entre ces charges sont gérées par la force de Coulomb qui présente une certaine analogie avec l'interaction gravitationnelle.

II. La charge électrique

La charge électrique est la propriété physique de la matière qui produit les phénomènes électriques et magnétiques. C'est une grandeur scalaire (positive ou négative) mesurée par l'unité : Coulomb.

Par analogie avec l'interaction gravitationnelle, la charge électrique joue le même rôle que celui de la masse.

III. Quantification de la charge électrique

A l'échelle microscopique, l'expérience (Millikan 1910) a montré que la charge électrique est quantifiée i.e. sa valeur est un multiple de la charge élémentaire $e = 1.602.10^{-19}$ C.

N.B : les particules élémentaires sont des constituants (nanoscopiques) de la matière (atomes).

Exemple

Particule	Symbole	Charge	Masse
Electron	e^-	$-e$	$9.11.10^{-31}\ kg$
Proton	p^+	$+e$	$1.67.10^{-27}\ kg$
Neutron	n	0	$1.67.10^{-27}\ kg$
Photon	γ	0	0

IV. L'unité de la charge électrique

L'unité de la charge est le coulomb. Elle est définie comme suit :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta q = I.\Delta t$$

$$[q] = [I].[t] = A.T$$

Donc : $1C = 1A.S$ dans le système S.I

En pratique, la valeur du coulomb est considérée très grande d'où la nécessité de travailler avec les fractions du coulomb qui sont :

$1\mu C = 10^{-6}C$

$1nC = 10^{-9}C$

$1pC = 10^{-12}C$

V. Conservation (Invariance) de la charge électrique

La charge électrique est une grandeur physique conservée i.e. la charge totale d'un système n'est pas modifiée par le mouvement de charges. Les charges positives et négatives ne peuvent être créées ni détruites. Elles se déplacent uniquement d'un corps à un autre.

Exemple

Durant une réaction chimique ou physique, on a :

- $Na^+ + Cl^- \rightarrow \underbrace{NaCl}_{sel}$

  $+e + (-e) \rightarrow 0$

- $\underbrace{e^-}_{electron} + \underbrace{p^+}_{proton} \rightarrow \underbrace{n}_{neutron} + \underbrace{\gamma_e}_{neutrino}$

  Dans une interaction, on a

  $\sum q_{init} = \sum q_f$

Densités de charges électriques

I. Introduction

La charge macroscopique Q d'un corps comporte un nombre important *N* de charges élémentaires e telles que $Q = N.e$. Vue la faible dimension de cette charge élémentaire, on considère qu'à l'échelle macroscopique, la répartition *Q* se fait d'une façon continue sur le corps matériel. Cette répartition peut être modélisée par des densités de charges électriques qui dépendent de la géométrie du corps chargé (filiforme, surfacique, volumique).

II. Densité volumique de charges ($\boldsymbol{\rho}$)

Soit un corps matériel de volume *V* chargé par une quantité ρ (uniformément dans le volume).

La densité volumique de charges (charge par unité de volume) notée ρ est donnée par :

$$\rho = \frac{Q}{V} \quad \Rightarrow \quad Q = \rho.V$$

Si la répartition n'est pas uniforme, on considère un élément de volume *dV* contenant la charge *dq* telle que :

$$\rho(M) = \frac{dq}{dV} \quad \Rightarrow \quad dq = \rho(M).dV$$

$$Q = \iiint \rho(M).dV$$

En utilisant la même relation dans le cas où la répartition est uniforme i.e. $\rho(M)$ ne dépend pas de *M* et $\rho(M) = \rho_0$

$$Q = \iiint \rho(M).dV = \rho_0 \iiint dV = \rho_0.V$$

L'unité de ρ est : $C.m^{-3}$.

Remarque :

- En coordonnées cartésiennes : $dV = dx.dy.dz$
- En coordonnées cylindriques : $dV = \rho.d\rho.d\theta.dz$
- En coordonnées sphériques : $dV = r^2.sin\theta.dr.d\theta.d\varphi$

III. Densité surfacique de charges (σ)

Soit un corps matériel de surface *S* portant une charge *Q* répartie uniformément sur la surface.

La densité surfacique de charges (charge par unité de surface) notée σ est donnée par :

$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad \Rightarrow \quad Q = \sigma.S$$

Si la répartition n'est pas uniforme, on considère un élément de surface *dS* contenant la charge *dq* telle que :

$$\sigma(M) = \frac{dq}{dS} \quad \Rightarrow \quad dq = \sigma(M).dS$$

$$Q = \iint \sigma(M).dS$$

En utilisant la même relation dans le cas où la répartition est uniforme i.e. $\sigma(M)$ ne dépend pas de *M* et $\sigma(M) = \sigma_0$

$$Q = \iiint \sigma(M).dS = \rho_0 \iiint dS = \sigma_0.S$$

L'unité de σ est : C.m^{-2}.

Remarque :

- **En coordonnées cartésiennes** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ **:**
  $dS = dx.dy$ dans le plan (xoy)
  $dS = dx.dz$ dans le plan (xoz)
  $dS = dy.dz$ dans le plan (yoz)
- **En coordonnées polaires** $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta})$ **:**
  $dS = \rho.d\rho.d\theta$
- **En coordonnées cylindriques** $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$**:**
  $dS = \rho.d\rho.d\theta$
  $dS = d\rho.dz$
  $dS = \rho.d\theta.dz$
- **En coordonnées sphériques** $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$ **:**
  $dS = r^2.sin\theta.d\theta.d\varphi$
  $dS = r.sin\theta.dr.d\varphi$
  $dS = r.dr.d\theta$

IV. Densité linéique (linéaire) de charges (λ)

Soit un corps matériel unidimensionnel de longueur L portant une charge Q répartie uniformément en longueur.

La densité linéique de charges (charge par unité de longueur) notée λ est donnée par :

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad \Rightarrow \quad Q = \lambda . L$$

Si la répartition n'est pas uniforme, on considère un élément de longueur dL contenant la charge dq telle que :

$$\lambda(M) = \frac{dq}{dL} \quad \Rightarrow \quad dq = \lambda(M). dL$$

$$Q = \int \lambda(M). dL$$

En utilisant la même relation dans le cas où la répartition est uniforme i.e. $\lambda(M)$ ne dépend pas de M et $\lambda(M) = \lambda_0$

$$Q = \int \lambda(M). dL = \lambda_0 \int dl = \lambda_0 . L$$

L'unité de λ est : $C.m^{-1}$.

Remarque :

- **En coordonnées cartésiennes $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$:**
  $dL = dx$ suivant l'axe $(x'ox)$
  $dL = dy$ suivant l'axe $(y'oy)$
  $dL = dz$ suivant l'axe $(z'oz)$
  En coordonnées polaires $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta})$:
  $dL = d\rho$
  $dL = \rho . d\theta$
- **En coordonnées cylindriques $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$:**
  $dL = d\rho$
  $dL = dz$
  $dL = \rho . d\theta$

- **En coordonnées sphériques (r, θ, φ) :**

  $dL = dr$

  $dL = r.sin\theta.d\varphi$

  $dL = r.d\theta$

V. La charge électrique ponctuelle

La charge électrique ponctuelle est la charge portée par un système matériel dont les dimensions sont suffisamment petites.

VI. Applications

Exercices 1

On suppose que la terre est sphérique de rayon $R = 6400\ km$ et porte une charge négative $Q = -10^{-6}$.

1) les charges sont réparties uniformément en surface avec une densité surfacique σ_T . Calculer σ_T.

2) On considère maintenant que les charges négatives sont réparties uniformément dans le sol sur une profondeur $p = 50\ km$.

Quelle est dans ce cas la densité volumique ρ_T ?

Exercice 2

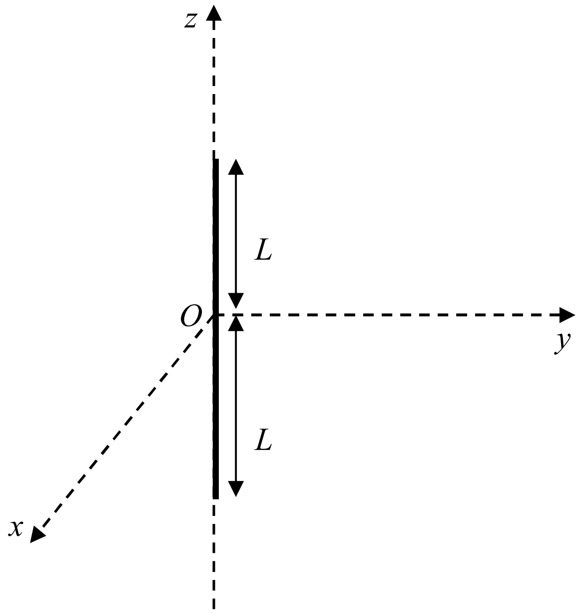
Soit un fil de centre O dirigé suivant (oz), de longueur 2L portant une charge Q répartie linéairement (figure ci-dessous).

1) Donner l'expression de la densité linéique de la charge moyenne λ_{moy} si l'on suppose que la répartition est uniforme.

2) Cette distribution de charges n'est pas uniforme et suit la loi :

$$\lambda(z) = \begin{cases} \lambda_0 cos\frac{\pi z}{2L} & pour\ |z| \leq L \\ 0\ pour\ |z| > L \end{cases}$$

Exprimer la charge élémentaire *dq* située en z sur une portion de fil *dz*. En déduire l'expression de λ_0 en fonction de *Q* et *L*.



Solutions

Exercice 1

1) $\sigma_T = \frac{Q_T}{S}$ avec $S = 4\pi R^2$

$$\sigma_T = \frac{Q_T}{4\pi R^2} = -1.94\ C.m^{-2}$$

2) $\rho_T = \frac{Q_T}{V}$ avec $V = V_T - V_p$

$$V_T = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_p = \frac{4}{3}\pi (R-P)^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi [R^3 - (R-P)^3]$$

$$\rho_T = -3.9.10^{-14} C.m^{-3}$$

Exercice 2

1) $\lambda_{moy} = \frac{Q}{2L}$

2) $dq = \lambda(z).dL = \lambda_0.cos\frac{\pi z}{2L}dz$

$$Q = \int dq = \int_{-L}^{+L} \lambda_0.cos\frac{\pi z}{2L}dz = \left[\frac{2\lambda_0 L}{\pi}.sin\frac{\pi z}{2L}\right]_{-L}^{+L} = \frac{2\lambda_0 L}{\pi}\left[sin\frac{\pi L}{2L} - sin\left(\frac{-\pi L}{2L}\right)\right]$$

$$Q = \frac{4\lambda_0 L}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{\pi}{4L}Q$$

Interactions électrostatiques

I. Force électrostatique (loi de Coulomb 1785)

Enoncée de la loi de Coulomb pour des charges ponctuelles : la force électrostatique entre deux charges ponctuelles est proportionnelle à la valeur des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Cette interaction est portée par la droite qui joint les deux charges. Si les charges sont de mêmes signes, il y'a répulsion et si elles sont de signes contraires, il y'a attraction.

La loi de Coulomb

Pour la formulation mathématique de la loi de Coulomb, on considère deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées respectivement aux oints M_1 et M_2 telle que la distance $M_1M_2 = r$.

La force électrostatique $\vec{F}_{12}$ exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est donnée par :

$$\vec{F}_{12} = K\frac{q_1.q_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

Où

$$\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}$$

La constante de proportionnalité : $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ Nm^2C^{-2}$.

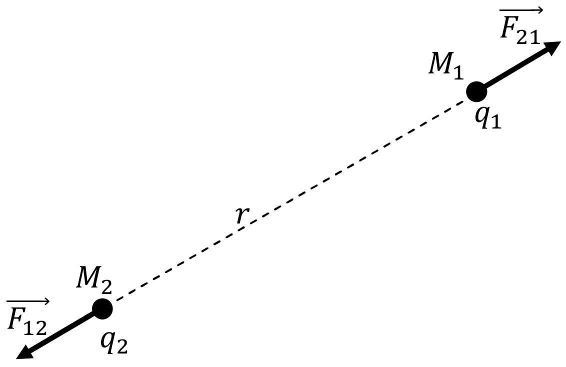
Elle dépend des unités choisies et la nature du milieu contenant les charges. En effet :

- Dans le vide : $\varepsilon = \varepsilon_0$.
- Dans un milieu qui diffère du vide : $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ où ε_r la permittivité relative du milieu considéré.

De la même façon, la charge q_2 exerce une force $\vec{F}_{21}$ sur la charge q_1 telle que :

$$\vec{F}_{21} = K\frac{q_2.q_1}{(M_1M_2)^2}\vec{u}_{21} = K\frac{q_2.q_1}{r^2}\vec{u}_{21}$$

Il est claire que : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (3$^{\text{ème}}$ loi de Newton : principe des actions réciproques)



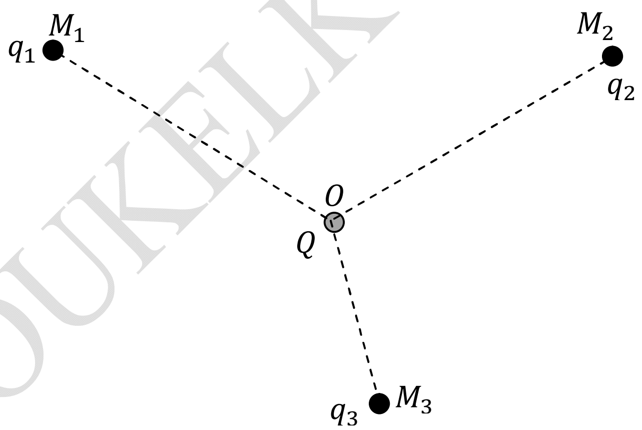
Principe de superposition des forces

Enoncée : la force électrostatique appliquée sur une charge q_k par *N* charges ponctuelle est la résultante vectorielle des forces individuelles appliquées par chaque charge.

$$\vec{F}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{i=N} \vec{F}_{ik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{i=N} \frac{q_i . q_k}{r^2{}_{ik}} \vec{u}_{ik}$$

Exemple

Soit la répartition des charges de la figure ci-dessous :



Calculer la force électrostatique appliquée sur la charge *Q* au point *O* :

La force électrostatique subie par la charge Q en O est :

$$\vec{F}_Q = \vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O} + \vec{F}_{3O} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 . Q}{(M_1 . O)^2}\vec{u}_{1O} + \frac{q_2 . Q}{(M_2 . O)^2}\vec{u}_{2O} + \frac{q_3 . Q}{(M_3 . O)^2}\vec{u}_{3O}\right]$$

$$\vec{F}_Q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{(M_1 . O)^2}\vec{u}_{1O} + \frac{q_2}{(M_2 . O)^2}\vec{u}_{2O} + \frac{q_3}{(M_3 . O)^2}\vec{u}_{3O}\right]$$

Champ et potentiel électrostatiques

I. Introduction

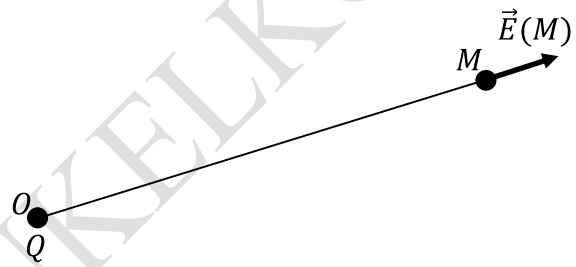
En électrostatique, les effets générés par un corps chargé sont décrits par deux grandeurs mathématiquement interdépendantes l'une est un champ vectoriel (champ électrique) et l'autre représente un champ scalaire (potentiel électrique).

La connaissance de ces deux grandeurs en tout point de l'espace permet de décrire toutes les perturbations électrostatiques induites par le corps chargé dans son environnement et par conséquent toutes les actions subies par les charges avoisinantes.

II. Champ électrique créé par une charge ponctuelle

Le champ électrostatique créé en un point *M* de l'espace par une charge ponctuelle *Q* placée en point *O* est défini par :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(O.M)^2}\vec{u}_{OM}$$



La force subie par une charge test placée au point *M* s'exprime par :

$$\vec{F}(M) = q.\vec{E}(M)$$

Principe de superposition des champs électriques

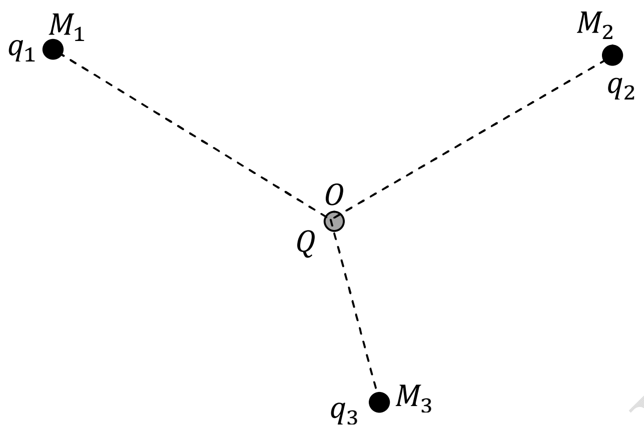
Le champ électrique créé en point *O* par *N* charges ponctuelles est la résultante vectorielle des champs individuels créés par toutes les charges.

$$\vec{E}(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{i=N}\frac{q_i}{(M_iO)^2}\vec{u}_{MiO} = \sum_i \vec{E}_i$$

N.B : l'unité du champ électrique est le $Volt/m$

Exemple

Soit la répartition des charges de la figure ci-dessous :



Calculer la force électrostatique appliquée sur la charge Q au point O :

La force électrostatique subie par la charge Q en O est :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1(O) + \vec{E}_2(O) + \vec{E}_3(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{(M_1.O)^2}\vec{u}_{M_1O} + \frac{q_2}{(M_2.O)^2}\vec{u}_{M_2O} + \frac{q_3}{(M_3.O)^2}\vec{u}_{M_3O}\right]$$

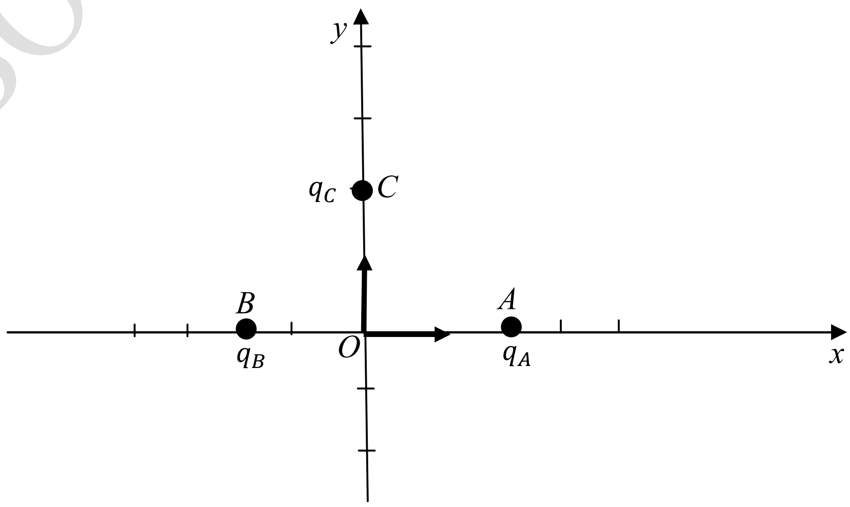
Application

Soient les charges q_A, q_B, q_C telles que $q_A = q_B = 2q$ et $q_C = -q$ $(q > 0)$. (figure ci-dessous)

1) Calculer la force exercée par q_A sur q_C.

2) Calculer la force exercée sur q_A par les autres charges.

3) Calculer le champ électrostatique au point O $\vec{E}(O)$.



Solution

1)

$$\vec{F}_{AC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_A.q_C}{(AC)^2}\vec{u}_{AC}$$

$$\vec{u}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{-2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

$$\vec{F}_{AC} = \frac{q^2}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

2) $\vec{F}_A = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA} = \vec{F}_{BA} - \vec{F}_{AC}$

$$\vec{F}_{BA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B.q_A}{(BA)^2}\vec{u}_{BA}$$

$$\vec{u}_{BA} = \vec{\imath}$$

$$\vec{F}_{BA} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\vec{\imath}$$

Donc

$$\vec{F}_A = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}\right]$$

3) Le champ électrostatique $\vec{E}(O)$ au point *O*.

$\vec{E}(O) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$ (principe de superposition)

$$\vec{E}(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_A}{(AO)^2}\vec{u}_{AO} + \frac{q_B}{(BO)^2}\vec{u}_{BO} + \frac{q_B.q_A}{(CO)^2}\vec{u}_{CO}\right]$$

$$\vec{E}(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2q}{4}(-\vec{\imath}) + \frac{2q}{4}\vec{\imath} + \frac{-q}{(CO)^2}(-\vec{\jmath})\right]$$

$$\vec{E}(O) = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0}\vec{\jmath}\ V/m$$

Potentiel électrostatique

I. Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle Q soumise à une force électrostatique $\vec{F}$ exercée par une autre charge ponctuelle q.

D'après les lois de la mécanique, la variation de l'énergie potentielle dans le cas d'une force conservative est donnée par :

$$\Delta E_P = -W(\vec{F}_C) = -\int \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Puisque la force électrique est conservative et par analogie, on peut définir l'énergie potentielle électrostatique telle que :

$$\underbrace{\Delta U}_{électrostatique} = \underbrace{\Delta E_P}_{mécanique}$$

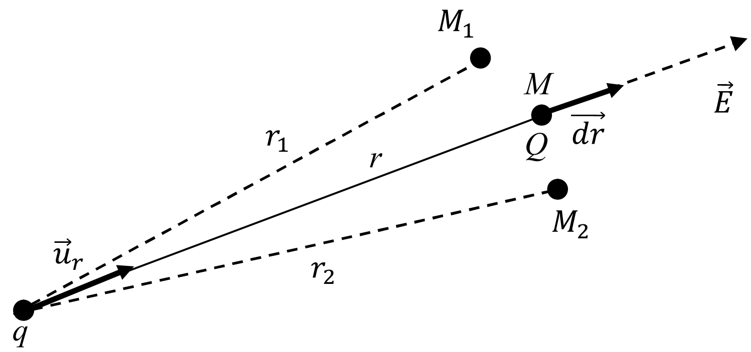
Donc

$$-dU = \vec{F}_{elc}.\overrightarrow{dl}$$

$$\vec{F}_{elc} = q.\vec{E}(M) = q.\vec{E}$$

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr}$$

$$-\Delta U = \int -dU = \int \vec{F}_{elc}.\overrightarrow{dl} = \int q.E.dr \qquad car\ (\vec{E} \parallel \overrightarrow{dr})$$



$$\Rightarrow \qquad -[U(M_2) - U(M_1)] = \int_{M_1}^{M_2} dU = \int_{r_1}^{r_2} q.K\frac{Q}{r^2}dr = KqQ\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr$$

Alors

$$U(M_1) - U(M_2) = KqQ\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = KqQ\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$$\frac{U(M_1)}{q} - \frac{U(M_2)}{q} = \frac{KQ}{r_1} - \frac{KQ}{r_2}$$

On pose :

$$V = \frac{U}{q}$$

Donc

$$V_1 - V_2 = \frac{KQ}{r_1} - \frac{KQ}{r_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = \dfrac{KQ}{r_1} \\ V_2 = \dfrac{KQ}{r_2} \end{cases}$$

Dans le cas général, on déduit :

$$V(r) = \frac{KQ}{r} + cte$$

A l'infini, le potentiel est considéré nul, d'où

$$V(r \to \infty) = 0 \ \Rightarrow cte = 0$$

Alors, le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle *Q* en un point *M* distant de *Q* par *r* est donné par :

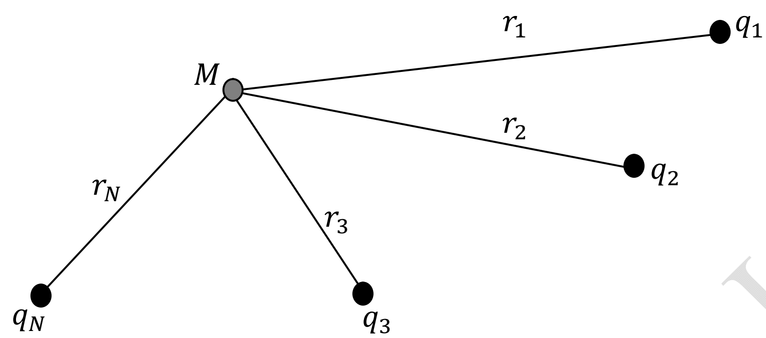
$$\boldsymbol{V(r) = \frac{KQ}{r}}$$

Il est claire que *:* si $Q < 0 \ \Rightarrow \ V(r) < 0$

si $Q > 0 \ \Rightarrow \ V(r) > 0$

II. Principe de superposition des potentiels électrostatiques

Enoncée : le potentiel électrostatique créé en un point *M* par *N* charges ponctuelles Q_i *;* est la somme algébrique des potentiels individuels créés par chaque charge.



$$V(M) = V_1 + V_2 + - - - - - V_3$$

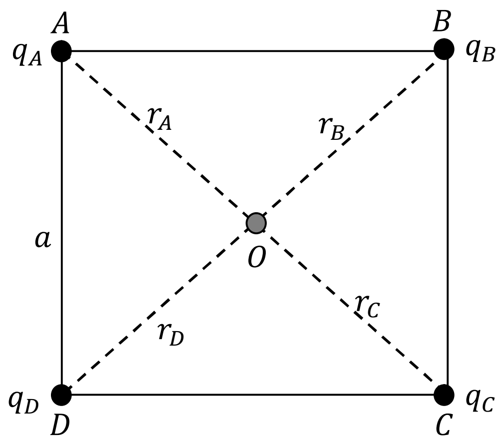
$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{KQ_i}{r_i} = \sum_{i=1}^{N} V_i$$

L'unité du potentiel est le volt *V*.

III. Application

Quatre charges ponctuelles identiques $q_A = q_B = q_C = q_D = -q \quad (q > 0)$ sont fixées aux sommets *A, B, C, D* d'un carré de côté *a*.

Calculer le potentiel électrostatique au centre *O* du carré.



Solution

D'après le schéma, on a

$$r_A = r_B = r_C = r_D = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$V(O) = V_A + V_B + V_C + V_D \quad (principe\ de\ superposition)$$

$$V(O) = \frac{Kq_A}{r_A} + \frac{Kq_B}{r_B} + \frac{Kq_C}{r_C} + \frac{Kq_D}{r_D} = \frac{-4\sqrt{2}Kq}{a} \quad Volts$$

IV. Relation entre le champ et le potentiel électrostatiques

On a

$$-\Delta U = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = q.\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$\frac{-\Delta U}{q} = \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$-dV = \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

On sait que : $dV = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl}$

$$-\overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl} = \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Donc

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl}}\\ \boldsymbol{dV(M) = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} \quad \Rightarrow \quad V(M_1) - V(M_2) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}.\overrightarrow{dl}}\end{gathered}}$$

Application

Soit le potentiel électrostatique *V(x,y,z)* donnée par :$V(x,y,z) = x^2 + xyz - 2yz^2$

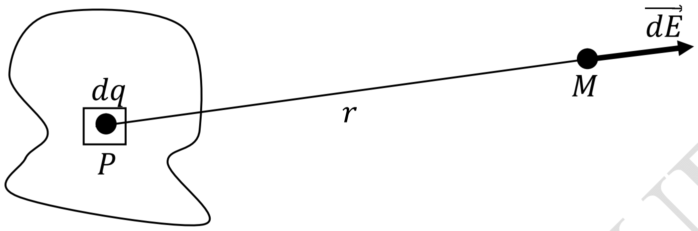
Trouver l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(x,y,z)$

$$\vec{E}(x,y,z) = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{z}\vec{k}$$

$$\vec{E}(x,y,z) = -(2x + yz)\vec{\imath} - (xz - 2z^2)\vec{\jmath} - (xy - 4yz)\vec{k}$$

V. Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution continue de charges

Si la distribution de charges est continue, on la décomposera en charges élémentaires *dq,* chacune étant définie autour d'un point *P*.



Le champ électrostatique élémentaire créé par *dq* en un point *M* est donnée par :

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(PM)^2}\vec{u}_{PM}$$

Si l'on pose : $PM = r$

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_{PM}$$

Le champ électrostatique total est la somme continue

$$\vec{E}(M) = \int \overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\vec{u}_{PM}$$

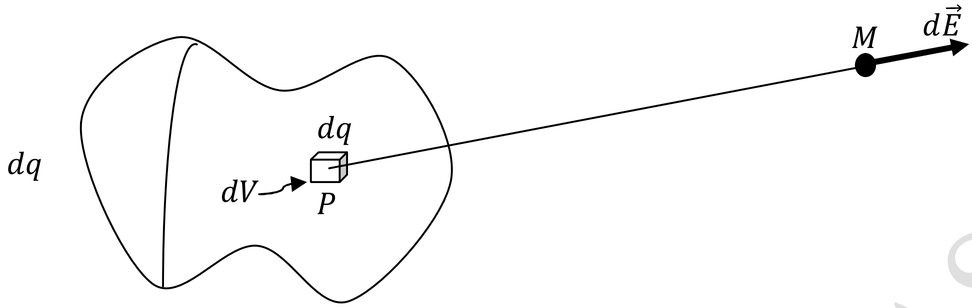
De la même façon, le potentiel élémentaire $dV(M)$ créé en M par dq s'écrit (avec un potentiel nul à l'infini) :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Le potentiel électrostatique total est la somme continue

$$V(M) = \int dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

1) Cas d'une distribution volumique de charges



$$\vec{E}(M) = \int \overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{(PM)^2}\vec{u}_{PM}$$

$$dq = \rho dv$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(M).\vec{u}_{PM}}{(PM)^2}dv$$

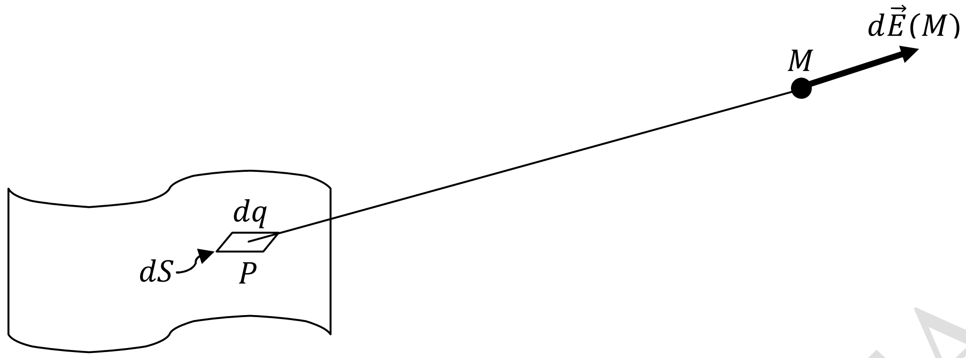
De la même façon, le potentiel est donné par :

$$V(M) = \int dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(M)}{PM}dv$$

Si la distribution est uniforme i.e. $\rho(M) = cte = \rho_0$, on aura :

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \dfrac{dv}{(PM)^2}\vec{u}_{PM} \\ V(M) = \dfrac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \dfrac{dv}{PM} \end{cases}$$

2) Cas d'une distribution surfacique de charges



$$dq = \sigma dS$$

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(M).dS}{(PM)^2}\vec{u}_{PM}$$

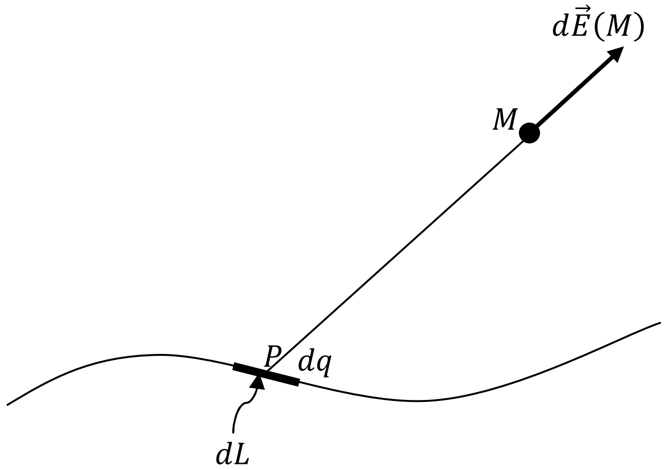
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma(M).dS}{(PM)^2}\vec{u}_{PM}$$

De la même façon, le potentiel s'écrit

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(M)dS}{PM}$$

$$V(M) = \int dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma(M).dS}{PM}$$

3) Cas d'une distribution linéique de charges



Par analogie, on obtient

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda(M).dL}{(PM)^2}\vec{u}_{PM}$$

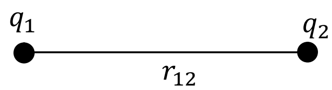
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda(M)dL}{PM}$$

Remarque

Dans le cas d'une distribution uniforme : $\rho(M), \sigma(M), \lambda(M)$ sont prises constantes.

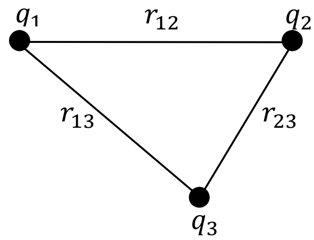
4) Energie potentielle (interne) d'une distribution de charges ponctuelles

Cas de deux charges



$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1.q_2}{r_{12}}$$

Cas de trois charges



$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 . q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 . q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 . q_3}{r_{23}}\right)$$

Cas de N charges

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i . q_j}{r_{ij}}$$

N.B : le coefficient $\frac{1}{2}$: pour ne pas compter deux fois la même interaction.

VII. Lignes de champ

Les lignes de champ son les courbes où à chaque point le champ électrique est tangent.

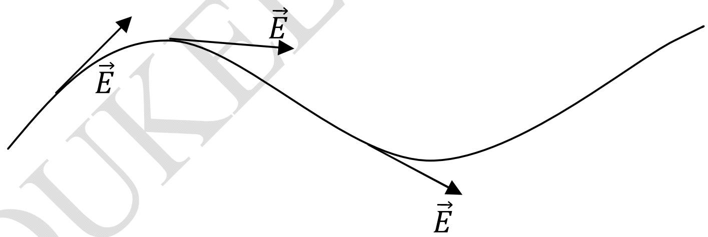
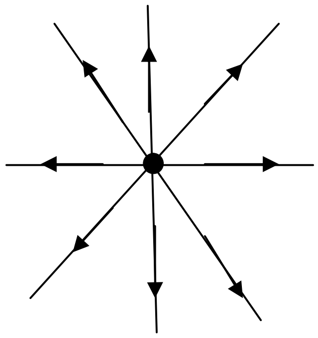


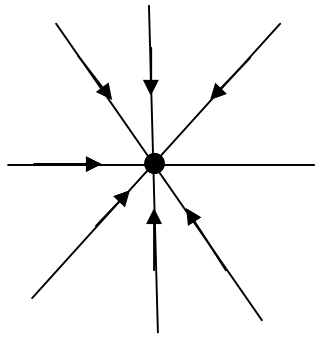
Illustration des lignes de champ

Dans le cas d'une charge ponctuelle, les lignes de champ sont des droites qui convergent ou divergent de la position de la charge responsable du champ. Le champ électrique est alors à symétrie sphérique (toutes les directions son équivalentes).

- Si la charge est positive, les lignes de champ divergent du point source vers l'infini (champ divergent).
- Si la charge est négative, les lignes de champ convergent vers le point source (champ convergent).



$q > 0$



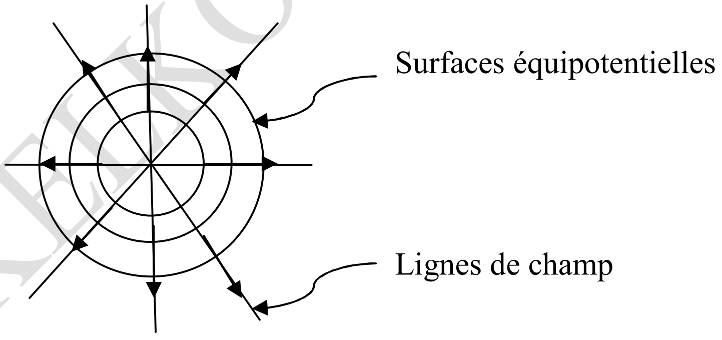
$q < 0$

N.B : le faisceau des lignes de champ définit une cartographie du champ électrique.

Les équipotentielles (surfaces équipotentielles)

Une surface équipotentielle est une surface où à chaque point, le potentiel prend la même valeur.

Les surfaces équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ.



Théorème de Gauss

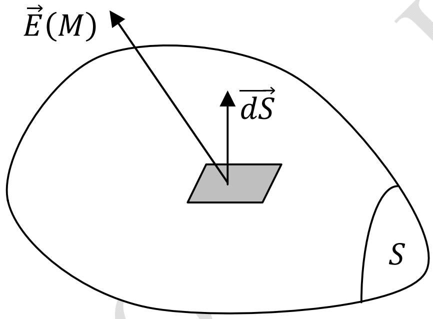
I. Flux du champ électrique

Le flux élémentaire du champ électrique à travers l'élément de surface $\overrightarrow{dS}$ est donné par :

$$d\phi = \vec{E}(M).d\vec{S}$$

Le flux total du champ électrique à travers la surface fermée *S* est :

$$\phi = \int d\phi = \oiint_S \vec{E}(M).d\vec{S}$$



II. Théorème de Gauss

Lorsque la distribution de charges possède une symétrie quelconque (sphérique, cylindrique…), le théorème de Gauss est un outil mathématique très puissant qui permet de relier le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée appelée '*surface de Gauss (S.G)'* avec la charge électrique qui se trouve à l'intérieur de cette surface.

Si l'on note par Q_{int} la charge se trouvant à l'intérieur de cette surface, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

ε_0 est la permittivité diélectrique du milieu.

Cas particuliers

- Si $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface : $\vec{E} \parallel d\vec{S}$, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_{S.G} E.dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- La surface de Gauss est une surface équipotentielle où à chaque point le champ $\vec{E}$ est constant. On peut écrire alors :

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_{S.G} E.dS = E \oiint_{S.G}.dS = E.S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

III. Application

Soit une sphère de rayon R portant une charge positive répartie sur sa surface avec une densité surfacique uniforme σ.

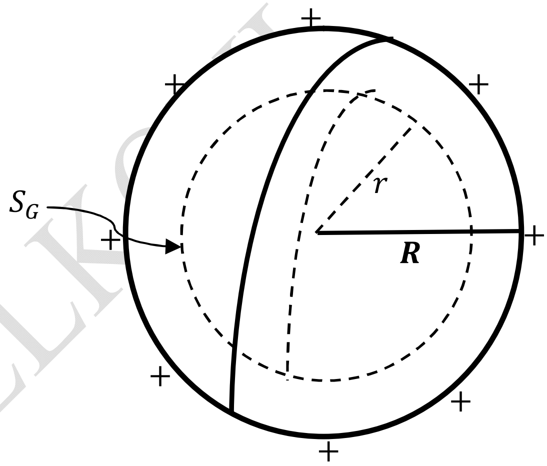
En appliquant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

En déduire le potentiel électrostatique dans les deux cas précédents.

Solution

1er cas : à l'intérieur de la sphère

Dans ce cas, la surface de Gauss est choisie comme étant la surface d'une sphère de rayon r tel que $r < R$.



En appliquant le théorème de Gauss :

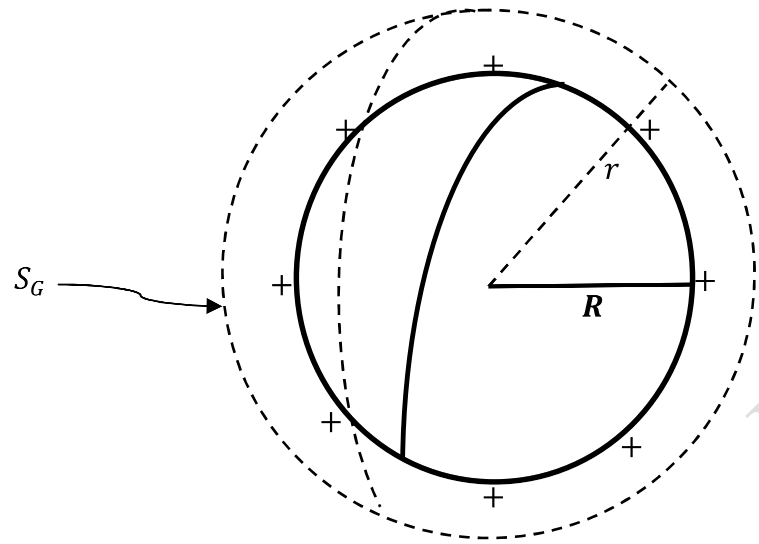
$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{int} = 0$$

$$\oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.S_G \qquad \Rightarrow \qquad E.S_G = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} S_G \neq 0 \\ E_{int} = 0 \end{cases}$$

2ème cas : à l'extérieur de la sphère

La surface de Gauss est choisie comme étant la surface d'une sphère de rayon *r* tel que $r > R$.



$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Dans ce cas :

$$\oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.S_G = E.4\pi r^2$$

$$Q_{int} = \sigma.S = \sigma.4\pi R^2$$

En appliquant le théorème de Gauss, on aura :

$$E.4\pi r^2 = \frac{\sigma.4\pi R^2}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r)_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Le champ $\vec{E}(r)_{ext}$ a une symétrie radiale, donc il s'écrit :

$$\vec{E}(r)_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$$

3ème cas : à la surface de la surface ($\boldsymbol{r = R}$)

Pour $r = R \quad \Rightarrow \quad E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

1) Le potentiel

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

En coordonnées sphériques, on a : $\overrightarrow{dl} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$

1^er^ cas : à l'intérieur de la sphère : $r < R$

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{int}(r) = cte = C_1$$

2^ème^ cas : à l'extérieur de la sphère : $r > R$

$$dV_{ext} = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -E_{ext}(r).dr = -\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$V_{ext}(r) = \int dV_{ext} = -\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$V_{ext}(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

On a : $V_{ext}(r \to \infty) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{r\to\infty}\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

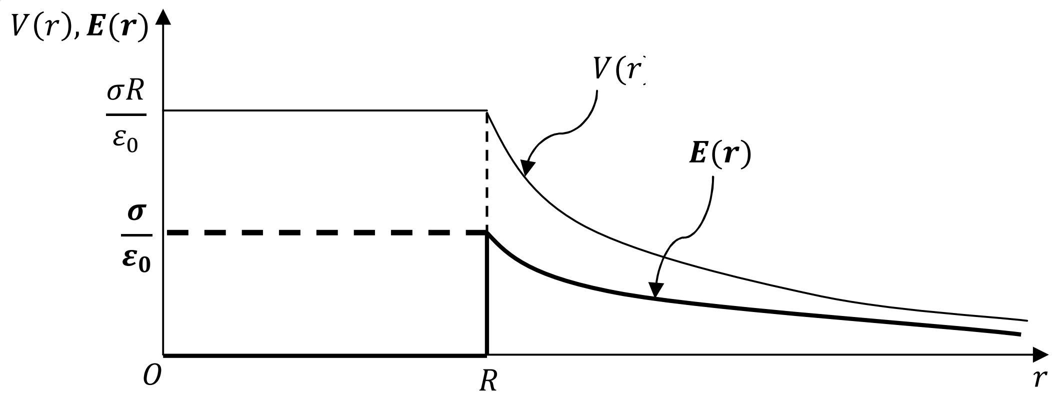
Donc

$$V_{ext}(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

A la surface de la sphère ($r = R$), on a : $V_{int}(R) = V_{ext}(R) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

$$V_{int}(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

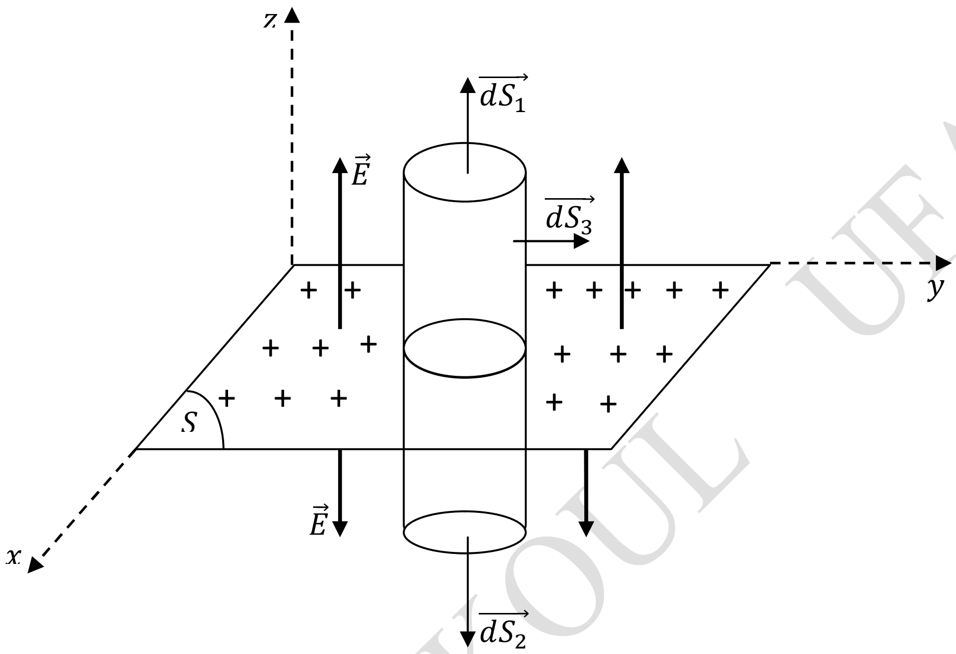
Représentation de $V(r)$ et $E(r)$:



IV. Champ électrique créé par une charge distribuée uniformément sur un plan infini

Soit un plan infini portant une charge uniforme de densité σ (figure ci-dessous).

Calculons le champ électrostatique créé par cette charge dans l'espace.



En appliquant le théorème de Gauss :

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Dans ce cas, on choisit comme surface fermée de Gauss le cylindre qui passe perpendiculairement par le plan (P).

Le flux est séparé en trois parties :

- Flux à travers S_1.
- Flux à travers S_2.
- Flux à travers S_3.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

$$\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \underbrace{\oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_3}}_{=0,\ car\ \vec{E} \perp S_3} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\phi = E.S_1 + E.S_2$$

$$S_1 = S_2 = S$$

$$\Rightarrow \quad 2E.S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{int} = \sigma.S$$

$$\Rightarrow \quad 2E.S = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Il est clair que $\vec{E}$ ne dépend pas de distance à partir du plan. Donc il est uniforme.

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\vec{E} = E\vec{k}$$

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -Edz$$

$$V(z) = \int -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}z + cte$$

V. Champ électrique créé par une distribution volumique non uniforme de charges

Application

On considère dans le vide une sphère de rayon R et de centre O portant une charge avec une densité volumique donnée par l'expression :

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad k \text{ et } \rho_0 \text{ sont des constantes}$$

1) Déterminer l'expression du champ électrique en tout point de l'espace. On notera $OP = r$.
2) Montrer qu'à l'intérieur de la sphère, le champ électrique présente un maximum pour un rapport $r/_R$ donné
3) Calculer la constante k dans le cas où le champ est extremum pour $r/_R = \frac{1}{2}$.

Solution

1) L'expression du champ électrique dans l'espace

En appliquant le théorème de Gauss

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On choisit la surface de Gauss une sphère centrée sur *O* et de rayon *r*.

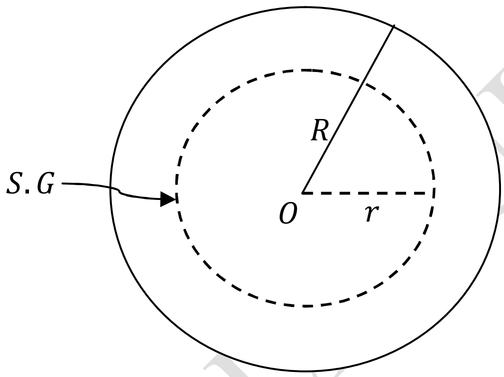
Sachant que dans le cas d'une symétrie sphérique $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS}$

Le flux du champ électrique s'écrit :

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \phi = \oiint_{S.G} E.dS = \phi = E \oiint_{S.G} dS = E.S = E.4\pi r^2$$

Pour la charge électrique, on distingue deux régions :

1^re^ région : $\boldsymbol{r} < R$



$$Q_{int} = \iiint \rho\,.dV$$

$$dV = r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$Q_{int} = \int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho_0\left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right) r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho_0.\int_0^r \left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right) r^2 dr\,.\int_0^\pi sin\theta d\theta\,.\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho_0.\left[\frac{r^3}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^5}{R^2}\right]_0^r.[-cos\theta]_0^\pi.[\varphi]_0^{2\pi} =$$

$$Q_{int} = 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^5}{R^2}\right)$$

D'après le théorème de Gauss, on a :

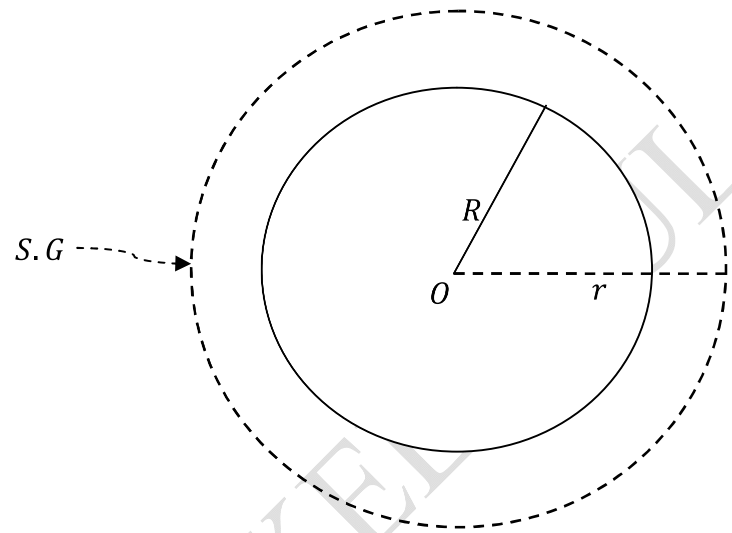
$$E.4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^5}{R^2}\right)$$

$$E_{int}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^3}{R^2}\right)$$

Soit vectoriellement (symétrie radiale)

$$\vec{E}_{int}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^3}{R^2}\right)\vec{u}_r$$

2me région : $r > R$



$$Q_{int} = \iiint \rho\,.\,dV$$

$$Q_{int} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho_0\left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right)r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho_0.\int_0^R \left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right)r^2 dr\,.\int_0^\pi sin\theta d\theta\,.\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho_0.\left[\frac{r^3}{3} - \frac{k}{5}\frac{r^5}{R^2}\right]_0^R.\,[-cos\theta]_0^\pi.\,[\varphi]_0^{2\pi} =$$

$$Q_{int} = 4\pi\rho_0\left(\frac{R^3}{3} - \frac{k}{5}\frac{R^5}{R^2}\right) = 4\pi\rho_0 R^3\left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right)$$

D'après le théorème de Gauss, on a :

$$E.4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0} R^3\left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right)$$

$$E_{ext}(r) = \frac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right).\frac{1}{r^2}$$

1. L'extrémum du champ à l'intérieur est donné pour :

$$\frac{dE_{int}(r)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{3k}{5}\frac{r^2}{R^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} - \frac{3k}{5}\frac{r^2}{R^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r^2}{R^2} = \frac{5}{9k} \quad \Longrightarrow$$

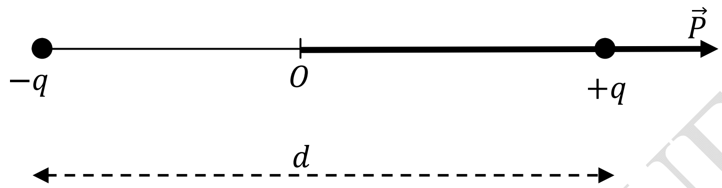
2. Pour $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$, on aura :

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{5}{9k} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{20}{9}$$

Dipôle électrique

I. Définition

Le dipôle électrique est un système composé de deux charges de signes opposés $(-q, +q)$ placées en deux points *A* et *B* distant de *d* (figure ci-dessous).



Dipôle électrique

II. Moment dipolaire électrique

Le moment dipolaire électrique est grandeur vectorielle qui caractérise le dipôle électrique. Elle est donnée par :

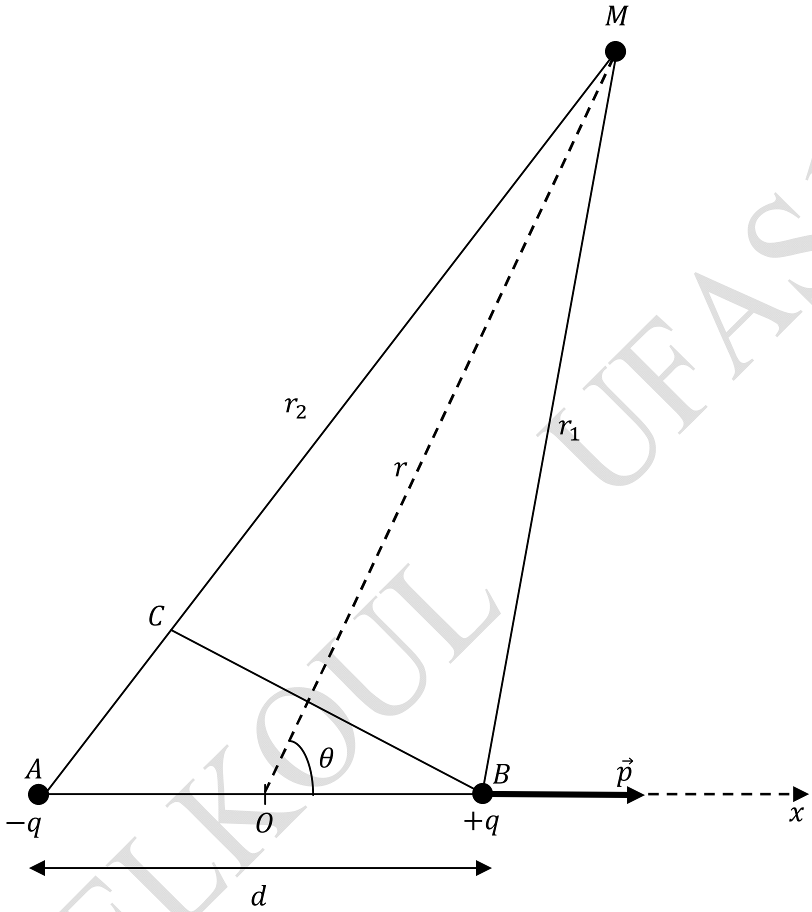
$$\vec{p} = q.\vec{d}$$

Où $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$

Le dipôle électrique est orienté de la charge négative vers la charge positive.

III. Potentiel électrique créé par un dipôle électrique

Pour calculer le potentiel créé par un dipôle électrique, on considère un point *M* situé à une distance *r* $(r \gg d)$ du centre du dipôle *O* (figure ci-dessous).



$$V = V^{+} + V^{-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 . r_2}\right)$$

Considérons le point *C* la projection du point *B* sur le segment *AM* et en tenant compte des approximations, on peut écrire :

$$AC \approx d.cos\theta \approx r_2 - r_1$$

$$d \ll r \quad \Rightarrow \quad r_1 . r_2 \approx r^2$$

Par conséquent :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d.cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p.cos\theta}{r^2}$$

IV. Champ électrique créé par un dipôle électrique

Le champ électrique créé par un dipôle électrique est obtenu à partir de la relation suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

En coordonnées polaires :

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta$$

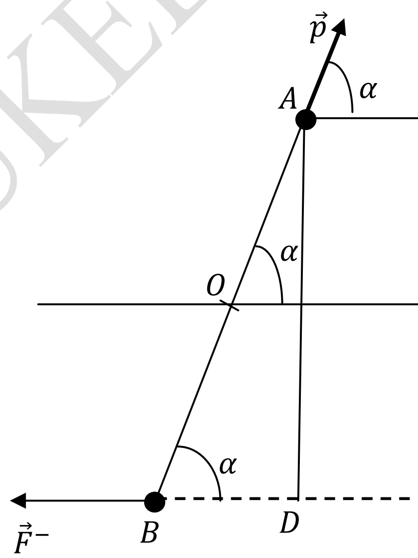
$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$$

Donc

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p.\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p.\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

V. Interaction du dipôle électrique avec un champ électrique

Si l'on place un dipole électrique de moment $\vec{p}$ dans un champ extérieur $\vec{E}$ uniforme, les charges qui le composent subissent des forces opposées : $\vec{F}^- = -\vec{F}^+$



Le dipôle est soumis à l'action d'un moment de couple $\vec{\Gamma}$ tel que :

$$\Gamma = \|\vec{\Gamma}\| = F.AD$$

Sachant que : $F = q.E \quad et \qquad AD = d.sin\alpha$

Alors : $\quad \Gamma = q.E.d.sin\alpha = p.E.sin\alpha$

Donc l'expression vectorielle du moment de couple s'écrit sous la forme :

$$\vec{\boldsymbol{\Gamma}} = \vec{\boldsymbol{p}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}}$$

Il est clair que dans l'interaction d'un dipole avec un champ électrique, le moment de couple tend à aligner le dipôle parallèlement au champ électrique.

VI. L'énergie potentielle

L'énergie potentielle d'un dipole électrique placé dans un champ électrique $\vec{E}$ est donnée par la somme des énergies potentielles de chaque charge.

$$E_P = q(V^+ - V^-)$$

$$V^+ - V^- = -\vec{E}.\vec{d}$$

$$E_P = -q\vec{E}.\vec{d}$$

Donc

$$\boldsymbol{E_P} = -\vec{\boldsymbol{p}}.\vec{\boldsymbol{E}}$$

N.B : les propriétés du dipôle électrique expliquent les phénomènes de polarisation des diélectriques.

VII. Application

On considère un dipole électrique formé de deux charges *(-q, +q*) séparées d'une distance d telles que : $q = 2\,nC$ et $d = 9mm$

1) Calculer le module du moment dipolaire.

2) Calculer l'énergie interne.

3) Le dipôle est placé dans un champ électrique uniforme $E = 50\ kV/m$.
Exprimer en joules puis en électron-volts l'énergie potentielle maximale de ce dipôle qui résulte de l'interaction avec le champ électrique. (on donne : $1eV = 1.6.10^{-19}joules$).

Solution

2) $\vec{p} = q.\vec{d} \quad \Rightarrow \quad p = q.d = 18.10^{-12} C.m.$
3) L'énergie interne est l'énergie d'interaction entre les deux charges :

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 . q_2}{r_{12}} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{d} = -4.10^{-6} \text{ joules}$$

soit $U = -25.10^{12}$ eV

1) L'énergie potentielle

$$E_P = -\vec{p}.\vec{E} = -p.E.cos\alpha$$

Cette énergie est maximale pour : $\cos\alpha = -1$ $(\alpha = \pi)$

$$E_{P_{max}} = p.E = 0.9.10^{-6} \text{ joules}$$

$$E_{P_{max}} = 5.6.10^{12} \text{ eV}$$

Chapitre 3
Les conducteurs

Chapitre 3 : Les conducteurs

I. Introduction

Un conducteur est un milieu matériel dans lequel les charges libres sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique.

Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si aucune charge ne se déplace à l'intérieur. Ce qui revient à dire que les charges à l'intérieur d'un conducteur en équilibre ne sont soumises à aucune force (champ).

II. Propriétés des conducteurs en équilibre

- **Champ (lignes de champ) :** En tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique est nul $\vec{E}_{int} = \vec{0}$.
- **Potentiel** : un conducteur en équilibre est un volume équipotentiel $V_{int} = cte$. En effet :

$$dV_{int} = -\vec{E}_{int}.\overrightarrow{dl} = 0 \qquad (\vec{E}_{int} = \vec{0})$$
$$\Rightarrow \; V_{int} = cte$$

- **Distribution de charges** : à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, la charge électrique est nulle. Si le conducteur est chargé, les charges non compensées sont nécessairement localisée à la surface du conducteur. En effet, en utilisant le théorème de gauss, on démontre :

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}_{int}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \Rightarrow \; Q_{int} = 0$$

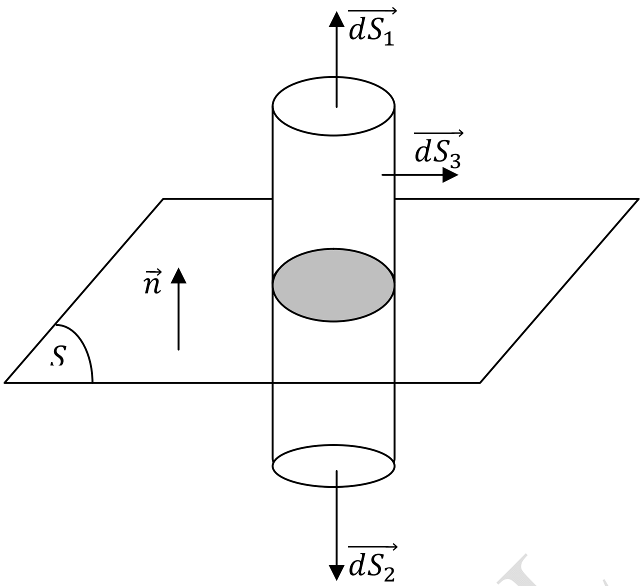
En résumé : un conducteur en équilibre électrostatique est caractérisé par :

$$\begin{cases} \vec{E}_{int} = \vec{0} \\ Q_{int} = 0 \\ V_{int} = cte \end{cases}$$

III. Relation entre le champ Electrique au voisinage immédiat du conducteur et charge superficielle (Théorème de Coulomb)

Considérons un conducteur de forme quelconque.

Pour calculer le champ électrique au voisinage immédiat de la surface externe du conducteur, on applique le théorème de Gauss en choisissant comme surface de Gauss un cylindre dont une base se trouve à l'intérieur de la surface et l'autre base à une certaine profondeur de sorte que la charge superficielle soit totalement à l'intérieur du cylindre (figure ci-dessous).



Au voisinage le champ électrique est perpendiculaire à la surface i.e. $\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds}$

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Le flux est séparé en trois parties :

- Flux à travers S_1.
- Flux à travers S_2.
- Flux à travers S_3.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

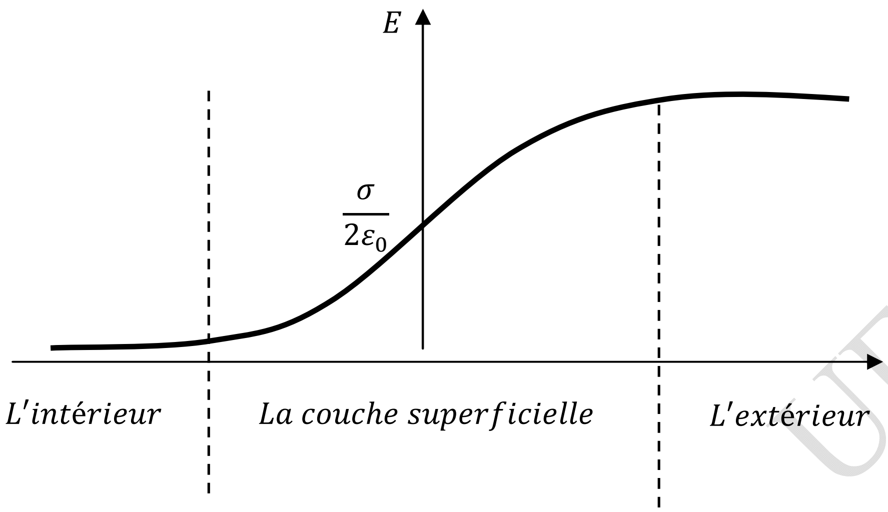
$$\phi = \oiint \vec{E}_{ext}.\overrightarrow{dS}_1 + \underbrace{\oiint \vec{E}_{int}.\overrightarrow{dS}_2}_{=0,\ car\ \vec{E}_{int}=\vec{0}} + \underbrace{\oiint \vec{E}_{ext}.\overrightarrow{dS}_3}_{=0,\ car\ \vec{E}\perp S_3} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\phi = \oiint \vec{E}_{ext}.\overrightarrow{dS}_1 = E_{ext}.S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Soit vectoriellement : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

Par conséquent : à la traversée de la surface d'un conducteur, le champ électrique varie de la manière suivante :



IV. Pouvoir des pointes

A proximité d'une pointe, le champ électrostatique est très intense. Cela résulte du fait que la densité surfacique de charges est très élevée au voisinage d'une pointe.

Le phénomène peut être expliqué en considérant un conducteur sphérique de rayon *R* ou le champ électrique a une symétrie radiale. D'où :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_r$$

A la surface, la charge vaut :

$$Q_{surf} = \sigma . S \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \frac{Q_{surf}}{S}$$

Avec : $S = 4\pi R^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{ext} = \dfrac{Q_{surf}}{S\varepsilon_0}\vec{u}_r = \dfrac{Q_{surf}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R^2}\vec{u}_r \\ \sigma = \dfrac{Q_{surf}}{4\pi R^2} \end{cases}$$

Par conséquent : pour une charge de surface donnée, la densité de charge est plus importante pour les rayons les plus faibles et le champ électrique peut atteindre des valeurs très élevées.

Cette propriété s'appelle : ***pouvoir des pointes***

Applications : les parafoudres.

V. Pression électrostatique

Si l'on apporte des charges électriques (positives ou négatives) sur une bulle de savon, on constate que celle-ci se délatte. En effet, les charges à la surface d'un conducteur sont soumises à des forces répulsives de la part des autres charges.

La force exercée peut etre calculée en multipliant le champ électrique à la surface du conducteur par la charge.

$$\begin{cases} F = Q.E \\ E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ Q = \sigma.S \end{cases} \Rightarrow F = \frac{Q\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2.S}{2\varepsilon_0}$$

$$\frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = P$$

C'est la pression électrostatique.

Applications des conducteurs

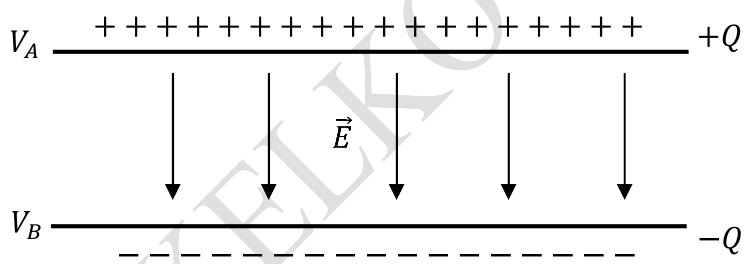
Les condensateurs

I. Définition

Le condensateur est un système constitué de deux conducteurs électriques en influence totale. Les deux conducteurs dans ce cas s'appellent *les armatures* du condensateur. L'espace entre les armatures est le vide ou rempli d'un milieu isolant (diélectrique). Lorsque le condensateur est soumis à une différence de potentiel (*d.d.p*) il se charge i.e. les deux plaques acquièrent des charges égales et opposées. Par conséquent, le condensateur est considéré comme un appareil qui sert à emmagasiner de l'énergie électrique.

II. Capacité d'un condensateur

Soit le condensateur *C* schématisé dans la figure ci-dessous



La capacité du condensateur est une grandeur positive. Pour la calculer, il faut connaitre la d.d.p entre les armatures du condensateur telle que :

$$V^+ - V^- = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \frac{Q}{C}$$

Avec : $Q = Q_A = +Q$ la charge du condensateur.

$$\boldsymbol{C = \frac{Q}{V_A - V_B}}$$

L'unité de la capacité est le Farad : *F*

Les fractions du Farad

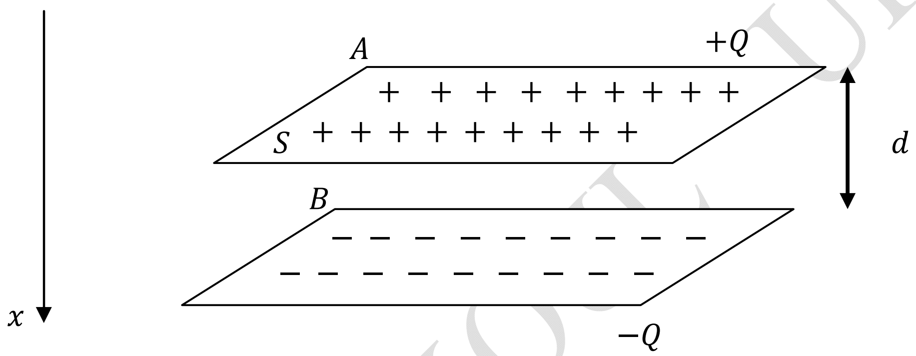
$1\mu F = 10^{-6}\ F$

$1nF = 10^{-9}\ F$

$1pF = 10^{-12}\ F$

III. Capacités de quelques condensateurs simples

1) Le condensateur plan



L'intensité du champ entre les armatures est donné par :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$V^+ - V^- = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}.\vec{dl} = -\int_A^B E.dx$$

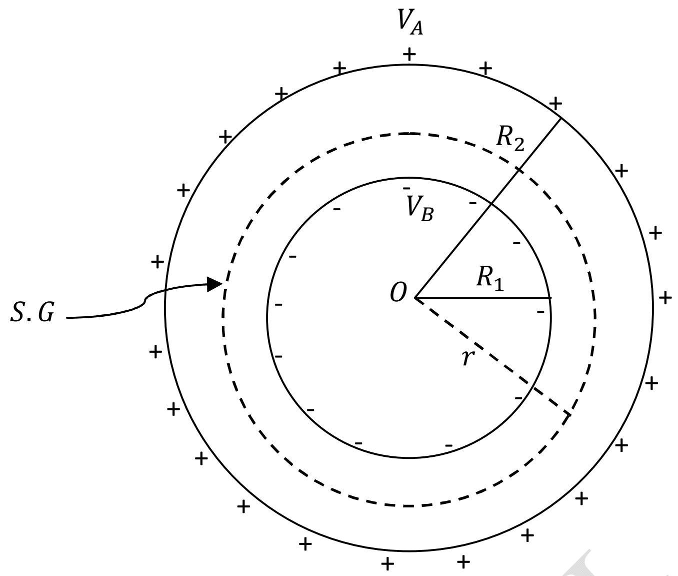
$$V_A - V_B = -E[x]_B^A = E(x_B - x_A) = E.d$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.d = \frac{\sigma.S.d}{\varepsilon_0.S} = \frac{Q.d}{\varepsilon_0.S}$$

$$\begin{cases} V_A - V_B = V = \dfrac{Q.d}{\varepsilon_0.S} \\ Q = C.V \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{C = \frac{\varepsilon_0.S}{d}}$$

2) Le condensateur sphérique

Soit un condensateur sphérique composé de deux sphères de rayons R_1 et R_2 (figure ci-dessous)



Pour calculer le champ électrique entre les armatures, on applique le théorème de Gauss

Dans ce cas, la surface de Gauss est sphérique de rayon *r*.

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E.S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Soit vectoriellement

$$\vec{E} = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Le potentiel est donné par :

$$V = V_A - V_B = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Dans ce cas $\overrightarrow{dl} = dr\vec{u}_r$

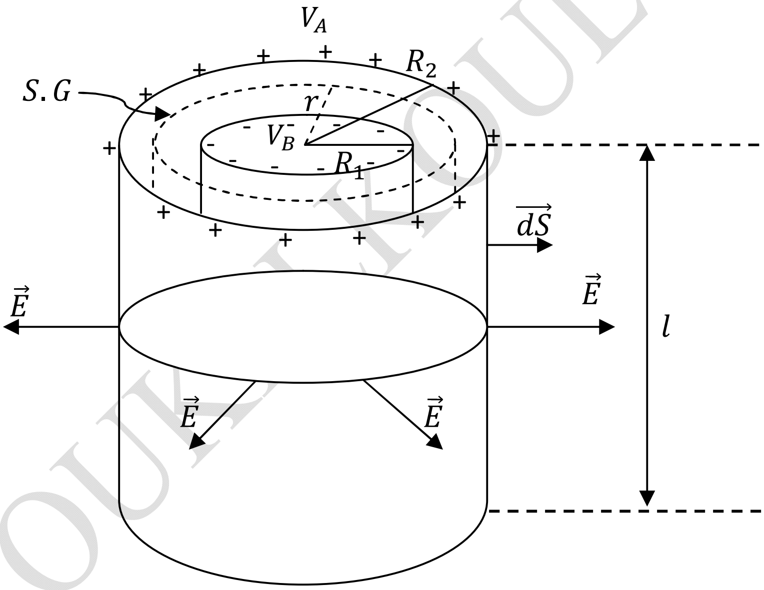
$$V = -\int_{R_1}^{R_2} E.dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V = -\int_{R_1}^{R_2} E.dr = -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1.R_2} \qquad (Q_{int} = -Q)$$

$$\Longrightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

3) Le condensateur cylindrique

On considère deux cylindres conducteurs coaxiaux, de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ (figure ci-dessous)



Calculons le champ électrique entre les armatures du condensateur.

On applique le théorème de Gauss : (surface de Gauss est celle d'un cylindre de rayon *r* et de longueur *l*)

$$\phi = \oiint_{\boldsymbol{S.G}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.S = E.2\pi rl = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E = E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 rl}$$

Soit vectoriellement

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 rl}\vec{u}_\rho \qquad (coordonnées\ cylindriques)$$

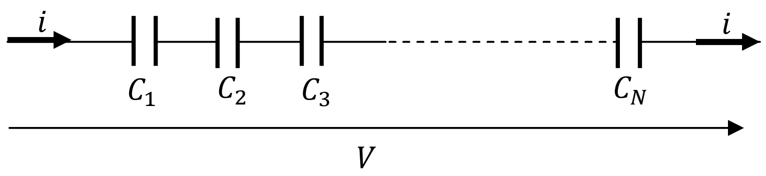
$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_{R_1}^{R_2} E.dr$$

$$V_A - V_B = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 rl} dr = \frac{-Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{R_1}{R_2} \qquad (Q_{int} = -Q)$$

$$\boldsymbol{C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

IV. Association des condensateurs

1. Association en série



$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots\dots\dots\dots + V_N = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{Q_N}{C_N} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

Puisque le même courant qui passe par tous les condensateurs, on peut écrire :

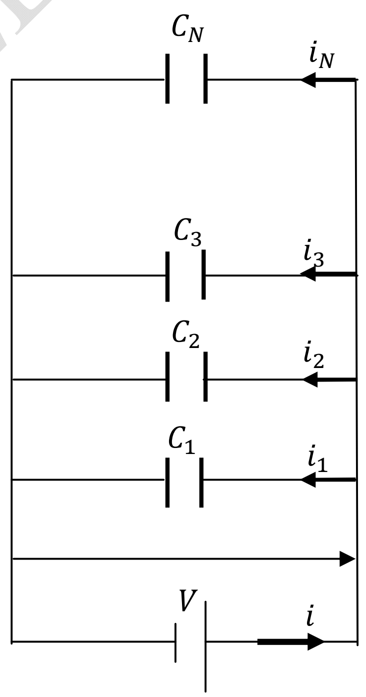
$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots\dots\dots\dots = Q_N$$

Alors :

$$V = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{C_N}\right) = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{C_N}}$$

2. Association en parallèle



$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \ \dots\dots\dots\dots + \ i_N$$

$$\Rightarrow \ Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ \dots\dots\dots\dots + \ Q_N$$

$$\Rightarrow \ C_{eq}.V = C_1.V_1 + C_2.V_2 + C_3.V_3 \dots\dots\dots\dots. + C_N.V_N$$

Dans ce cas, on a la même tension entre les bornes de chaque condensateur

$$V = V_1 = V_2 = V_3 \dots\dots\dots\dots. = V_N$$

Alors

$$C_{eq}.V = V.(C_1 + C_2 + C_3 \dots\dots\dots\dots. + C_N)$$

$$\boldsymbol{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 \dots\dots\dots\dots. + C_N}$$

Chapitre 4
Électrocinétique

Chapitre 4 : L'électrocinétique

I. Notion du courant

Par analogie entre le courant électrique et le courant d'eau dans une conduite, la notion d'intensité correspond à celle du débit : quantité d'électricité débitée par unité de temps.

Si à travers une section donnée *S* du conducteur, passe une quantité de charge *dq* pendant un temps *dt*, l'intensité du courant est :

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Dans le système international, l'unité de l'intensité du courant est l'Ampère notée *A* qui correspond au passage d'une charge de un Coulomb par seconde ($1A = \frac{1C}{1S}$).

Lorsque la vitesse du déplacement des charges est constante, le courant est dit stationnaire.

II. Vecteur densité de courant

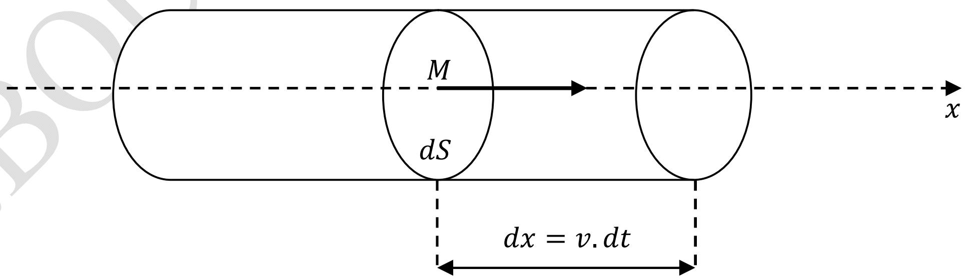
Considérons un conducteur métallique, cylindrique, de section *S* et d'axe $\overrightarrow{ox}$.

Soit *dq* la quantité de charges qui traverse la section *dS*.

Désignons par :

$\vec{v}$ la vitesse de déplacement des charges.

ρ la densité volumiques de charges.



La quantité de charges *dq* qui traverse la section perpendiculaire à l'axe *dS*, occupe pendant un temps *dt* un volume cylindrique *dV* tel que :

$$dV = dx.dS = v.dt.dS$$

La valeur de cette quantité de charges est : $dq = \rho.dV = \rho.v.dt.dS \quad (\vec{v} \parallel \overrightarrow{dS})$

Dans le cas où $\overrightarrow{dS}$ n'est pas parallèle à $\vec{v}$, on a :

$dq = \rho.\vec{v}.\overrightarrow{dS}.dt$

Par définition le vecteur densité de courant $\vec{J}$ est donné par :

$$\boldsymbol{\vec{J} = \rho.\vec{v}}$$

$$dq = \vec{J}.\overrightarrow{dS}.dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dq}{dt} = dI = \vec{J}.\overrightarrow{dS}$$

Donc :

$$\boldsymbol{I = dI = \oiint_S \vec{J}.\overrightarrow{dS}}$$

Donc l'intensité du courant est le flux du vecteur densité de courant $\vec{J}$ à travers la surface *S*.

Si *n* désigne le nombre de charge par unité de volume, la densité de charges s'écrit sous la forme :

$$\rho = n.q$$

Par conséquent :

$$\boldsymbol{\vec{J} = n.q.\vec{v}}$$

III. La loi d'Ohm

C'est une loi expérimentale de la physique. Son énoncé est comme suit : pour un conducteur métallique à température constante, le rapport entre la différence de potentielle (d.d.p) entre deux points du conducteur et le courant qui le traverse, est constant.

Cette constante est appelée *la résistance R* du conducteur.

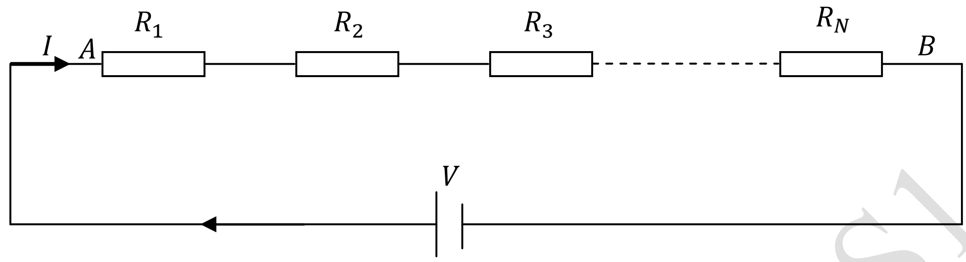
$$\boldsymbol{V = R.I}$$

L'unité de R est l'Ohm Ω telle que :

$$1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

IV. Association des résistances

1) Association en série

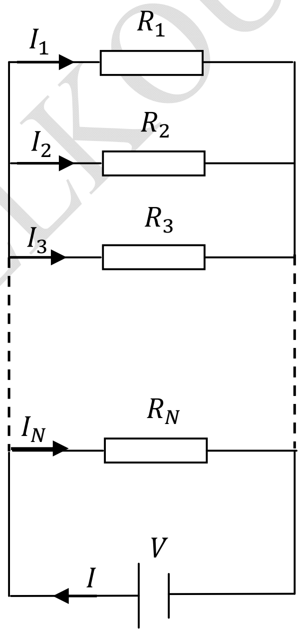


Puisque le même courant qui traverse toutes les résistances, la tension entre les points A et B s'écrit :

$$V = V_A - V_B = R_1.I + R_2.I \dots\dots\dots.. + R_N.I = (R_1 + R_2 + R_3 \dots\dots\dots\dots. + R_1)I$$

$$V_A - V_B = R_{eq}.I \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i}$$

2) Association en parallèle



On a :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \dots\dots\dots + I_N$$

D'autre part et en utilisant la loi d'Ohm, le courant total est donné par :

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_1} + \frac{V_3}{R_3} \dots\dots\dots\dots + \frac{V_N}{R_N}$$

Puisque la tension entre les bornes de chaque résistance, on trouve :

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{R_N}\right)$$

D’où

$$\boldsymbol{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$$

V. Effet Joule

La circulation d’un courant *I* à travers un conducteur électrique entraine une perte d’énergie qui se traduit par un échauffement.

Pour calculer l’énergie dissipée pendant le passage du courant : considérons la quantité de charges *dq* qui passe d’un point *A* à un point *B* du conducteur. Le travail des forces électrique est :

$$dW = (V_A - V_B).dq$$

$$dq = I.dt$$

$$dW = (V_A - V_B).I.dt$$

Si *R* est la résistance du conducteur :

$$V_A - V_B = R.I$$

Et par conséquent

$$dW = R.I^2.dt$$

Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur : c’est ***l’effet Joule*** .

Elle correspond à une puissance *P* donnée par :

$$\boldsymbol{P = \frac{dW}{dt} = R.I^2 = \frac{V^2}{R}}$$

Comme *V* et *I* sont constants, la puissance reste constante au cours du temps.

Circuit électrique

I. Définition

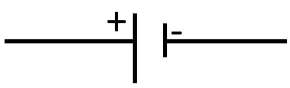
Un circuit électrique est un ensemble simple ou complexe de conducteurs et de composants électriques parcourus par un courant électrique.

L'étude électrocinétique d'un circuit consiste à déterminer, à chaque point (endroit) l'intensité du courant et la tension. Pour cela, on utilise les caractéristiques des composants et des lois simples d'étude de circuits.

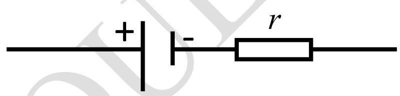
II. Force électromotrice (f.e.m)

Les chutes de tension qui créent les courants sont appelées ***force électromotrice***.

Le dispositif qui crée une chute de tension permanente est appelé ***générateur.***



Générateur idéal



Générateur réel

En reliant les bornes d'un générateur par un ou plusieurs matériaux conducteurs, on réalise un *circuit fermé* dans lequel le courant peut circuler.

Le circuit est dit *ouvert* si un corps isolant (air, bakélite) interrompt le circuit.

Le circuit peut contenir un certain nombre d'appareils aux propriétés différentes :

Générateurs : batteries, piles, générateurs de tension…

Récepteurs : résistances, bobines, condensateurs…

Appareils de mesure : voltmètre, ampèremètre, oscilloscope…

Appareils de sécurité : disjoncteurs, fusibles…

Appareils de manœuvre : inverseurs…

III. Réseaux électriques

Un réseau électrique est constitué d'un ensemble de dipôles linéaires reliés par des fils conducteurs de résistance négligeable.

Le réseau est formé de branches reliées entre elles par des nœuds et forment des mailles.

- Plusieurs dipôles reliés en série forment une branche.
- Un point du réseau reliant au moins trois branches est appelé nœud.
- Un maille est un parcours fermé constitué de branches et ne passant qu'une seule fois par un nœud.

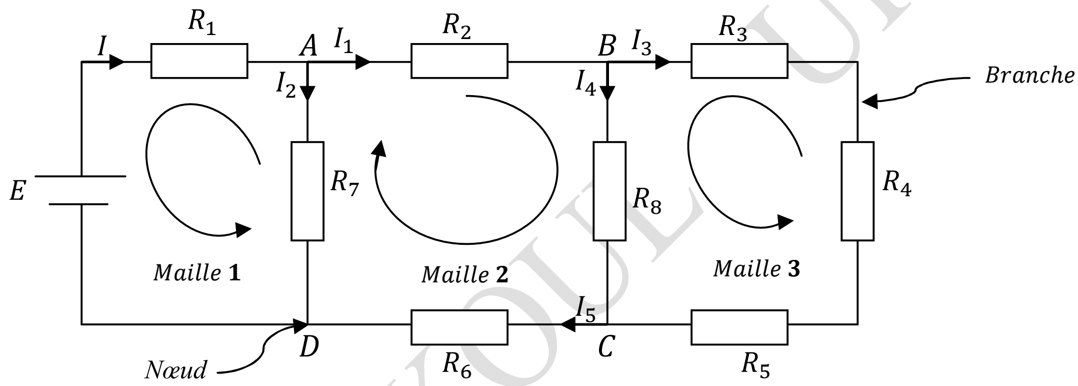


Fig. 3 réseau électrique

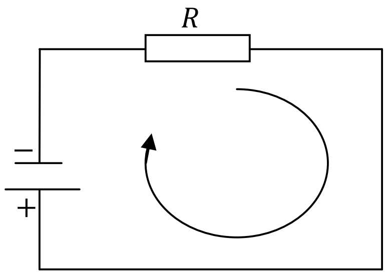
D'après le schéma ci-dessus,

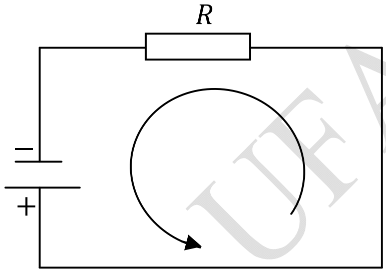
- BC est une branche.
- A, B, C, D sont des nœuds.
- ABCDA est une maille.

IV. Convention de signes

Lorsque le sens de la maille est choisi, tout courant qui circule dans le même sens est considéré positif. Inversement, tout courant circulant dans le sens contraire est pris négatif.

Pour un générateur, la tension entre ses bornes est considéré négative si le sens de la maille traverse le générateur du pole négatif (-) au pole positif (+). Dans le cas contraire la tension est considérée positive.

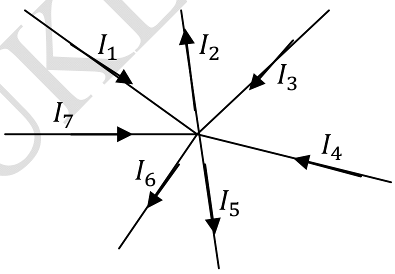




V. Analyse des réseaux - lois de Kirchhoff

1) Enoncé de la première loi (loi des nœuds)

La somme des courants entrants dans un nœud est égale à la somme des courants sortants.



D'après la loi des nœuds : $I_1 + I_3 + I_4 + I_7 = I_2 + I_5 + I_6$

I. Enoncé de la deuxième loi (loi des mailles)

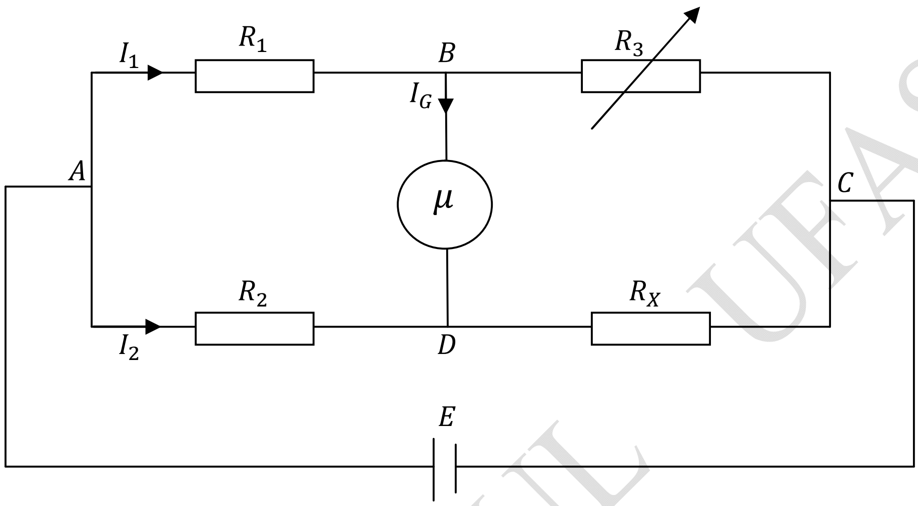
Dans une maille, la somme des *d.d.p* entre les bornes des éléments qui la constituent est nulle.

Considérons la maille ABCDA.

VI. Applications

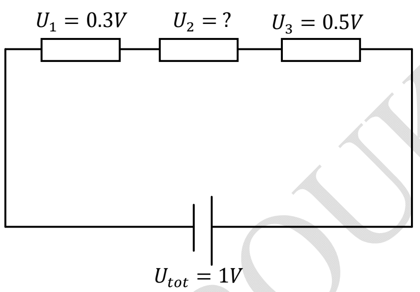
Exercice 1 : Pont de Wheatstone

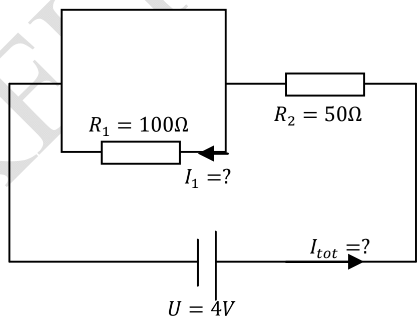
Démontrer qu'à l'équilibre du pont, la relation suivante est vérifiée : $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_X}$

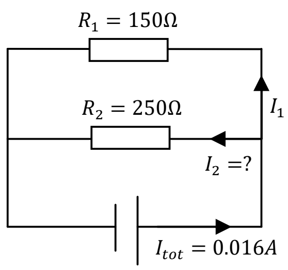


Exercice 2

Trouver les valeurs manquantes dans les circuits suivants :



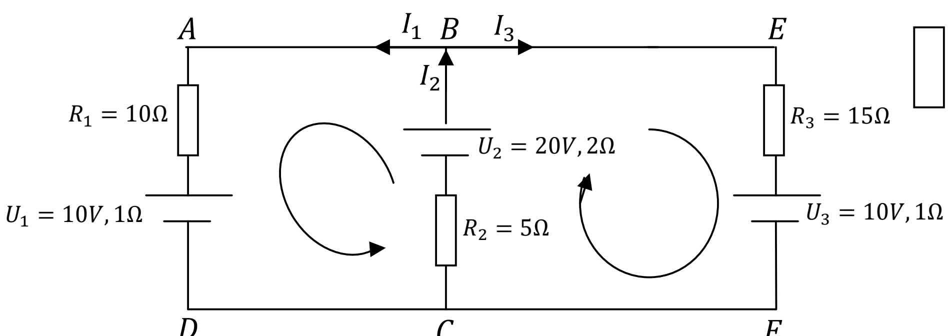




U_1

Exercice 3

Calculer les valeurs des courants circulants dans les différentes branches.



Solutions

Exercice 1

A l'équilibre, $I_G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_A = V_D$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{AB} = V_{AD} \\ V_{BC} = V_{DC} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} I_1.R_1 = I_2.R_2 \ \ldots\ldots\ldots \ (1) \\ I_1.R_3 = I_2.R_X \ \ldots\ldots\ldots \ (2) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_X} \quad \Rightarrow \quad R_1.R_X = R_2.R_3$$

Exercice 2

- $U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3 \quad \Rightarrow U_2 = U_{tot} - U_1 - U_3 = 0.2\ V$
- $I_1 = 0$

$$U = R_2.I_{tot} \quad \Rightarrow \quad I_{tot} = \frac{U}{R_2} = \frac{4}{50} = 0.08\ A$$

- En utilisant le diviseur de courant, on aura :

$$I_2 = I_{tot}.\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Exercice 3

En utilisant la loi des mailles

La maille ABCDA

$$R_1.I_1 + U_1 + r_1.I_1 + R_2.I_2 - U_2 + r_2.I_2 = 0 \qquad (r_2\text{: la résistance interne de } U_2)$$

La maille AEFBA

$$R_3.I_3 + U_3 + r_3.I_3 + R_2.I_2 - U_2 + r_2.I_2 = 0$$

On peut écrire alors après simplification:

$$\begin{cases} 11I_1 + 7I_2 = 10 \ \ldots\ldots\ldots \ (1) \\ 7I_2 + 16I_3 = 10 \ \ldots\ldots\ldots \ (2) \end{cases}$$

Et d'après la loi des nœuds, on a : $I_2 = I_1 + I_3$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 11I_1 + 7I_2 = 10 \ \ldots\ldots\ldots \ (1) \\ 7I_2 + 16I_3 = 10 \ \ldots\ldots\ldots \ (2) \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \ \ldots\ldots.. \ (3) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 0.43\ A \\ I_2 = 0.73\ A \\ I_3 = 0.30\ A \end{cases}$$

Chapitre 5
Magnétostatique

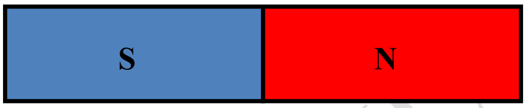
Chapitre 5 : Magnétostatique

I. Introduction

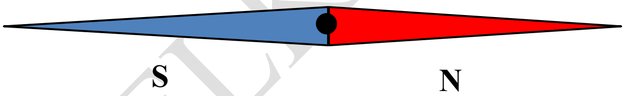
Comme pour l'électricité, les premières observations des phénomènes du magnétisme remontent à l'antiquité. Des corps naturels tels que la magnétite (oxyde de fer Fe_3O_4) ont la propriété d'attirer des corps ferreux. Ce sont les aimants naturels.

La magnétite était une pierre provenant de la région de *Magnésie* en Grèce d'où l'origine des mots magnétique et magnétisme…

L'aimant est caractérisé par un pole nord (rouge) et un pole sud (bleu ou blanc).



Aimant



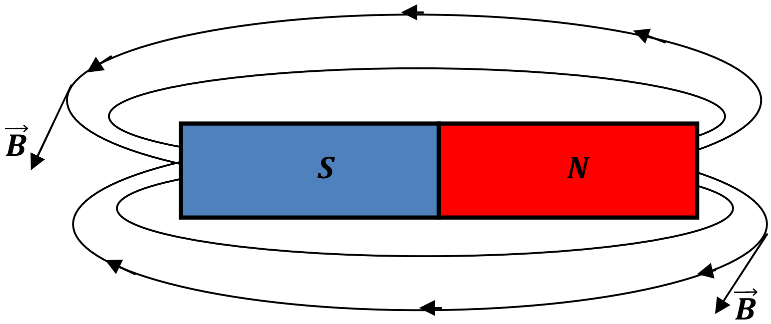
Boussole

N.B : il n'y a pas de monopole (charge) magnétique par analogie à la charge électrique.

II. Champ magnétique

Il est connu qu'au voisinage d'une charge électrique, il y a un champ électrique, au voisinage de la terre il y a un champ gravitationnel et de la même façon au voisinage d'un aimant ou d'un circuit (charges en mouvement) il y a un champ magnétique nommé $\vec{B}$.

Les lignes du champ magnétique sortent du pole nord de l'aimant et rentrent par le pole sud.



Les lignes du champ magnétique

III. Action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une charge électrique Force de Lorentz

Soit un fil conducteur parcouru par un courant *I.*

- Si l'on place au voisinage du fil une charge électrique q animée d'une vitesse $\vec{v}$, on constate que cette charge est soumise à une force perpendiculaire à son sens de déplacement.
- Lorsque $\vec{v} = \vec{0}$ la force $\vec{F} = \vec{0}$. Cela veut dire que la force $\vec{F}$ n'est celle de Coulomb.
- Si l'on remplace la charge *q* par une particule non chargée (*q=0*) en mouvement ($\vec{v} \neq \vec{0}$), on constate que cette particule ne subit aucune force.

De ce qui précède, on constate que la force en question est *la force de Lorentz* donnée par :

$$\boldsymbol{\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

$\vec{v}$: la vitesse de la charge *q*.

$\vec{B}$: le champ magnétique.

L'unité de $\vec{B}$ dans le système *S.I* est le Tesla. Dans le système C.G.S l'unité de $\vec{B}$ est le Gauss.

N.B :$\vec{F}, \vec{v}$ *et* $\vec{B}$ constituent un trièdre direct (ils sont donnés par la règle de la main droite)

Généralisation

Si une charge q se déplace en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$, la force de Lorentz agissant sur la charge est :

$$\vec{F} = \vec{F}_{élc} + \vec{F}_{mag} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\boldsymbol{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$$

Application

Dans un repère *(O, x, y, z)*, une particule de charge q, de masse infiniment petite m, pénètre dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{k}$. A t=0, la particule est en O avec la vitesse $\vec{v}(O) = \vec{v}_0 = v_0\vec{\imath} = cte$

1. Montrer que le mouvement de la particule est circulaire uniforme.
2. Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de *B, m, q, v*

Solution

1. On a : $\vec{v} \perp \vec{B}$.

Puisque la masse est négligeable, la seule force agissant sur la particule est celle de Lorentz $\vec{F}_L$.

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}) = W(\vec{F}_L) = 0 \qquad (\text{car } v = \text{cte})$$

Donc $\vec{F}_L$ ne travaille pas et par conséquent le mouvement est uniforme.

2. Rayon de courbure

D'après le P.F.D

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$q.\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$$

$$\vec{v} \perp \vec{B} \;\Rightarrow\; \left|\vec{F}\right| = |q|vB = ma$$

$$\vec{a} = \frac{\partial v}{\partial t}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N \qquad (\text{car } v \text{ est cte})$$

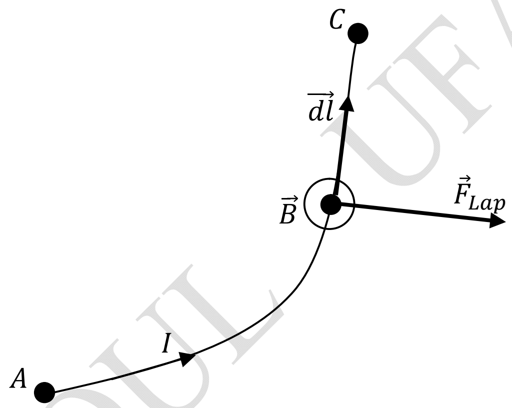
$$|q|vB = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m.v}{|q|B}$$

IV. Action d'un champ magnétique sur un courant

Force de Laplace :

Lorsqu'un fil conducteur, parcouru par un courant I, est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, chaque élément $\overrightarrow{dl}$ du fil subit l'action d'une force qui s'appelle la force de Laplace élémentaire $\overrightarrow{dF}$ donnée par :

$$\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$



La force résultante de Laplace est :

$$\boldsymbol{\vec{F}_{Lap}} = \int_A^C \boldsymbol{\overrightarrow{dF}} = \int_A^C \boldsymbol{I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}}$$

Remarques

- Le fil conducteur étant orienté, l'intensité du courant *I* est une grandeur algébrique : elle positive si le courant circule dans le même sens positif choisi pour le conducteur.
- L'ensemble $(I\overrightarrow{dl}, \vec{B}, \vec{F})$ forme un trièdre direct.
- Dans le cas où le champ magnétique est uniforme, la force de Laplace s'écrit sous la forme :

$$\vec{F}_{Lap} = I\left(\int_A^C \overrightarrow{dl}\right) \wedge \vec{B} = I\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$$

- Dans le cas particulier, pour un fil conducteur rectiligne de longueur *L* placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au fil, la force de Laplace est donnée par :

$$\vec{F}_{Lap} = I\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B} = I.L.B$$

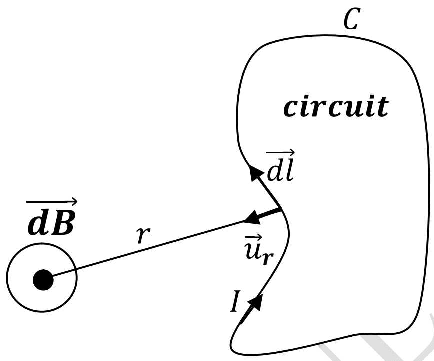
V. La loi de Biot et Savart

C'est la loi qui exprime le champ magnétique créé par un courant électrique.

Soit un élément d'un circuit électrique de longueur $\overrightarrow{dl}$ parcouru par un courant I crée à une distance r un champ magnétique $\overrightarrow{dB}$ tel que :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

-



Le champ magnétique total est :

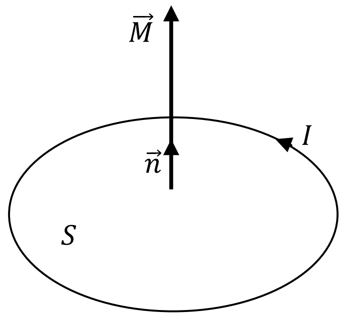
$$\vec{B} = \int_C \overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

VI. Dipôle magnétique

On se place dans les mêmes conditions que pour le calcul du champ électrique créé par un dipôle électrique.

Soit une boucle filiforme parcouru par un courant I et décrivant une surface $\vec{S}$. Le moment magnétique de cette boucle est :

$$\vec{M} = I.\vec{S} = I.S.\vec{n}$$



Moment magnétique

Les composantes du champ électrique créé par un dipôle électrique sont données par :

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2P}{r^3}\cos\theta \\ E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{P}{r^3}\sin\theta \end{cases}$$

Si l'on calcule le champ magnétique créé par la boucle, on obtient :

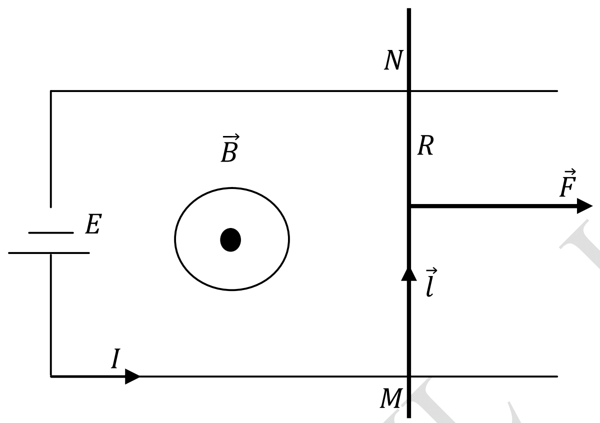
$$\begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2M}{r^3}\cos\theta \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{M}{r^3}\sin\theta \end{cases}$$

Par conséquent, une boucle (spire) de très faible rayon parcourue par un courant, constitue un dipole magnétique.

VII. Applications

Exercice 1 (Force de Laplace)

Soit le circuit schématisé dans la figure ci-dessous. La pile E = 4.5V, r = 1$E = 4.5\ V, r = 1\Omega$. La résistance du barreau $R = 2\Omega$, $|\vec{B}| = 50\ mT$ et *MN*= 25 *Cm*.



1) Indiquer les vecteurs $\vec{l}, \vec{B}, \vec{F}$ en justifiant leurs orientations.

2) Calculer l'intensité du courant *I*.

3) Déterminer l'intensité de force de Laplace appliquée sur le barreau *MN*.

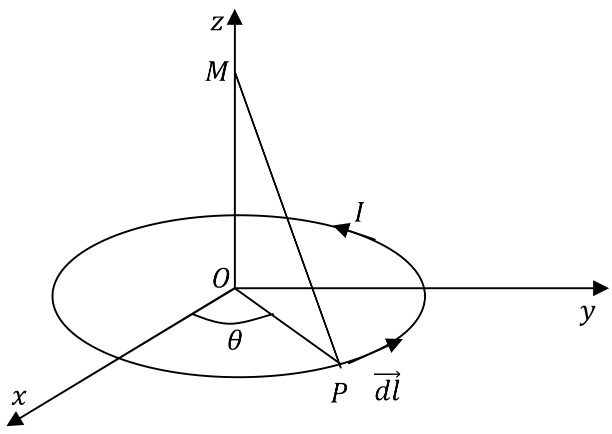
Exercice 2 (loi de Biot et Savart)

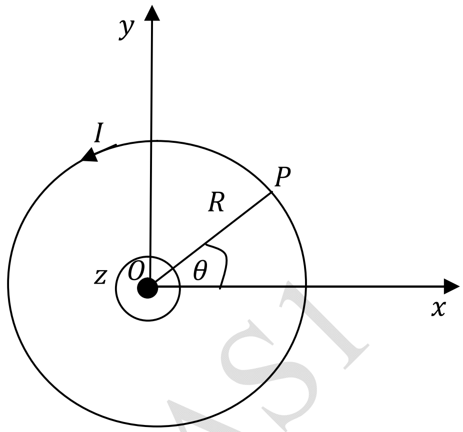
Une spire de rayon R est parcourue par un courant d'intensité I.

Soient M le point de coordonnées (*0, 0, z*) et P un point de la spire repéré par l'angle θ associé à l'élément de courant $I\vec{dl}$.

1) Calculer le champ magnétique $d\vec{B}(M)$ créé par l'élément de courant $I\vec{dl}$ de la spire.

2) Déduire le champ total $\vec{B}(M)$ au point M.





Solutions

Exercice 1

1) L'intensité de I

$$E = (r+R)I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E}{r+R} = 1.5\ A$$

2) L'intensité de la force

$$\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_{Lap} = I\left(\int_M^N \overrightarrow{dl}\right) \wedge \vec{B} = I\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{F}\| = I.MN.B = 0.018\ N$$

Exercice 2

D'après la loi de Biot et Savart, on a :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

$r = PM$

$\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM}$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

D'après le schéma, on a : $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl} \wedge \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}\right)}{PM^3}$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PO}}{PM^3} + \frac{I\vec{dl} \wedge \overrightarrow{OM}}{PM^3}\right)$$

$PM = (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PO}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{I\vec{dl} \wedge \overrightarrow{OM}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

En coordonnées cylindriques :

$\overrightarrow{OP} = -R\vec{u}_\rho$

$\overrightarrow{OM} = z\vec{k}$

$\vec{dl} = R.d\theta.\vec{u}_\theta$

Le champ total :

$$\vec{B}(M) = \int_C \overrightarrow{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PO}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_C \frac{I\vec{dl} \wedge \overrightarrow{OM}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PO} = -R^2.d\theta\left(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\rho\right) = -R^2.d\theta\left(-\vec{k}\right) = R^2.d\theta.\vec{k}$

$\vec{dl} \wedge \overrightarrow{OM} = R.z.d\theta.\vec{u}_\rho \quad \Rightarrow \int_C \frac{I\vec{dl} \wedge \overrightarrow{OM}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$ (il y a une symétrie par rapport à θ)

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\int_C d\theta\right)\vec{k} = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi\vec{k} =$$

$$\boldsymbol{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}}$$