REPUPLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ferhat ABBAS Sétif1

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Polycopié de cours

Module : Physique1
Mécanique du point matériel

Réalisé par : Dr. BOUKELKOUL Mebarek

2018/2019

Sommaire

Chapitre 1 : Rappel mathématique

I. Calcul d'erreurs

II. Analyse dimensionnelle

III. Les vecteurs

Chapitre 2 : Cinématique du point matériel

Mouvement relatif

Chapitre 3 : Dynamique du point matériel

Chapitre 4 : Travail et énergie du point matériel

L'énergie

Chapitre 1

Rappel mathématique

I. Calcul d'erreurs

1) Définition de l'erreur :

Quelle que soit la précision de la mesure d'une grandeur X, nous n'obtenons qu'une valeur approchée x. La différence entre la valeur exacte et la valeur approchée s'appelle erreur absolue que l'on désigne par :

$$\boldsymbol{\delta x = x - x_0}$$

$\boldsymbol{x}$: valeur approchée

$\boldsymbol{x_0}$: valeur exacte.

Les erreurs sont :

- Systématiques : dues aux appareils de mesure ou aux méthodes de calcul.
- Accidentelles due à l'imperfection des sens de l'opérateur.

2) L'incertitude absolue :

A partir des caractéristiques de l'appareil utilisé ou la méthode utilisée, nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue connue sous le nom *d'incertitude absolue*$\Delta\boldsymbol{x}$de la grandeur *X*.

D'où $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{sup}\{|\boldsymbol{\delta x_i}|\}$

Donc la valeur exacte d'une mesure est comprise entre deux valeurs limites connues :

$$\boldsymbol{x - \Delta x \leq x_0 \leq x + \Delta x}$$

Le résultat s'écrit :$\boldsymbol{x \mp \Delta x}$ (*x* et *Δx* ont la même unité de mesure).

3) L'incertitude relative

C'est le rapport entre l'incertitude absolue d'une grandeur X et sa valeur approchée, soit :$\frac{\Delta x}{x}$

Elle est égale au module de la différentielle logarithmique : $\frac{\Delta X}{X} = \left|\frac{dX}{X}\right|$

L'incertitude relative calcule la précision de la mesure. Elle est souvent exprimée en (%).

4) Chiffres significatifs

1 ou 2 chiffres pour les incertitudes, même nombre pour les valeurs mesurées.

a = 134.5 ± 2.354367 kg (faux)

a = 134.5 ± 2.4 kg (vraie).

5) Calcul d'incertitudes

6-1. Méthode algébrique :

Soit $G = G(x, y, z)$ une grandeur physique.

- **Somme :** $G = x + y \Rightarrow \Delta G = \Delta x + \Delta y$
- **Soustraction :** $G = x - y \Rightarrow \Delta G = \Delta x + \Delta y$
- **Produit :** $G = x.y \Rightarrow \Delta G = x\Delta y + y\Delta y \Rightarrow \frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
- **Puissance :** $G = x^n \Rightarrow \frac{\Delta G}{G} = |n| \frac{\Delta x}{x}$
- **Quotient :** $G = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$

6-2. Méthode de la différentielle

Soit $G = G(x, y, z)$ une grandeur physique. Pour calculer les incertitudes sur *G* on suit les étapes suivantes :

- A partir de la différentielle de la grandeur *G(x, y, z) dG* telle que :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz$$

- L'incertitude absolue est

$$\Delta G = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z.$$

6-3. Méthode de la différentielle logarithmique

Soit $G = G(x, y, z)$ une grandeur physique. Pour calculer les incertitudes sur *G* on suit les étapes suivantes :

- On calcule : $lnG(x, y, z)$.
- On calcule la dérivée logarithmique de chaque terme qui apparait dans l'expression de *lnG*
- On obtient l'incertitude relative après le calcul de valeur absolue de chaque terme.

6) Applications

Exercice 01 :

Soit la relation **:** $\boldsymbol{y = y_0 e^{-\omega t}}$

– Calculer l'incertitude absolue sur $\boldsymbol{y}$ en fonction des incertitudes absolues$\Delta \boldsymbol{y_0}$, $\Delta \boldsymbol{\omega}$ $\boldsymbol{et}$ $\Delta \boldsymbol{t}$.

Exercice 02 :

La période d'oscillation d'un pendule simple de longueur *l* est donnée par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Ou *g* est l'accélération de la pesanteur au lieu de la mesure.

a) Vérifier l'homogénéité de cette relation

b) Calculer l'incertitude absolue sur g.

c) Donner la précision de la mesure.

On donne $l = 1 \mp 0.005m$ et $\Delta T = 2 \mp 0.02s$

Solutions

Exercice 01

$$y = y_0 e^{-\omega t}$$

En utilisant la différentielle *dy*

$$dy = \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial y}{\partial t} dt$$

$$dy = e^{-\omega t} dy_0 - t y_0 e^{-\omega t} d\omega - \omega y_0 e^{-\omega t} d\omega$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dy_0}{y_0} - t\omega \frac{d\omega}{\omega} - \omega t \frac{dt}{t}$$

En valeurs absolues, on obtient :

$$\frac{\Delta y}{y} = \left|\frac{dy}{y}\right| = \frac{\Delta y_0}{y_0} + \omega t \frac{\Delta \omega}{\omega} + \omega t \frac{\Delta t}{t}$$

Soit :

$$\Delta y = y\left(\frac{\Delta y_0}{y_0} + t\Delta\omega + \omega\Delta t\right)$$

Exercice 02

a) L'homogénéité de la formule

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow [T] = [2\pi].[l]^{\frac{1}{2}}.[g]^{-\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}}.L^{-\frac{1}{2}}.(T^{-2})^{-\frac{1}{2}} = T$

Donc la formule est homogène

b) Calcul de l'incertitude absolue

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2.\frac{l}{T^2}$

A.N $\quad g = 4\pi^2.\frac{1}{4} = 9.86 m/s^2$

$$lng = ln\left(4\pi^2.\frac{l}{T^2}\right) = ln(4\pi^2) + lnl - 2lnT$$

Après dérivation, on trouve :

$$\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2\frac{dT}{T} \Rightarrow \quad \frac{\Delta g}{\mathrm{g}} = \left|\frac{dg}{g}\right| = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

L'incertitude absolue est :

$$\Delta g = g\left(\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}\right)$$

A.N

$\Delta g = 9.86\left(\frac{0.005}{1} + 2\frac{0.2}{2}\right) = 2.02\ m.s^{-2}$

$$g = 9.86 \mp 2.02\ m.s^{-2}$$

c) La précision de calcul

$$\frac{\Delta g}{\mathrm{g}} = \frac{2.02}{9.86} = 0.20$$

soit 2%

II. Analyse dimensionnelle

1) Grandeurs physiques

Définition

On appelle grandeur physique toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou par le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre accompagné d'une unité de mesure.

Exemples: un temps, une longueur, une masse.

2) Dimension d'une grandeur physique

La dimension d'une grandeur représente sa nature physique : une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une surface, d'une énergie, d'une masse. . .

La notion de dimension est générale et ne suppose aucun choix particulier d'unité : une longueur peut s'exprimer en mètres, en pouces, en angströms, etc.

3) Le système international (SI)

Le système international est basé sur 7 grandeurs, auxquelles sont associées 7 unités de base qui sont considérées comme indépendantes du point de vue dimensionnel et qui permettent de définir toutes les autres grandeurs.

Grandeur	Symbole dimensionnel	Unité	Symbole de l'unité
Masse	M	kilogramme	kg
Longueur	L	mètre	m
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	ampère	A
Température	Θ	kelvin	K
Intensité lumineuse	J	candela	cd
Quantité de matière	N	mole	mol

N.B

➤ On dit « kelvin » et non pas « degré kelvin », et on note K et non pas °K.

➤ Si le nom de l'unité est tiré du nom d'une personne, ce nom ne prend pas de majuscule initiale mais son symbole commence par une majuscule.

4) Le système CGS

Le système CGS est un système d'unités de mesure des grandeurs physiques où les unités de base sont :

- Le centimètre pour les longueurs ;
- Le gramme pour les masses ;
- La seconde pour le temps.

5) Equation aux dimensions

Sept grandeurs suffisent pour exprimer la dimension de toute grandeur physique ; le système international n'est qu'un choix parmi d'autres.
La dimension d'une grandeur *G* s'écrit [*G*].

L'équation aux dimensions d'une grandeur *G* s'écrit sous la forme générale :

$$[G] = M^{\alpha_1}.L^{\alpha_2}.T^{\alpha_3}.I^{\alpha_4}.\theta^{\alpha_5}.J^{\alpha_6}.N^{\alpha_7}$$

α_i : sont des entiers positifs ou négatifs.

N.B
L'équation aux dimensions d'une grandeur *G* sans dimension se réduit à [*G*] = 1

Un angle est une grandeur sans dimension : [α] = 1.

Exemple :

Écrire l'équation aux dimensions des grandeurs suivantes ; en déduire leur unité dans le système international en fonction des unités de base.

a) Une masse volumique ρ.

b) L'intensité d'une force $F = \|\vec{F}\|$

c) Une énergie *E*.

d) Une pulsation ω.

Solution

a) Une masse volumique est le rapport d'une masse sur un volume : $\rho = mV$, d'où$[\rho] = ML^{-3}$.

Une masse volumique s'exprime en kg·m^{-3}.

b) On peut utiliser l'expression de l'énergie cinétique : $E = \frac{1}{2}mV^2$

d'où $[E] = [m].[V]^2 = M.L^2.T^{-2}$

Une énergie s'exprimant en joule, on a 1 J = 1 kg·m2 ·s-2.

c) Une pulsation est une vitesse angulaire : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.Elle s'exprime en rad·s^{-1}.

Un angle étant une grandeur sans dimension, on a $[\omega] = T^{1}$.

Une pulsation a la dimension d'une fréquence.

6) Règles de l'analyse dimensionnelle

- $[G^a] = [G]^a$
- $[G_1.G_2] = [G_1].[G_2]$
- $[G\acute{}(X)] = \left[\frac{dG}{dX}\right] = \frac{[G]}{[X]}$
- $\frac{d^nG}{dX^n} = \frac{[G]}{[X]^n}$
- L'argument des fonctions trigonométriques (sin, cos, tan), de la fonction exponentielle (exp) et des fonctions logarithmes (ln et log) doit être sans dimension.
- On ne peut ajouter que des grandeurs de même dimension.
- Une équation est homogène si ses deux membres ont la même dimension.

7) Application

Vérifiez l'homogénéité de la relation $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$qui représente la fréquence *f* d'oscillation d'un système solide-ressort.

*m*est la masse du solide, *k* la constante de raideur.

La force de rappel $\vec{F}$est liée à l'allongement $\overrightarrow{\Delta l}$ par la relation : $\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta l}$.

Solution

Il s'agit de vérifier que les deux membres de la relation ont la même dimension.

Comme f est une fréquence, on a $[f] = T^{-1}$.

• Déterminons la dimension du second membre. On a $\left[\frac{1}{2\pi}\right] = 1$ et $[m] = M$.

De l'égalité $\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta l}$.On déduit : $[F] = [k]L$.

Comme $[F] = M\,LT^{-2}$ (voir le cours), on en déduit que $[k] = MT^{-2}$,

puis $\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\right] = \left[\sqrt{\frac{k}{m}}\right] = \sqrt{\frac{[k]}{[m]}} = \sqrt{\frac{MT^{-2}}{M}}$

Les deux membres ont la même dimension : la relation est homogène.

III. Les vecteurs

6-1. Grandeur vectorielle

La grandeur vectorielle est toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application et une valeur numérique appelée intensité ou module.

Exemple : le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique…

6-2. Grandeur scalaire

Elle est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.
Exemple : le volume, la masse, la température, la charge électrique, l'énergie…

6-3. Le vecteur

Un vecteur est défini par sa direction, son sens, son point d'application et sa norme.

La norme (module, intensité) est un scalaire positif. La direction est une orientation dans l'espace caractérisée par deux sens.

6-4. Représentation d'un vecteur

Un vecteur $\vec{V}$est représenté par un segment orienté tel que :

$\|\vec{V}\| = |\vec{V}| = V$ représente la norme du vecteur.

Dans un repère orthonormé (*o, x, y, z*) par exemple, il est exprimé en fonction de ses composantes

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \quad \text{soit} \quad \vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

6-5. Le vecteur unitaire

C'est un vecteur dont le module est égal à l'unité (le nombre un).
On peut exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme :

$$\vec{V} = V\vec{u}$$

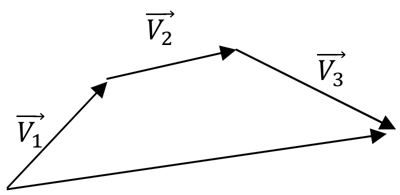
Le vecteur unitaire porté par un vecteur $\vec{V}$ est donné par : $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

6-6. Opération sur les vecteurs

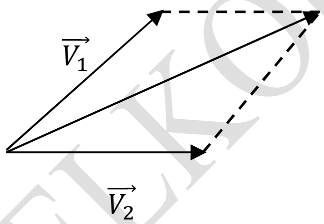
6-1. Somme des vecteurs

Il ya trois méthodes : deux géométriques qui font appel au dessin et une algébrique.

a) Première méthode : on place les vecteurs l'un après l'autre puis on les relie par un vecteur partant de l'origine du premier vecteur jusqu'à l'extrémité du dernier vecteur. C'est la résultante des vecteurs.



b) Pour faire la somme de deux vecteurs qui ont le même point d'application, on forme un parallélogramme dont la diagonale représente la résultante.



c) La méthode algébrique consiste à additionner les composantes des vecteurs pour trouver les composantes de la résultante.

Soient :

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{\imath} + (A_y + B_y)\vec{\jmath} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

6-2. Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est le nombre réel $\vec{A}.\vec{B}$ tel que :

1[er] cas : $\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos\alpha$ où α est l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

2[me] cas : $\vec{A}.\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z$ dans une base orthonormée.

Propriétés :

- $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- $\vec{A}.\vec{B} = 0 \;\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{A} = \vec{0} \\ \vec{B} = \vec{0} \\ \vec{A} \perp \vec{B} \end{cases}$

6-3. Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est le vecteur $\vec{A}\wedge\vec{B}$ tel que :

1[er] cas : $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{c} = \left(\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\sin\alpha\right)\vec{u}$ où α est l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

2[me] cas :

$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y.B_z - A_z.B_y)\vec{\imath} + (A_z.B_x - A_x.B_z)\vec{\jmath} + (A_x.B_y - A_y.B_x)\vec{k}$ dans une base orthonormée.

Propriétés :

- $\vec{A}\wedge\vec{B} = -(\vec{B}\wedge\vec{A})$
- $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{0} \;\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{A} = \vec{0} \\ \vec{B} = \vec{0} \\ \vec{A} \parallel \vec{B}(colinéaires) \end{cases}$
- Si $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{c}$, $\vec{c}$ est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs et sa direction est donnée par la règle de la main droite.
- $\overrightarrow{(A\wedge B)}\wedge\vec{C} \neq \vec{A}\wedge\overrightarrow{(B\wedge C)}$.

6-4. Le produit mixte

$$\vec{C}.(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

6-5. Application

Dans un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les trois vecteurs :

$$\vec{V_1} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

$$\vec{V_2} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$$

$$\vec{V_3} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

a) Calculer les modules de $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$

b) Calculer les composantes et le module des vecteurs :

$\vec{A} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}$

$\vec{B} = 2\vec{V_1} - \vec{V_2} + \vec{V_3}$

c) Déterminer le vecteur unitaire porté par le vecteur : $\vec{C} = \vec{V_1} + \vec{V_3}$

d) Calculer le produit scalaire $\vec{V_1}.\vec{V_3}$ en déduire l'angle entre les deux vecteurs.

e) Calculer le produit vectoriel $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}$

Solution

a) $\|\vec{V_1}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$\|\vec{V_2}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$

$\|\vec{V_3}\| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{35}$

b) $\vec{A} = 10\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

$\vec{B} = 9\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 15\vec{k}$

c) $\vec{C} = 8\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 7\vec{k} \Rightarrow \qquad \vec{u_C} = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} = \frac{8}{\sqrt{138}}\vec{\imath} - \frac{5}{\sqrt{138}}\vec{\jmath} + \frac{7}{\sqrt{138}}\vec{k}$

d) $\vec{V_1}.\vec{V_3} = 31$

$$cos\alpha = \frac{\vec{V_1}.\vec{V_3}}{V_1.V_3} = \frac{31}{\sqrt{41}\sqrt{35}} \approx 0.176 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx arcos0.176 = 79.96°$$

e) $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = 5\vec{\imath} - 26\vec{\jmath} - 17\vec{k}$

Chapitre 2

Cinématique du point matériel

Cinématique du point matériel

I Introduction :

En pratique, tous les objets étudiés par la physique sont en mouvement : les particules élémentaires qui constituent les atomes, les objets usuels et les corps célestes... Donc il parait indispensable de connaitre les lois qui gouvernent les différents types de mouvement. La branche de la physique qui étudie les mouvements s'appelle la mécanique qui elle-même se subdivise en deux sous-branches :la cinématique et la dynamique.

II Définitions générales

1) Cinématique :

La cinématique est l'étude du mouvement en fonction du temps indépendamment des causes produisant ce mouvement (les forces appliquées au point matériel).

2) Point matériel :

Un point matériel est un objet sans dimensions spatiales. C'estun concept qui s'impose dans les cas où l'on ne s'intéresse pas aux mouvements de rotation des objets considérés. Donc c'est une modélisation relative car les objets célestes sont considérés dans certain type de mouvement comme étant des points matériels.

3) Repère :

Pour repérer la position d'un point matériel dans l'espace on a besoin de définir un repère d'espace. Cela consiste à choisir une origine O et une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par exemple.

Le trièdre $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ représente un repère (cartésien).

4) Référentiel

Un référentiel est un repère spatial muni d'un repère temporel (Repère + Horloge). C'est un objet par rapport auquel on étudie le mouvement. Donc tout mouvement est relatif au référentiel utilisé.

5) Référentiels usuels

- **Référentiel galiléen**

  Un référentiel galiléen est un référentiel où un corps isolé (n'est pas soumis à aucune force) ou semi-isolé (résultante des forces appliquées est nulle) est en translation rectiligne uniforme. Selon les durées considérées dans les expériences, les phénomènes liés à leur caractère non galiléen restent négligeables devant les autres phénomènes.

- **Référentiel terrestre (référentiel de laboratoire)**

  Il est constitué d'un point du sol et de trois axes (en général un axe vertical et deux axes dans le plan horizontal). On l'utilise pour décrire les mouvements à petite échelle des objets qui nous entourent. Un homme « immobile » est donc fixe uniquement dans le référentiel terrestre.

- **Référentiel géocentrique**

  Il a pour origine le centre de masse de la Terre et trois axes pointant vers des étoiles suffisamment lointaines pour être considérées comme fixes. Il est utilisé pour décrire des mouvements à l'échelle de la planète (mouvement des satellites).

- **Référentiel de Kepler (héliocentrique)**

  Il est constitué du centre du Soleil et de trois axes pointant vers des étoiles suffisamment lointaines pour être considérées comme fixes. Ce référentiel est utilisé pour décrire des mouvements à l'échelle du système solaire (mouvement des planètes).

- **Référentiel de Copernic**

  Le référentiel de Copernic est le référentiel centré sur le centre de masse du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles éloignées.

III Caractéristiques du mouvement

L'étude du mouvement d'un mobil peut s'effectuer d'une façon :

- Algébrique : fait appel aux équations horaires de mouvement.
- Vectorielle : en utilisant les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{V}$ et accélération $\vec{a}$

1) Les équations horaires

Un point matériel est au *repos* dans un repère choisi si ses coordonnées *x y z*sont indépendantes du temps et il est en mouvement si ses coordonnées varient en fonction dutemps.

Les variations des coordonnées d'un point matériel en fonction du temps s'appellent les équations horaires du mouvement.

Soit $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

2) La trajectoire

La trajectoire d'un point mobile M dans un repère donné est la courbe formée par l'ensemble des positions successives du point M dans ce repère.

La trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi.

En coordonnées cartésiennes, la trajectoire est obtenue par élimination du temps des équations horaires.

3) Le vecteur position

La position d'un point matériel M au temps t est repérée dans un repère par un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ reliant l'origine du repère considéré à la position du point matériel.

En coordonnées cartésiennes, il est donné par l'expression :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

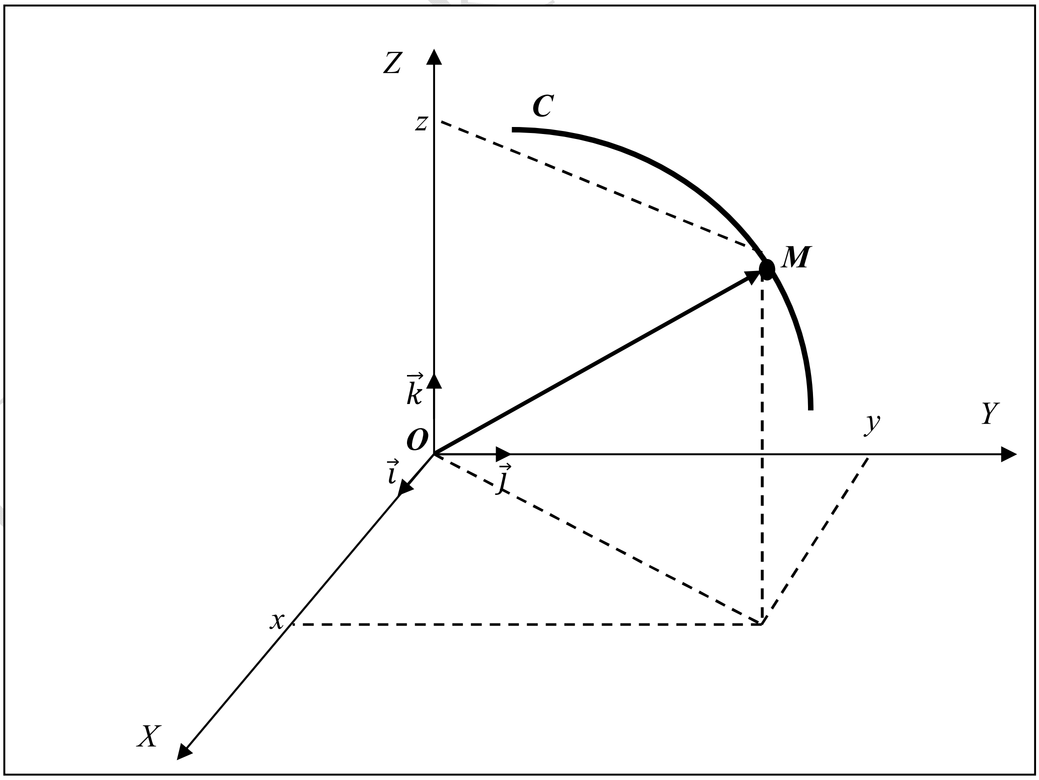


Figure 1 : Vecteur position

4) Vecteur vitesse

4-a) Vitesse moyenne

Soit un mobil (point matériel) qui passe à l'instant $t_1$par la position M_1et à l'instant t_2 par la position M_2 sur la trajectoire *C*.

La vitesse moyenne du mobil entre les instants t_1 et t_2 tel que $t_2 - t_1 = \Delta t$est donnée par

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$est le vecteur de déplacement.

Donc le vecteur de la vitesse moyenne est porté par le vecteur de déplacement.

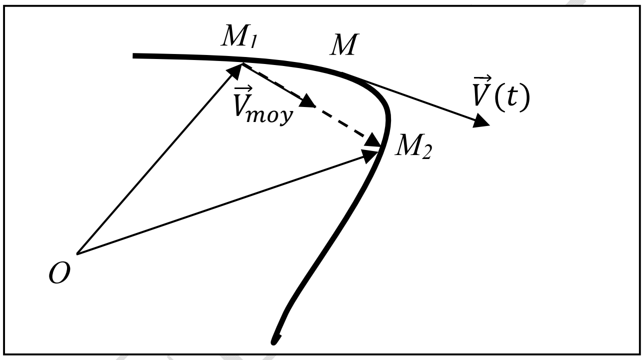


Figure 2 : Illustration de la vitesse moyenne et la vitesse instantanée

4-b) Vitesse instantanée

Le vecteur vitesse instantanée d'un mobil à l'instant *t* est donnée par :

$$\vec{V}(t) = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur vitesse instantanée$\vec{V}(t)$est porté par la tangente à latrajectoire *C* au point M et il est toujours orienté dans le sens du mouvement (Figure 1).

Dans un repère cartésien, la vitesse instantanée à l'instant *t*, est donnée à partir du vecteur position$\overrightarrow{OM}$ par la relation suivante :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{\imath} + \dot{y}(t)\vec{\jmath} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \begin{cases} V_x = \dot{x}(t) \\ V_y = \dot{y}(t) \\ V_z = \dot{z}(t) \end{cases} \Rightarrow \quad \|\vec{V}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$$

N.B : en pratique la relation entre la vitesse instantanée et la vitesse moyenne est donnée par :

$\vec{V}(t) = \vec{V}_{moy}\Big|_{t_1}^{t_2}$ tel que $t = \frac{t_1+t_2}{2}$

Cette relation est valable lorsque t_1 et très proche de t_2.

5) Vecteur accélération

5-a) Accélération moyenne

Soit un mobil (point matériel) qui passe à l'instant $t_1$par la position M_1à une vitesse$\vec{V}_1(t)$et à l'instant $t_2$par la position M_2 à une vitesse $\vec{V}_2(t)$ sur la trajectoire *C*.

L'accélération moyenne entre les instants t_1 et t_2 est donnée par :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{V}_2(t) - \vec{V}_1(t)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

5-b)Accélération instantanée

L'accélération instantanée d'un mobil est donnée par :

$$\vec{a}(t) = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\vec{V}_2(t) - \vec{V}_1(t)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

Le vecteur accélération est toujours dirigé vers la partie concave de la trajectoire.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

Soit $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} \Rightarrow \ \vec{a}(t) = \sqrt{(\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2 + (\ddot{z}(t))^2}$

Remarque : Le mouvement est dit accéléré si $\vec{a}.\vec{V} > 0$, et décéléré ou retardé si $\vec{a}.\vec{V} < 0$ quant au sens du mouvement il est indiqué par le sens de la vitesse$\vec{V}$.

6) Application

Soit, dans un plan (*P*), un repère orthonormé *xoy* et un mobile *M* se déplaçant dans ce plan.

A l'instant *t,* ses coordonnées sont définies par :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}cos\dfrac{t}{2} \\ y(t) = 2\sqrt{2}sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

a) Trouver l'équation de la trajectoire ?

b) Trouver à l'instant *t* les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$et du vecteur accélération $\vec{a}$ de ce mobile. Quelle est la relation entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$?

c) Au bout de combien de temps le mobile repasse-t-il par une même position sur la courbe ?

d) Entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 4\pi$, déterminer les positions du mobile et les coordonnées de $\vec{V}$ pour lesquelles le module de l'accélération est égal à $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Solution

a) La trajectoire

Pour obtenir l'équation de la trajectoire il suffit d'éliminer le temps entre les équations horaires

$\begin{cases} cos\frac{t}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ sin\frac{t}{2} = \frac{y}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{8}} = 1$ la trajectoire est une ellipse.

b) La vitesse et l'accélération

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}sin\dfrac{t}{2} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{2}cos\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

L'accélération

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}cos\dfrac{t}{2} \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

Donc $\vec{a} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OM}$

c) Puisque la trajectoire est une ellipse, le mouvement est périodique.

Soit T la période du mouvement, on alors

$$x(t) = x(t+T) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}cos\frac{t}{2} = \sqrt{2}cos\left(\frac{t+T}{2}\right)$$

On sait que $\cos\alpha = cos\,(\alpha + 2\pi)$

$$cos\frac{t}{2} = cos\left(\frac{t+T}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{2} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 4\pi \text{ s}$$

d) $\|\vec{a}\| = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}cos\frac{t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}sin\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

$$a^2 = \frac{2}{16}cos^2\frac{t}{2} + \frac{2}{4}sin^2\frac{t}{2} = \frac{5}{16} \quad \Rightarrow \quad 2cos^2\frac{t}{2} + 8sin^2\frac{t}{2} = 5$$

$$2\left(1 - sin^2\frac{t}{2}\right) + 8sin^2\frac{t}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad 6sin^2\frac{t}{2} = 3$$

$$\sin\frac{t}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , t > 0 \quad \Rightarrow \frac{t}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

t	V_x	V_y	x	y
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+1	*1*	*2*
$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$	*-1*	*-1*	*+2*

IV. Systèmes de coordonnées

1) Coordonnées polaires : elles décrivent le mouvement dans un plan.

- Base : $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$
- Coordonnées polaires : (ρ, θ) tel que

ρ : Composante radiale avec $\rho = \|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\|$ $(\rho > 0)$

θ : Composante angulaire : entre le rayon ρ et l'axe des abscisses (ox): $\boldsymbol{\theta} = (\vec{\boldsymbol{\imath}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM}})$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

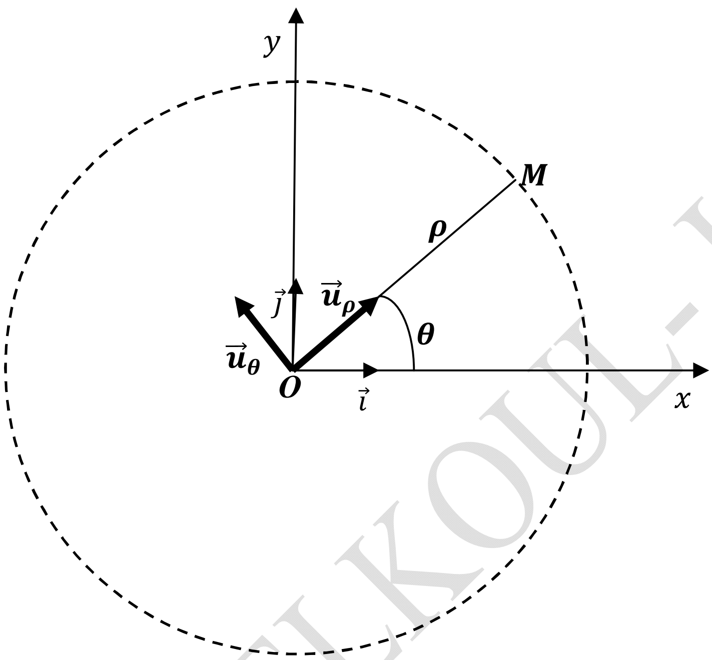


Figure 3 : coordonnées polaires

Conversion entre système polaire et cartésien

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho . cos\theta \\ y = \rho . sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg\frac{y}{x} \\ \theta = arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \theta = arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Exemple

Soit un point *A* dans un repère orthonormé dont les coordonnées cartésiennes sont $x = -3$ *et* $y = 4$.

Calculer les coordonnées polaires de ce point (l'angle sera donné en degrés).

On a $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$$\theta = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{4}{-3} = -0.92rad$$

Soit $\theta = -53.13\ deg$

1-a) Caractéristiques du mouvement en coordonnées polaires

- **Vecteur position**

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$$

- **Vecteur vitesse**

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}[\rho\vec{u}_\rho] = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}) = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Donc :$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\vec{V} = \begin{cases} V_\rho = \dot{\rho} \\ V_\theta = \rho\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \|\vec{V}\| = \sqrt{(\dot{\rho})^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$

- **Vecteur accélération**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}[\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta] = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad et \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Soit $\vec{a}\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})^2}$

2) Coordonnées cylindriques :

Le système de coordonnées cylindriques est obtenu en complétant le système de coordonnées polaires (dans le plan *xoy*) par un troisième axe : l'axe *oz* avec sa coordonnée cartésienne *z* (appelée la cote). Tout point donné par ces coordonnées appartient à un cylindre d'axe (oz) et de rayon ρ.

Base : $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

Coordonnées cylindriques d'un point *M* sont (ρ, θ, z) tel que :

ρ : Coordonnée radiale avec $\rho > 0$: projection de *OM* dans le plan *xoy.*

θ : Coordonnée angulaire avec $\theta \in [0, 2\pi]$:

z : la cote.

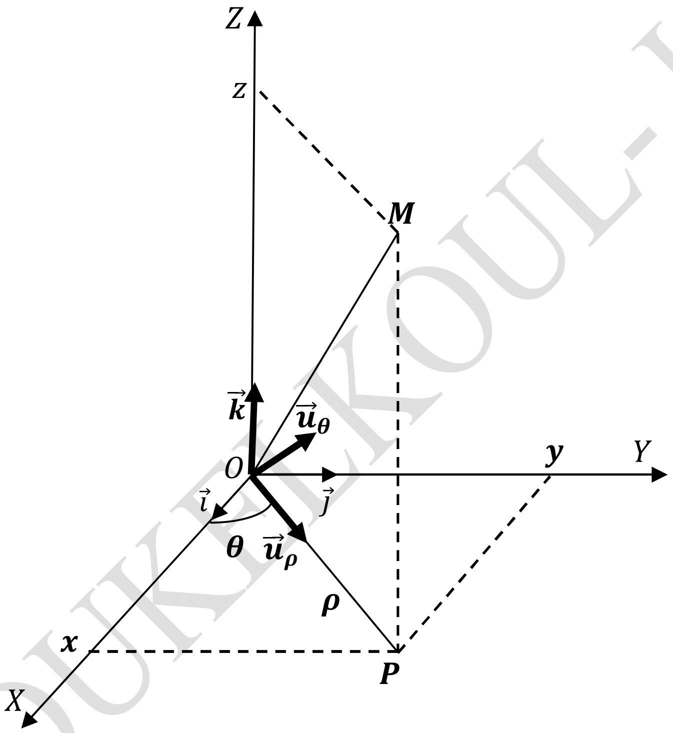


Figure 4 : Coordonnées cylindriques

Conversion entre système cylindrique et cartésien :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = cos\theta\vec{i} + sin\theta\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -sin\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho.cos\theta \\ y = \rho.sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctg\frac{y}{x} \\ \theta = arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \theta = arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Exemple

Soit un point *M* dans un repère cartésien donné par $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Trouver les coordonnées cylindriques du point *M.*

Solution

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\theta = arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

En coordonnées cylindriques, le point *M* est donné par : $M\left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right)$

2-a) Caractéristiques du mouvement en coordonnées cylindriques

- **Vecteur position**

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

- **Vecteur vitesse**

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}\right] = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}) = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Donc : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}$

$$\vec{V}\begin{cases} V_\rho = \dot{\rho} \\ V_\theta = \rho\dot{\theta} \\ V_z = \dot{z} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{V}\| = \sqrt{(\dot{\rho})^2 + \left(\rho\dot{\theta}\right)^2 + (\dot{z})^2}$$

- **Vecteur accélération**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right] = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad et \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k}$$

Soit $\vec{a}\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)^2 + (\ddot{z})^2}$

3) Coordonnées sphériques :

Les coordonnées sphériques (figure 6) permettent de repérer un point sur une sphère de rayon $OM = r$. C'est typiquement le repérage d'un point sur la terre pour lequel il suffit alors de préciser deux angles : la latitude et la longitude.

Base : $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$

Coordonnées sphériques d'un point *M* sont (r, θ, φ) tel que :

$$\boldsymbol{r} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\|$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \left(\vec{\boldsymbol{\imath}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM'}}\right) \ (\boldsymbol{\varphi} \in [0, 2\pi])$$

$\boldsymbol{\theta} = \left(\vec{\boldsymbol{k}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\right)$ $(\theta \in [0, \pi])$ et *M'* est la projection de *M* sur le plan *Oxy.*

θ : Coordonnée angulaire. Elle est appelée la latitude ou le zénith.

φ : Coordonnée angulaire. Elle est appelée la longitude ou l'azimut.

Le point *M* est situé sur une sphère de rayon r.

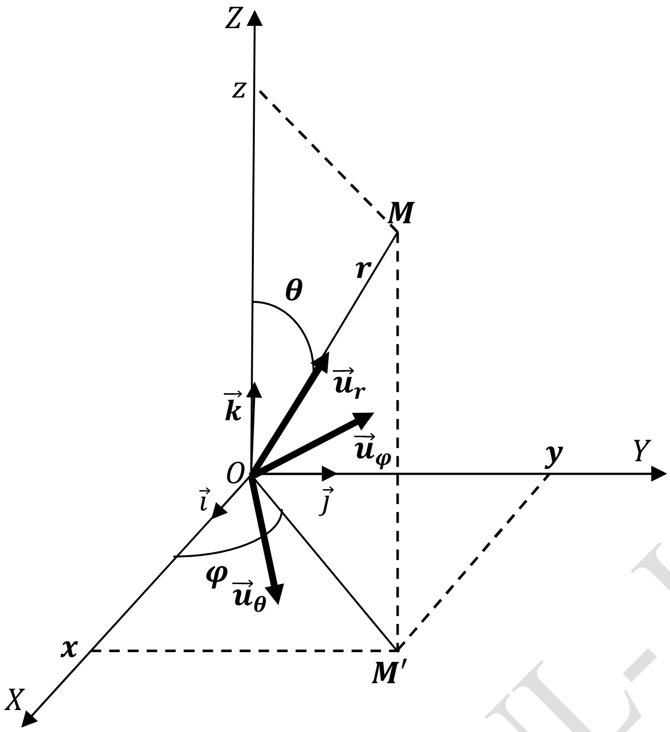


Figure 5 : Coordonnées sphériques

Conversion entre système sphérique et cartésien

$$\begin{cases} x = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi = arctg\,\frac{y}{x} \end{cases}$$

Exemple

Soit un point *M* dans un repère cartésien donné par *M* $\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Trouver les coordonnées sphériques du point *M*.

Solution

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 \\ \theta = arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\pi}{4} \\ \varphi = arctg\frac{y}{x} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

En coordonnées sphériques, le point *M* est donné par : $M\left(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

3-a) Caractéristiques du mouvement en coordonnées sphériques

- **Vecteur position**

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

- **Vecteur vitesse**

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = sin\theta.cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta.sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k} \\ \overrightarrow{u_\theta} = cos\theta.cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta.sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k} \\ \overrightarrow{u_\varphi} = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}[r\vec{u}_r] = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\theta}\left(cos\theta sin\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k}\right) + \dot{\varphi}(-sin\theta sin\varphi\vec{\imath} + sin\theta.sin\varphi\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi$$

Donc : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}cos\theta\vec{u}_\varphi$

Soit $\vec{V}\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \\ V_\varphi = r\dot{\varphi}sin\theta \end{cases} \Rightarrow \|\vec{V}\| = \sqrt{(\dot{r})^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + (r\dot{\varphi}sin\theta)^2}$

- **Vecteur accélération**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi\right]$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\theta}\left(-sin\theta.cos\varphi\vec{\imath} - sin\theta.sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k}\right) + \dot{\varphi}(-cos\theta.sin\varphi\vec{\imath} + cos\theta.cos\varphi\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(-cos\varphi\vec{\imath} - sin\varphi\vec{\jmath}) = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{u}_\theta$$

Donc

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi) + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{u}_\varphi) + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta(-\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2sin^2\theta)\,\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2sin\theta.\cos\theta)\vec{u}_\theta + (r\ddot{\varphi}sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta)\vec{u}_\varphi$$

Soit $\vec{a}\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2sin^2\theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2sin\theta\cos\theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi}sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2 + {a_\varphi}^2}$

4) Application

Soit un mobile *M* qui effectue un mouvement dans l'espace. Les équations horaires de ce mobile sont exprimées en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} \rho(t) = t(t+1) \\ \theta(t) = \dfrac{\pi}{6}t \\ z(t) = 2t \end{cases}$$

a) Trouver le vecteur-position de *M*.
b) Trouver le vecteur-vitesse de *M*.
c) Trouver le vecteur-accélération de *M*.
d) Déduire la position de *M* à *t=2s* en coordonnées cartésiennes, polaires et sphériques.

Solution

a) Le vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho = t(t+1)\vec{u}_\rho + 2t\vec{k}$$

b) Le vecteur vitesse

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k} = (2t+1)\vec{u}_\rho + \frac{\pi}{6}(t^2+t)\vec{u}_\theta + 2\vec{k}$$

c) Le vecteur accélération

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k} = \left[2 - \frac{\pi^2}{36}(t^2+t)\vec{u}_\rho\right] + \frac{\pi}{3}[2t+1]\vec{u}_\theta$$

d) La position de *M*

A $t = 2s$, on a $\begin{cases} \rho = 6 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \\ z = 4 \end{cases}$

En coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$\begin{cases} x = \rho.cos\theta \\ y = \rho.sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3\sqrt{3} \\ z = 4 \end{cases}$$

En coordonnées polaires (ρ, θ)

$$\begin{cases} \rho = 6 \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

En coordonnées sphériques : (r, θ, φ)

$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{52} \\ \varphi = \theta_{cylind} = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{r} \Rightarrow \theta = \arccos\dfrac{4}{\sqrt{52}} = 0.98\, rads \end{cases}$$

5) L'abscisse curviligne et la base de Frenet

Dans le cas d'un mouvement curviligne il est utile d'utiliser l'abscisse curviligne pour repérer la position du point matériel. Pour cela, on fixe un point *A* de la trajectoire orientée. L'abscisse curviligne s*(t)* est alors définie comme étant la distance curviligne du point fixe *A* au point *M(t)* qu'occupe le point matériel à l'instant t :

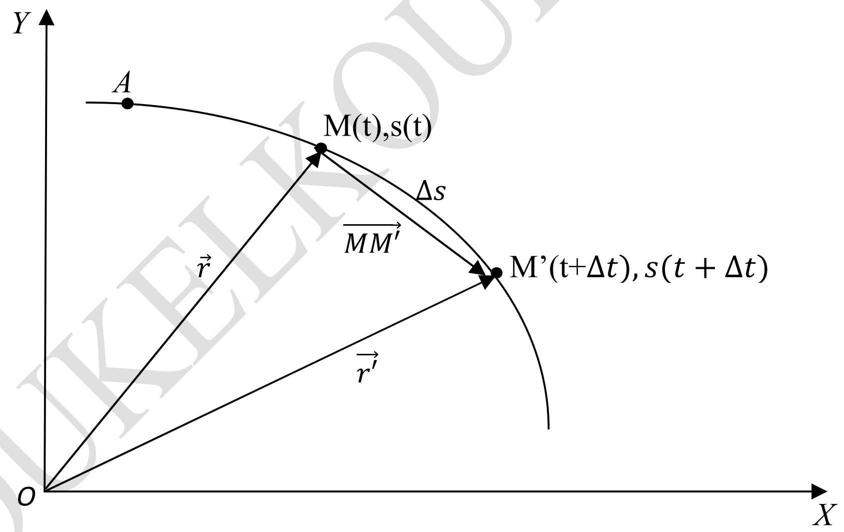


Figure 5 : Abscisse curviligne

5-a) Caractéristiques du mouvement en coordonnées curvilignes

D'après la figure 5, on a :

L'abscisse curviligne : $s(t) = \widehat{AM}$

Le déplacement curviligne $\widehat{MM'} = s'^{(t)} - s(t) = \Delta s$

La base : de Frenet est formée des vecteurs unitaires $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ tel que :

$\vec{u}_T = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$: Le vecteur unitaire tangentiel.

$\vec{u}_N = R_c \frac{d\overrightarrow{\vec{u}_T}}{ds}$: Le vecteur unitaire normal.

R_c est le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré.

- **Vecteur vitesse**

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T$$

$$\vec{V} = \|\vec{V}\|\vec{u}_T \Rightarrow \|\vec{V}\| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

Le vecteur vitesse est tangentiel à la trajectoire.

- **Vecteur accélération**

Le vecteur accélération dans la base de Frenet est donné par :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\|\vec{V}\|\vec{u}_T\right) = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\vec{u}_T + \|\vec{V}\|\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{ds}\frac{ds}{dt} = V.\frac{1}{R_c}\vec{u}_N$$

Alors $\vec{a} = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{R_c}\vec{u}_N$

Soit $\vec{a}\begin{cases} a_T = \frac{dV}{dt} & composante\ tangentielle \\ a_N = \frac{V^2}{R_c} & composante\ normale \end{cases} \Rightarrow \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

V. Exemples de mouvements

1. Mouvement rectiligne uniforme

Ce mouvement est caractérisé par une accélération nulle $\vec{a} = \vec{0}$

Par conséquent :

- Trajectoire rectiligne
- $V(t) = \int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t a dt = cte = V_0$
- $x(t) = \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V dt = V_0 t + x_0$

2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Ce mouvement caractérisé par une accélération constante *a=cte.*

Par conséquent :

- Trajectoire rectiligne
- $V(t) = \int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t a dt = at + V_0$
- $x(t) = \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V dt = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$
- $V^2 - {V_0}^2 = 2a(x - x_0)$

3. Mouvement rectiligne sinusoïdal

Ce mouvement est périodique de période *T* et son équation horaire (élongation) est donnée par :

$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$tels que :

A : l'amplitude et le mobile oscille entre *–A* et *+A*.

$\varphi(t) = \omega t + \varphi$:La phase instantanée (à l'instant t)

φ : La phase initiale ($\varphi(t = 0)$)

ω : La pulsation (rad/s) et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

f : La fréquence (Hz).

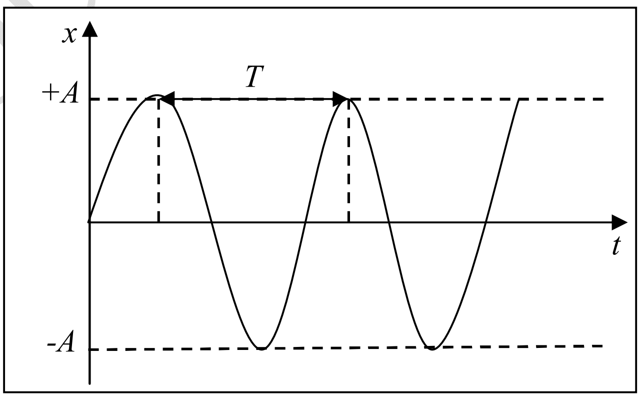


Figure 6 : Mouvement rectiligne sinusoïdal

Par conséquent

- $\dot{x}(t) = -A\omega sin(\omega t + \varphi)$
- $\ddot{x}(t) = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$
- $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$: L'équation différentielle de mouvement.

4. Mouvement circulaire

On considère le mouvement d'un point matériel *M* dont la trajectoire est un cercle dans le plan *xoy* de centre *o* et de rayon *R*.

Le vecteur position s'écrit dans la base cartésienne

$$\overrightarrow{OM} = Rcos\theta\vec{\imath} + Rsin\theta\vec{\jmath}$$

Ou dans la base polaire

$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_\rho$ avec $\vec{u}_\rho = -\vec{u}_N$

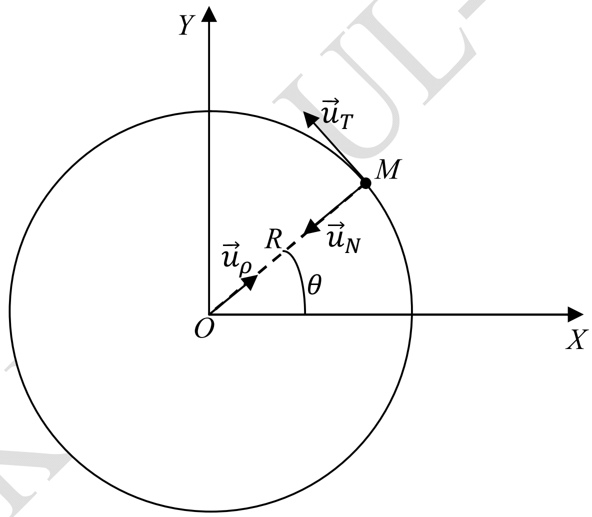


Figure 7 : Mouvement circulaire

Par conséquent

- $ds = Rd\theta$
- $\vec{V}(t) = R.\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_T \Rightarrow V = R\omega$ où $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire
- Si La rotation s'effectue autour de l'axe *oz*, on définit le vecteur rotation $\vec{\omega}$ telque :

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$

- On peut montrer que : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$
- $\vec{a}(t) = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{R}\vec{u}_N = R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_T + R\omega^2\vec{u}_N$

Remarque

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme la vitesse angulaire est constante, c.à.d. que l'accélération angulaire est nulle :

$$\omega = cte \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

L'accélération tangentielle étant nulle et l'accélération n'a que la composante normale.

$$\vec{a}(t) = R\omega^2\vec{u}_N$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est toujours normale à la trajectoire et orientée vers le centre du cercle. C'est une accélération centripète.

I. Mouvement à accélération centrale

Un mouvement est dit à accélération centrale si à tout instant le vecteur accélération (force) est toujours dirigé vers un point fixe *C* appelé : centre des accélérations.

$$\vec{a}//\overrightarrow{CM} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\wedge\overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

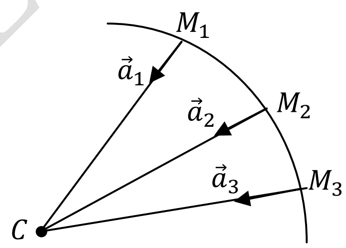


Figure 8 : Mouvement à accélération centrale

VI. Mouvement relatif

1) Introduction

Le mouvement est le déplacement d'un corps par rapport à un point fixe de l'espace à un moment donné. Donc le mouvement et le repos sont deux notions relatives qui dépendent de la position du mobile par rapport au corps pris comme référence.

Physiquement :

Le mouvement absolu : est celui qui s'effectue dans un référentiel absolu qui est « fixe ».

Le mouvement relatif : est celui qui s'effectue dans le référentiel relatif qui lui-même effectue un mouvement (translation ou rotation) par rapport au référentiel absolu.

2) Composition de mouvements

On considère deux référentiels $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $R'(O',\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ en mouvement l'un par rapport à l'autre. On suppose que *R* est fixe et que l'on appelle référentiel absolu. Le référentiel *R'* est appelé relatif car il est en mouvement par rapport à *R*. on étudie le mouvement d'un point matériel *M* par rapport aux deux référentiels.

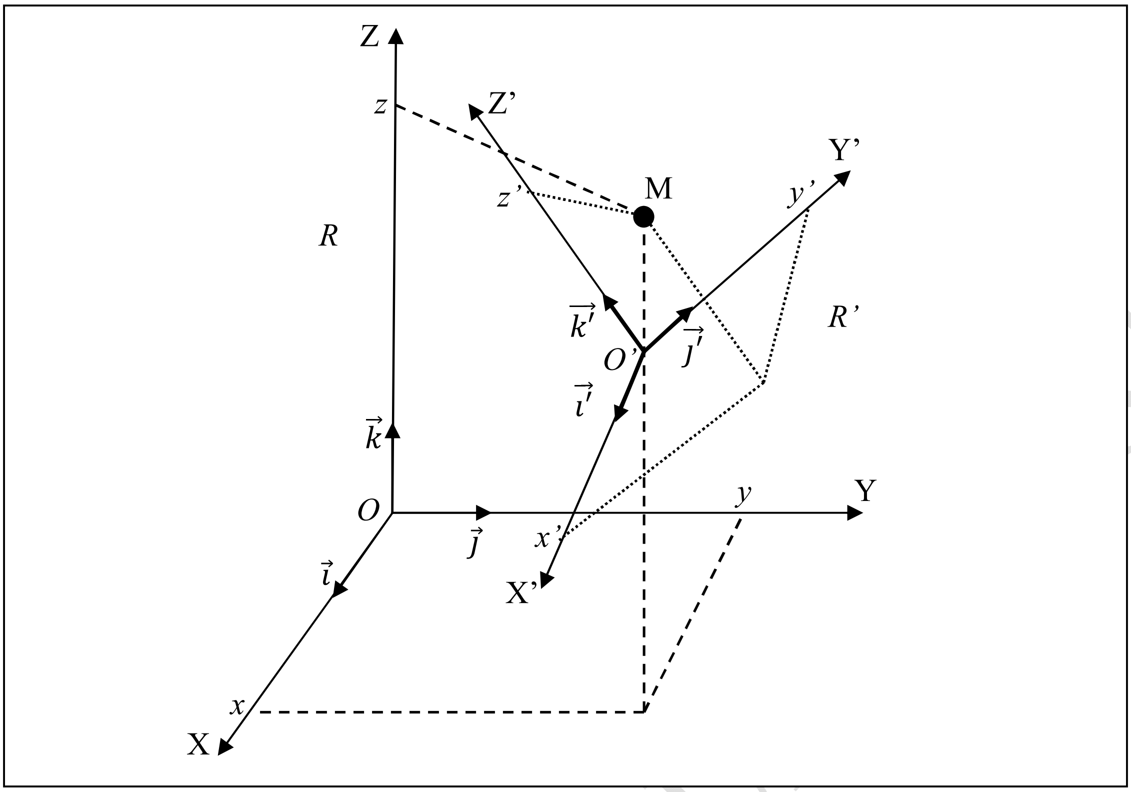


Figure 9 : Illustration du mouvement relatif

3) Le mouvement absolu

Le mouvement de *M* par rapport au référentiel *R* est appelé mouvement absolu.

3-1. Le vecteur position absolue.

La position du point *M* dans le référentiel absolu est donnée par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

3-2. Le vecteur vitesse absolue

La vitesse absolue du point *M* est la vitesse du point matériel *M* par rapport au référentiel absolu *R*.

Son expression est donnée par :

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

Avec $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = \vec{0}$

3-3. Le vecteur accélération absolue

Il est obtenu en dérivant le vecteur vitesse absolue par rapport au temps dans le référentiel absolu

$$\vec{a}_a = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_R = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

4) Le mouvement relatif

Le mouvement de *M* par rapport au référentiel relatif est appelé le mouvement relatif.

4-1. Le vecteur position relative

La position relative du point M est donnée par ses coordonnées dans le référentiel relatif *R'*.

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}$$

Telle que la base $(\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$ est mobile dans *R* et fixe dans *R'*.

4-2. Le vecteur vitesse relative

La vitesse relative de *M* est la vitesse du point matériel par rapport au référentiel relatif *R'*. Elle est donnée par la dérivée du vecteur position relative par rapport au temps dans le repère relatif.

$$\vec{V}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} = \dot{x}'\vec{\imath'} + \dot{y}'\vec{\jmath'} + \dot{z}'\vec{k'}$$

Telles que : $\left.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right|_{R'} = \left.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right|_{R'} = \left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_{R'} = \vec{0}$

4-3. Le vecteur accélération relative

L'accélération relative est obtenue en dérivant la vitesse relative par rapport au temps dans le référentiel relatif *R'*.

$$\vec{a}_r = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath'} + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\jmath'} + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{k'} = \ddot{x}'\vec{\imath'} + \ddot{y}'\vec{\jmath'} + \ddot{z}'\vec{k'}$$

5) Composition de mouvements

Le mouvement de référentiel relatif par rapport au référentiel absolu est ramené à la composition d'un mouvement de translation rectiligne et d'un mouvement de rotation.

5-1. Composition des vitesses

La composition des vitesses consiste à trouver la relation entre $\vec{V}_a$ et $\vec{V}_r$.

D'après la figure ci-dessus :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d}{dt}\right|_R \left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right)$$

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{V}_a = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right) + \left(\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

Donc $\quad \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

Avec

$$\begin{cases} \vec{V}_a = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R & la\ vitesse\ absolue \\ \vec{V}_r = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} & la\ vitesse\ relative \\ \vec{V}_e = \underbrace{\left.\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R}_{\substack{vitesse\ de\ translation \\ de\ R'\ par\ rapport\ à\ R}} + \underbrace{x'\dfrac{d\vec{i'}}{dt} + y'\dfrac{d\vec{j'}}{dt} + z'\dfrac{d\vec{k'}}{dt}}_{\substack{vitesse\ de\ rotation\ de\ R' \\ par\ rapport\ à\ R}} & la\ vitesse\ d'entrainement \end{cases}$$

Cas particuliers

a) *R'* est en translation par rapport à *R*

Dans ce cas la base relative $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ est fixe par rapport à *R*

Donc $\left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_R = \vec{0}$

Alors $\vec{V}_e$ est indépendante de *M* et vaut : $\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R \Rightarrow \vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R$

b) *R'* est en rotation par rapport à *R*

Si le référentiel *R'* est en rotation par rapport au référentiel *R* avec une vitesse angulaire$\vec{\omega}$.Les vecteurs de la base relative sont aussi en rotation avec lamême vitesse angulaire. En utilisant les résultats précédents, on obtient les dérivées temporelles respectives des vecteurs de base :

$$\left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{i'} \quad \left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{j'} \quad \left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{k'}$$

$$\vec{V_e} = x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + y'\frac{d\vec{k'}}{dt} = x'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{i'}\right) + y'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{j'}\right) + z'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{k'}\right)$$

$$= \vec{\omega}\wedge\left(x'\vec{i'}\right) + \vec{\omega}\wedge\left(y'\vec{i'}\right) + \vec{\omega}\wedge\left(z'\vec{i'}\right) = \vec{\omega}\wedge\left(x'\vec{i'} + y'\vec{i'} + z'\vec{i'}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V_e} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

Donc $\vec{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \vec{V_r} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$

c) Cas général :*R'* est en mouvement quelconque par rapport à *R*

$$\vec{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \vec{V_r} + \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

5-2. Composition des accélérations

$$\vec{a_a} = \frac{d\vec{V_a}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + +y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + +z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$\vec{a_a} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2}$$
$$+ \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$

$$\vec{a_a} = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}\right) + \left(\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$

Avec

$$\begin{cases} \vec{a}_a = \dfrac{d\vec{V}_a}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad accélération\ absolue \\ \vec{a}_r = \dfrac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath'} + \dfrac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath'} + \dfrac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'} \ accélération\ relative \\ \vec{a}_e = \left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + x'\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2} \quad accélération d'entrainement \\ \vec{a}_c = 2\left(\dfrac{dx'}{dt}\dfrac{d\vec{\imath'}}{dt} + \dfrac{dy'}{dt}\dfrac{d\vec{\jmath'}}{dt} + \dfrac{dz'}{dt}\dfrac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right) \quad accélération\ de\ Coriolis \end{cases}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Avec :

$$\vec{a}_r = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{R'} = \frac{d\vec{V}_r}{dt}$$

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + x'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$$

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + x'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath'}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{k'}\right)$$

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge x'\vec{\imath'}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge y'\vec{\jmath'}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge z'\overrightarrow{k'}\right)$$

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{a}_e = \underbrace{\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R}_{translation} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{rotaion} + \underbrace{\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}_{centripète}$$

$$\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right) = 2\left(\frac{dx'}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath'}\right) + \frac{dy'}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'}\right) + \frac{dz'}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{k'}\right)\right)$$

$$\vec{a}_c = 2\left(\left(\vec{\omega}\wedge\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'}\right)+\left(\vec{\omega}\wedge\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'}\right)+\left(\vec{\omega}\wedge\frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)\right)$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\left(\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'}+\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'}+\frac{dy'}{dt}\vec{k'}\right)$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$$

Soit

$$\vec{a}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{R'} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{R} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$$

Remarques

L'accélération de Coriolis (en l'honneur du savant français Gaspard-Gustave Coriolis) permet d'interpréter plusieurs phénomènes tels que :

- Le mouvement des masses d'air et des cyclones.
- La déviation des projectiles à grande portée.
- La déviation du plan de mouvement d'un pendule.
- La légère déviation vers l'est lors d'une chute libre etc.

Applications

Exercice 1

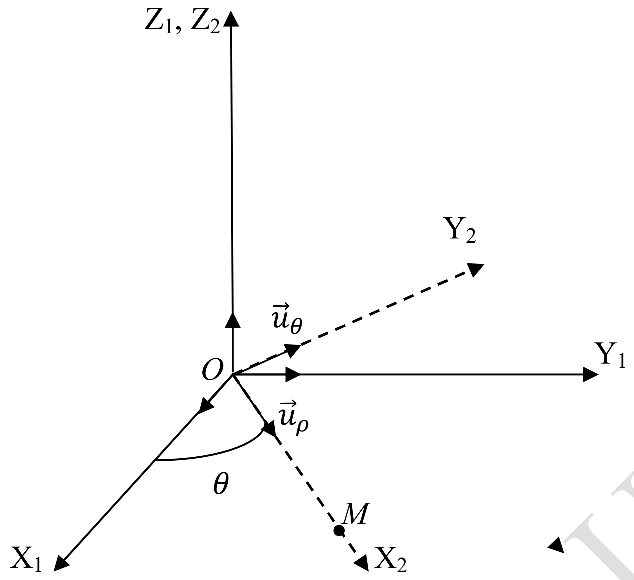
Des flocons de neige tombent verticalement à une vitesse de *8m/s* .

Avec quelle vitesse et quel angle (direction) ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant à une vitesse de 50 *km/h*.

Exercice 2

On considère dans un repère R_1 *(O,* X_1*,* Y_1*,* Z_1*)* un deuxième repère R_2 (O, X_2, Y_2, Z_2) qui tourne autour de l'axe OZ_1tel que l'axe OX_2 forme un angle θ avec l'axe OX_1 (figure ci-dessous).

Un point *M* se déplace sur l'axe OX_1. Sa position est donnée par r .



Calculer :

1) La vitesse et l'accélération relatives du point *M*.
2) La vitesse et l'accélération d'entrainement du point *M*.
3) L'accélération de Coriolis
4) En déduire la vitesse et l'accélération du point *M* dans R_1 en coordonnées polaires.

Solutions

Exercice 1

$\vec{V}_a$: la vitesse des flocons de neige par rapport au sol.

$\vec{V}_e$: la vitesse de la voiture par rapport au sol.

$\vec{V}_r$: la vitesse des flocons de neige par rapport à la voiture.

Soit vectoriellement

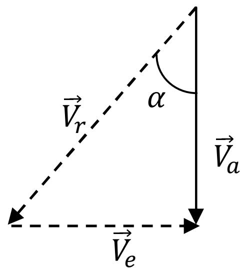
$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \Rightarrow \vec{V}_r = \vec{V}_a - \vec{V}_e \quad = \quad \vec{V}_a = \vec{V}_r + (-\vec{V}_e) \Rightarrow V_r = \sqrt{{V_a}^2 + {V_e}^2}$$

A.N : $V_e = 50\ km/h$ = 13.9 *m/s*

$V_r = \sqrt{(13.9)^2 + (8)^2} = 16\ m/s$

Pou déterminer la direction du vecteur vitesse relative, on calcule l'angle α que fait $\vec{V_r}$ avec la verticale.

$$tang\alpha = \frac{V_e}{V_a} = \frac{13.9}{8} \Rightarrow \alpha = 60.1°$$



Exercice 2

1) La vitesse et l'accélération relatives du point *M*.

Le vecteur position dans R_2 est : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_\rho$

Donc la vitesse relative dans R_2 est : $\vec{V_r} = \dot{r}\vec{u}_\rho$ (car $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta, \vec{k}$ sont invariables dans R_2)

L'accélération relative dans R_2 est : $\vec{a}_r = \ddot{r}\vec{u}_\rho$

2) La vitesse d'entrainement : est la vitesse de R_2par rapport à R_1.

$\vec{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big|_R + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$avec$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big|_R = \vec{0}$ (mouvement de R_2est de rotation et $O \equiv O'$)

Dans ce cas $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}$

$$\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\theta & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Par conséquent : $\vec{V_e} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

L'accélération d'entrainement : est l'accélération de R_2par rapport à R_1.

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\theta & \vec{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\theta & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & r\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$$

Donc $\vec{a}_e = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

3) L'accélération de Coriolis

$$\vec{a}_e = 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r = 2\begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\theta & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

4) La vitesse et l'accélération du point *M* dans R_1 sont :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \dot{r}\vec{u}_\rho + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$

Chapitre 3
Dynamique du point matériel

Dynamique du point matériel

Introduction :

La dynamique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps matériels en relation avec les causes (forces) qui le provoquent. Elle met en évidence le principe cause-effet. Elle prédit le mouvement d'un corps se trouvant dans un champ ou un milieu déterminé.

Définitions :

- **Le système matériel :**

Un système matériel est un ensemble de points matériels. Il a une masse et occupe un volume.
Il y a deux sortes de systèmes matériels :

- **Système matériel indéformable** : tous les points matériels constituant le système restent fixes les uns par rapport aux autres. Ceci correspond à la définition d'un solide en mécanique.
  Système matériel déformable : tous les systèmes ne correspondant pas à la définition d'un solide. À titre d'exemple, deux solides, sans liens entre eux, forment un système déformable lorsque chacun des solides se déplace indépendamment de l'autre.
- **Système matériel isolé :** ne subit aucune action venant de l'extérieur.
- **L'inertie :** c'est la résistance manifestée par un corps matériel si l'on veut modifier son état de mouvement (faire bouger ou arrêter un corps).
- **La masse :** la masse d'un système est la quantité de matière qu'il renferme. Elle est invariable dans le cadre de la mécanique Newtonienne
- **Le centre d'inertie :** le centre d'inertie d'un système matériel (ou centre de gravitation) correspond au point noté *G,* barycentre des positions des points matériels affectés de leur masse. Il vérifie la relation suivante :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum m_i}$$

Soit en coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\ y_G = \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \\ z_G = \dfrac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \end{cases}$

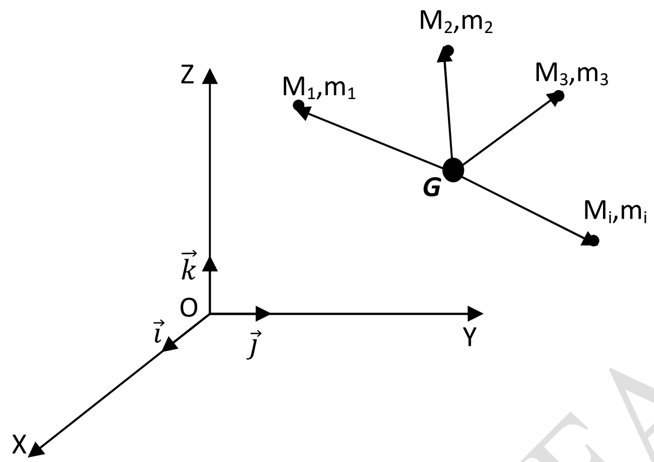


Figure 1 : le centre d'inertie

I Vecteur quantité de mouvement :

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse *m* se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{p}$ donné par :

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$$

Ce vecteur est colinéaire à la vitesse du point et dépend du référentiel dans lequel est exprimée la vitesse.

Pour un système matériel constitué de *n* masses $m_i$se déplaçant aux vitesses $\vec{v}_i$, le vecteur quantité de mouvement correspond à la somme des vecteurs quantité de mouvement de chacune des parties (points) constituant le système.

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{tot} = \vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2 + \vec{\boldsymbol{p}}_3 + \ldots\ldots\vec{\boldsymbol{p}}_n = \sum_i^n \boldsymbol{m}_i\vec{\boldsymbol{v}}_i = \sum_i^n \vec{\boldsymbol{p}}_i$$

Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un système matériel isolé est constante. Par conséquent S'il y a variation de la vitesse ou de la quantité de mouvement cela implique quela particule n'est pas libre.

Exemple :

Pour un système isolé constitué de deux particules

A l'instant t : $\vec{\boldsymbol{p}}_{tot} = \vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2$

A l'instant t' :$\overrightarrow{\boldsymbol{p}'}_{tot} = \overrightarrow{\boldsymbol{p}'}_1 + \overrightarrow{\boldsymbol{p}'}_2$

Le système est isolé

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p'}_1 + \vec{p'}_2$$

$$\vec{p'}_1 - \vec{p}_1 += -(\vec{p'}_2 - \vec{p}_2 +)$$

$$\Rightarrow \ \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p'}_1$$

Donc dans un système isolé, il y a une compensation de la quantité de mouvement.

Les principes de la dynamique

La mécanique et plusieurs branches de la physique, prennent leurs fondements dans des principes ou des postulats que l'on ne démontre pas. Parmi ceux-ci, on trouve les principes de la mécanique qui sont à la base de l'étude de mouvement des systèmes matériels.

Principe d'inertie : première loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel isolé est :

- Soit au repos.
- Soit en mouvement rectiligne uniforme.

Conséquences :

Référentiel galiléen : On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique.

Principe (fondamental) de la dynamique : deuxième loi de Newton

La notion de force

La force est l'ensemble des actions subie par un système (point) matériel. Elle est modélisée par un vecteur associé au point d'application.

La force peut être :

- ***Force d'interaction à distance :***comme les forces de gravitation, les forces électromagnétiques, les forces nucléaires de cohésion.
- ***Force de contact*** comme les forces de frottement et de tension.

Principe fondamental de la dynamique : deuxième loi de Newton

Si un système *S* de masse *m* et centre d'inertie *G* se déplace dans un référentiel Galiléen et subit une action non compensée (il n'est pas isolé). D'après le principe de la dynamique, la quantité de mouvement de ce système ne peut être constante dans le temps.

c.à.d. Le principe (ou relation) fondamental(e) de la dynamique nous permet de lier la cause (actions non compensées) à l'effet observé (variation de la quantité de mouvement).

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Cas particuliers

a) Cas d'une masse constante :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Si la résultante des forces est constante, alors $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \overrightarrow{cte}$ et le mouvement est rectiligne uniformément varié.

b) Cas d'une masse variable

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Théorème du moment cinétique

Définition du moment cinétique

Considérons un point matériel *M* en rotation autour d'un axe fixe Δ dans un référentiel Galiléen *R*(*O, x, y, z*). On appelle moment cinétique du point *M* par rapport à un point fixe *O* de l'axe Δle moment de sa quantité de mouvement que l'on note :

$$\vec{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Le moment cinétique total d'un système composé de points ($m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$) est donné par :

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

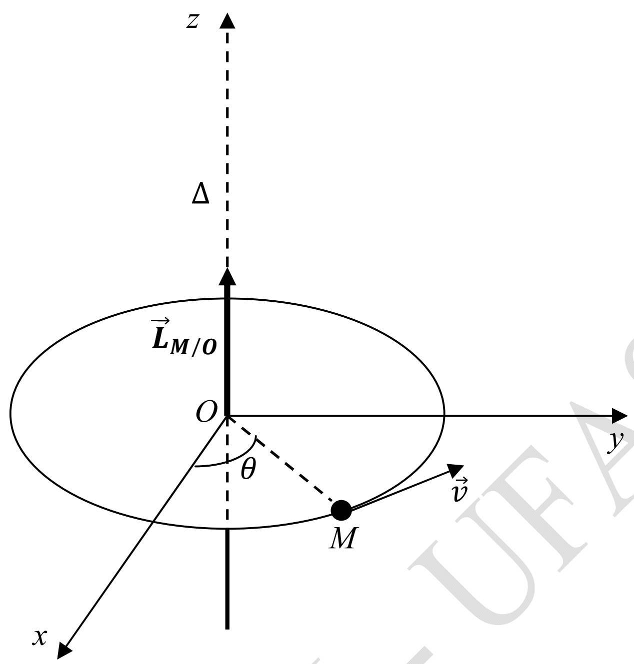


Figure 2 : Illustration du moment cinétique

Théorème du moment cinétique

La dérivée du moment cinétique par rapport au temps est égale au moment de la résultante des forces appliquées sur le corps par rapport au même point.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM}\wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v}\wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM}\wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{OM}\wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{a} = \overrightarrow{OM}\wedge\sum\vec{F}_{ext} = \vec{M}_o(\vec{F}_{ext})$$

Cas particulier

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\sum\vec{F}_{ext} = \vec{0} \;\Rightarrow \begin{cases}\sum\vec{F}_{ext} = \vec{0} \;\; système\ isolé \\ \overrightarrow{OM}//\sum\vec{F}_{ext} \;\; force\ centrale\end{cases}$$

Force centrale

Un mouvement est dit central ou sous l'action d'une force centrale si la résultante des forces appliquées sur le mobile est à tout moment dirigée vers un point fixe *C*.

Soit

$$\overrightarrow{CM} // \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\overrightarrow{CM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Principe des actions réciproque : troisième loi de Newton

A toute action il y a une réaction : Lorsque deux systèmes S_1 et S_2 sont en interaction mutuelle ; quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement (ou l'absence de mouvement) ; la force appliquée par le premier système sur le deuxième est égale et avec un signe contraire à la force appliquée par le deuxième système sur premier système.

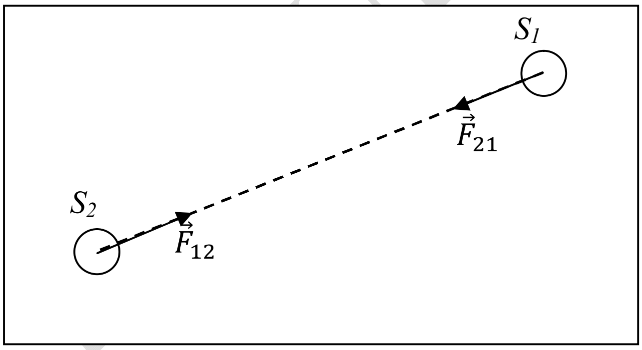


Figure 3 : Illustration du principe des actions réciproques

Soit un système isolé constitué de deux particules :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{cte} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Forces d'interaction à distance

a) Force de gravitation newtonienne

On appelle ***force de gravitation*** ou ***force d'interaction gravitationnelle***, la force d'attraction exercée par une masse $m_1$sur une autre masse m_2 et qui est dirigée selon la droite qui relie les deux masses.

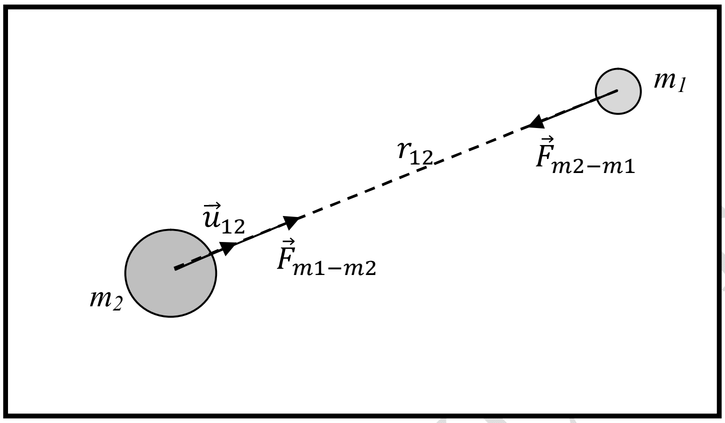


Figure 4 : Illustration de la force d'interaction gravitationnelle.

La force de gravitation entre les masses $m_1$et m_2 est donnée par :

$$\vec{F}_{m1-m2} = G\frac{m_1.m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$

Où :

$G=6.672\ Nm^2kg^{-2}$: La constante de gravitation universelle.

$\vec{u}_{12}$: Le vecteur unitaire dirigé de $m_1$vers m_2

Cas particulier :

Gravitation d'un corps au voisinage de la terre :

Soit un corps de masse *m* qui se trouve dans le champ de la gravitation terrestre. La force exercée par la terre de masse *M* sur *m* est donnée par :

$$\vec{F} = G\frac{M.m}{r^2}\vec{u}_r = \vec{P} = m\vec{g}$$

$\vec{g}$: représente l'accélération de la pesanteur au point où se trouve le corps *m.*

Soit :

$$\vec{g} = G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow \|\vec{g}\| = G\frac{M}{r^2}$$

Au voisinage de la surface de la terre *r=R* (*R* rayon de la terre) :

$$\|\vec{g}\| = G\frac{M}{R^2} \approx 9.98m/s^2$$

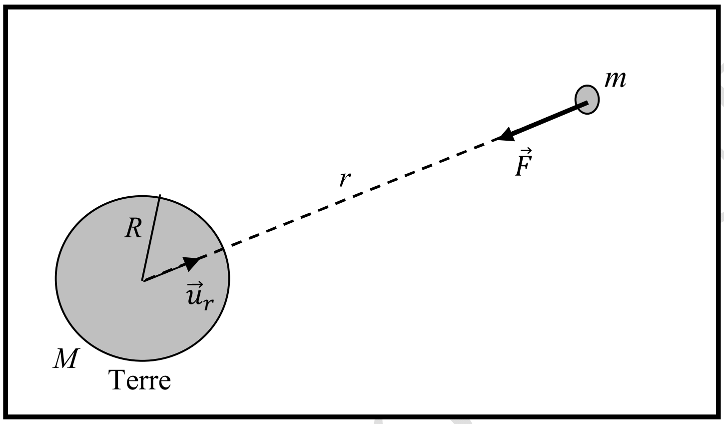


Figure 5 : illustration de la force de gravitation au voisinage de la terre

Mouvement d'un projectile

Le mouvement d'un projectile soumis uniquement à son poids (les forces de frottement son négligées) a les caractéristiques dynamiques suivantes :

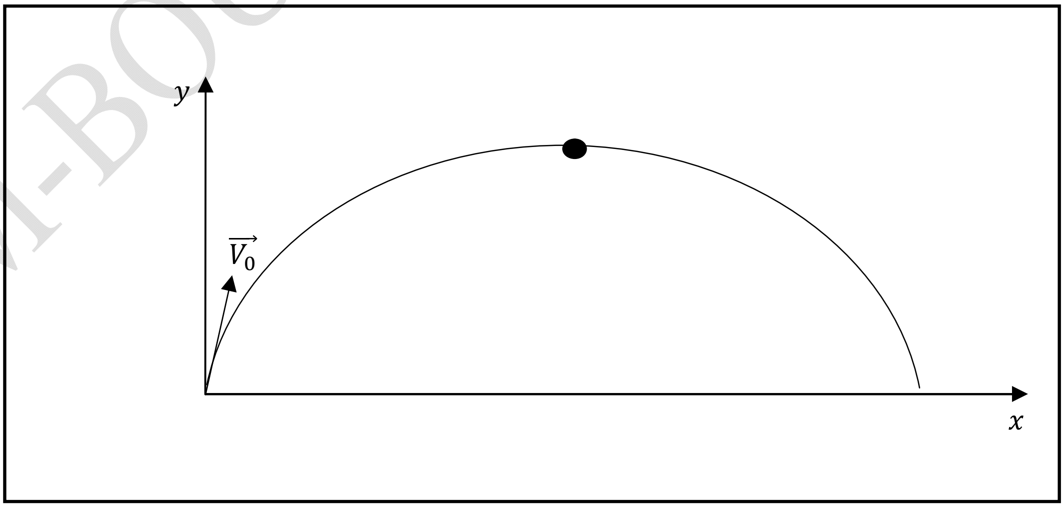


Figure 6 : Illustration du mouvement d'un projectile.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = (V_0 \cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est donnée par :

$$y = -\frac{1}{2V_0} \frac{g}{\cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha)x$$

L'apogée : la hauteur maximale atteinte par le projectile. Elle correspond à :

$V_y = 0 \Rightarrow t = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$

Donc

$$y_{max} = -\frac{g}{2}\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + V_0 \sin\alpha \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right) = \frac{{V_0}^2 sin^2\alpha}{2g}$$

La portée : la distance horizontale maximale. Elle correspond à :

$$y = 0 \;\Rightarrow\; x_{max} = \frac{2V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Les forces de contact

Réaction du support

La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance du support s'appelle ***réaction du support***. La réaction du support sur un objet est répartie sur toute la surface de contact support-objet. On peut représenter cette action par une force, résultante de toutes les actions exercées sur toute cette surface.

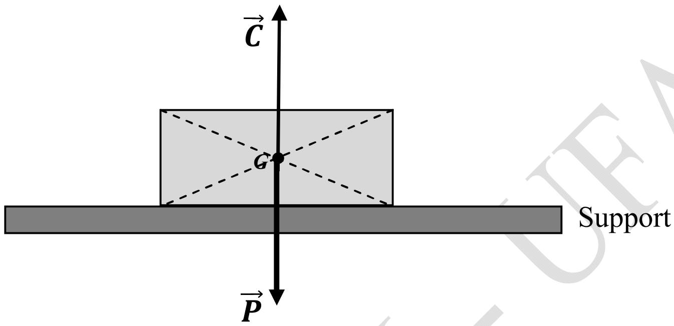


Figure 6 : Réaction d'un support

L'objet subit deux forces extérieures : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{C}$.

L'objet est en équilibre, donc d'après le PFD, on a

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{P} + \vec{C} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\vec{C}$$

Remarque :D'après le principe des actions réciproques, l'action de l'objet sur le support horizontal est exactement opposée à la réaction du support sur l'objet et correspond donc au poids de l'objet.

Forces de frottement

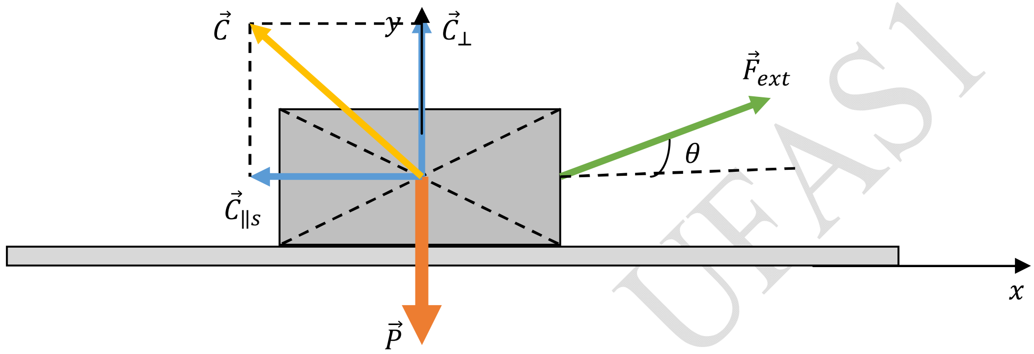
Les forces de frottement sont les forces qui apparaissent lorsqu'un objet effectue un mouvement en contact avec un autre objet (solide ou fluide).

Force de frottement solide

Le frottement solide apparait quand deux solides sont en contact. Il convient de noter que la force de frottement solide dépend de l'action subie par le solide. En effet si aucune action extérieure ne tend à déplacer un solide se trouvant sur un plan horizontal, celui-ci est au repos et la force de frottement n'existe pas.

Force de frottement statique

La force de frottement statique est la force qui maintient le corps en état de reposmême en présence d'une force extérieure. Pour illustrer cette force, on considère un corps solide sur un plan horizontal soumis à une force extérieure $\vec{F}_{ext}$.



Dans ce cas le corps est au repos. Donc d'après le PFD

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}_{ext} + \vec{P} + \vec{C} = \vec{0}$$

En projetant sur les deux axes horizontal et vertical on obtient :

$$\begin{cases} F_{ext}cos\theta - C_{\parallel} = 0 \\ C_{\perp} + F_{ext}\sin\theta - p = 0 \end{cases}$$

$C_{\perp}$est la force qui maintient lecorps au repos jusqu'à ce que la force F_{ext}appliquée arrive à l'arracher de la surface. Avant d'arracher le corps, la force de frottement statique $C_{\parallel}$atteint sa valeur maximale définie parla loi :

$$C_{\parallel s} = \mu_s C_{\perp} \Rightarrow \mu_s = \frac{C_{\parallel s}}{C_{\perp}} = \frac{F_{ext}cos\theta}{p - F_{ext}\sin\theta}$$

$\mu_s$est le coefficient de frottement statique avec $C_{\parallel} \leq C_{\parallel max}$

Si l'angle $\theta = 0$

$$\mu_s = \frac{C_{\parallel s}}{C_{\perp}} = \frac{F_{ext}}{p}$$

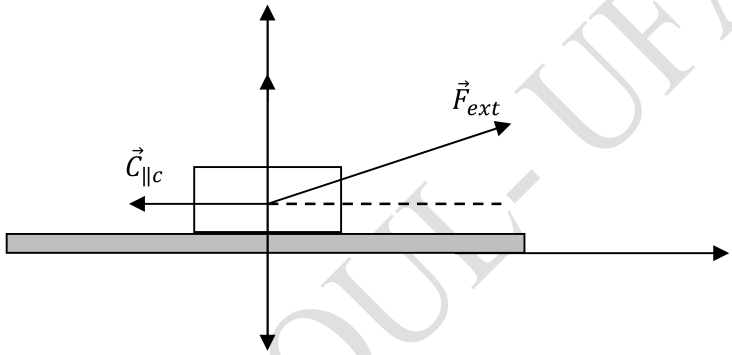
Force de frottement cinétique

La force de frottement cinétique est la force qui s'oppose au mouvement ducorps sur une surface rugueuse. Son intensité est donnée par la formule :

$$C_{\parallel c} = \mu_g C_{\perp}$$

$\mu_g$est le coefficient de frottement cinétique.

Dans le cas des forces de frottement statique le corps est au repos, par contredans le cas des forces de frottement cinétique ou dynamique le corps est en mouvement.



Dans ce cas le corps est en mouvement. Donc d'après le PFD

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{F}_{ext} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

En projetant sur les deux axes horizontal et vertical on obtient :

$$\begin{cases} F_{ext}cos\theta - C_{\parallel c} = ma & \Rightarrow C_{\parallel c} = F_{ext}cos\theta - ma \\ C_{\perp} + F_{ext}\sin\theta - p = 0 & \Rightarrow C_{\perp} = p - F_{ext}cos\theta \end{cases}$$

$$\mu_g = \frac{C_{\parallel c}}{C_{\perp}} = \frac{F_{ext}cos\theta - ma}{p - F_{ext}cos\theta}$$

Dans le cas où $\theta = 0$

$$\mu_g = \frac{C_{\parallel c}}{C_{\perp}} = \frac{F_{ext} - ma}{p}$$

Il est claire que :

$$\mu_g < \mu_s$$

Force de frottement visqueux

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz comme l'air ou liquide comme l'eau), il subit, de la part du fluide, des forces de frottement. La résultante de ces actions est un vecteur force proportionnel au vecteur vitesse de déplacement de l'objet.

On a :

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

k constante positive
Cette force n'existe que s'il y a mouvement.

Force de tension (élastique)

Les forces élastiques provoquent des mouvements périodiques. C'est une force de rappel (se dirige toujours vers l'origine du mouvement)

$$\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\overrightarrow{OM} = -k\overrightarrow{OM}$$

Si le mouvement s'effectue suivant l'axe *Ox*, la force de tension s'écrit :

$$\vec{F} = -kx\vec{\imath}$$

Avec

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Force d'inertie

Lors d'un mouvement relatif, la loi de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

L'observateur lié au repère absolu galiléen écrit :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_a = m\frac{d\vec{V}_a}{dt}$$

L'observateur lié au repère relatif non galiléen écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a}_r = m\frac{d\vec{V}_r}{dt} = m(\vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c) = m\vec{a}_a - m(\vec{a}_e + \vec{a}_c)$$

$$m\vec{a}_r = m\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{f}_i$$

Avec

$\sum_i \vec{f}_i = -m(\vec{a}_e + \vec{a}_c)$les forces d' inertie.

Applications

Exercice 1

Un corps de masse *m=0.80 kg* se trouve sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$.

Quelle force doit-on appliquer sur le corps pour qu'il se déplace

a) Vers le haut

b) Vers le bas

On suppose dans les deux cas que le corps se déplace à un mouvement uniforme puis à une accélération de $0.01 m/s^2$. On donne $\mu_g = 0.3$.

Exercice 2

Un corps de masse *10.2kg* glisse sur un plan horizontal rugueux sous l'effet d'une force d'intensité *30 N*. la direction de la force fait un angle de *45°* avec l'horizon. Le coefficient de frottement cinétique est *0.15.*

On prend $g=9.8\ m/s^2$.

1) Calculer la force normale.
2) La force de frottement cinétique
3) La résultante des forces
4) L'accélération acquise.

Exercice 3

Un point matériel de masse *m* tourne autour d'un axe perpendiculaire au plan *xoy*. Sa position est donnée à chaque instant par les coordonnées cartésiennes.

Calculer

1) Le moment du poids par rapport à *O* puis par rapport à *Oz* en fonction de *x*, *m* et *g*.
2) Le moment cinétique du point M par rapport à O puis par rapport à *Oz* en fonction de x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ *et m*.
3) Trouver l'équation du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique

Solutions

Exercice 1

c) Déplacement vers le haut (mouvement uniforme).

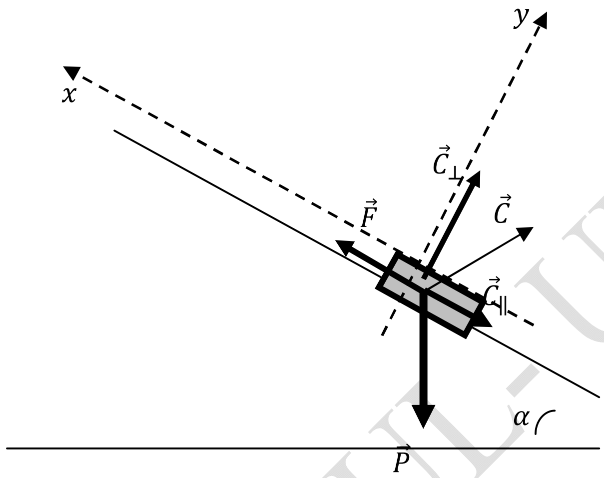


Figure 7 : Illustration du mouvement vers le haut

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$$

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{C} = \vec{0}$$

En projetant sur les axes

$$\begin{cases} ox: \ \ F = C_\parallel + P.sin\alpha \\ oy: \ \ C_\perp = Pcos\alpha \end{cases}$$

$$C_\parallel = \mu_g C_\perp$$

$$\Rightarrow \quad F = \mu_g C_\perp + Psin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad F = \mu_g Pcos\alpha + Psin\alpha$$

$$F = mg(\mu_g cos\alpha + sin\alpha)$$

Déplacement vers le haut (mouvement uniformément varié).

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

En projetant sur les axes

$$\begin{cases} ox: \ F - C_{\parallel} - P.sin\alpha = ma \\ oy: \ \ C_{\perp} = Pcos\alpha = mgcos\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \ F = C_{\parallel} + mg.sin\alpha + ma$$

$$\Rightarrow \ F = m\left(a + \mu_g g.cos\alpha + gsin\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \ F = m\left[a + g\left(\mu_g.cos\alpha + sin\alpha\right)\right]$$

A.N

F=5.95 pour a=0

F=6.03 pour a=0.10m/s^2

Déplacement vers le bas (les deux cas).

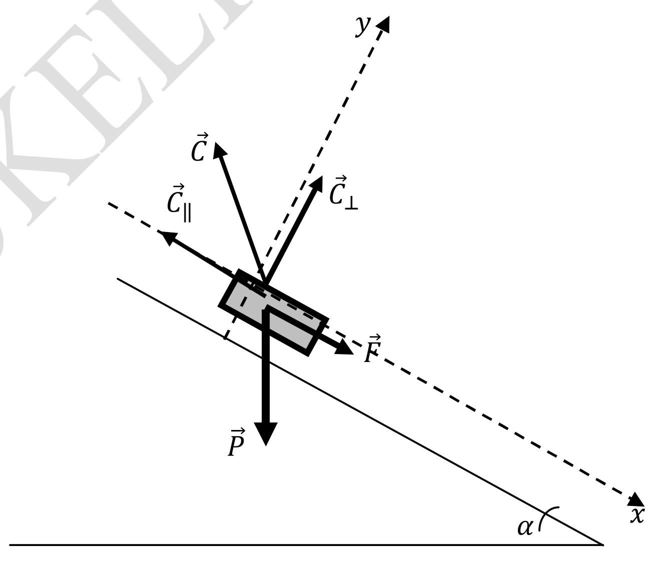


Figure 7 : Illustration du mouvement vers le bas

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

En projetant sur les axes

$$\begin{cases} ox: \; F + P.sin\alpha - C_{\parallel} = ma \\ oy: \; C_{\perp} = Pcos\alpha = mgcos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = ma + C_{\parallel} - P.sin\alpha \\ C_{\parallel} = \mu_g C_{\perp} = \mu_g mgcos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; F = m\left[a + g\left(\mu_g.cos\alpha - sin\alpha\right)\right]$$

Pour le mouvement uniforme, *a=0*

$$F = mg\left[\mu_g.cos\alpha - sin\alpha\right]$$

Exercice 2

1) Calcul de la force normale

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

En projetant sur les axes

$$\begin{cases} ox: \; Fcos\alpha - C_{\parallel} = ma \\ oy: \; C_{\perp} = P = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C_{\perp} = 10.2X9.8 = 99.96N$$

2) Calcul de la force de frottement cinétique

$$C_{\parallel} = \mu_g C_{\perp} = 0.15X99.96 = 14.99\ N$$

3) Calcul de la résultante des forces

$$F_r = Fcos\alpha - C_{\parallel} = 6.22\ N$$

4) Calcul de l'accélération acquise

$$F_r = Fcos\alpha - C_{\parallel} = ma \Rightarrow a = \frac{F_r}{m} = 0.6\ m/s^2$$

Exercice 3

1) $\vec{M}_{\vec{p}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$ avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{P} = mg\vec{\jmath}$

Donc

$$\vec{M}_{\vec{p}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} = xmg\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\vec{p}/\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}).\vec{k} = mgx$$

2) $\vec{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ m\dot{x} & m\dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k}$

$$\vec{L}_{M/O} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}).\vec{k} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

3) Equation différentielle du mouvement

$$\frac{d\vec{L}_{M/O}}{dt} = \vec{M}_{\vec{p}/O} \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{L}_{M/O}}{dt} \right\| = \left\| \vec{M}_{\vec{p}/O} \right\|$$

$$\Rightarrow \quad m(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \dot{y}\dot{x} - y\ddot{x}) = mgx$$

$$\Rightarrow \quad m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = gx$$

Chapitre 4

Travail et énergie du point matériel

Travail et énergie du point matériel

I. Travail

1. Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne

Considérons un objet assimilé à un point matériel G se déplaçant sur une portion de droite, d'un point A vers un point B, et soumis à une force $\vec{F}$constante au cours du déplacement.

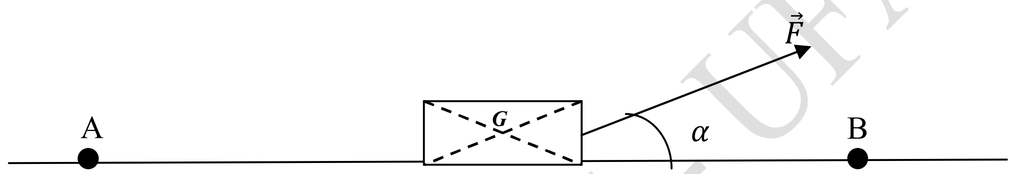


Figure 1 : Illustration du travail d'une force constante

Par définition, le travail d'une force $\vec{F}$constante sur un déplacement rectiligne AB est égal au produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement :

$$W_{A\to B} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.\cos\alpha$$

Avec $\boldsymbol{\alpha}$l'angle que fait $\vec{F}$avec $\overrightarrow{AB}$.

Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force $\vec{F}$par rapport au déplacement.

- Si $\vec{F}$est perpendiculaire à AB le travail est nul : la force F ne contribuant pas à déplacer l'objet.
- Lorsque la force s'oppose au déplacement : elle est ***résistante*** et le travail est négatif.
- Lorsque la force ne s'oppose au déplacement : elle est ***motrice*** et le travail est positif.

Unité du travail

Le travail s'exprime en joules J.

2. Travail d'une force variable sur un déplacement quelconque

2.1 Le travail élémentaire

Dans le cas où la force $\vec{F}$ varie au cours du déplacement (elle change constamment d'orientation et d'intensité i.e. $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$).

Pour calculer le travail, on décompose le trajet AB en une succession de déplacements élémentaires $\overrightarrow{dl}$ infiniment petits (rectilignes) et sur lesquels le vecteur force $\vec{F}$peut être considéré comme constant.

L'expression du travail élémentaire sur un tel déplacement élémentaire s'écrit :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Avec $\overrightarrow{dl}$ donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

2.1 Travail d'une force variable sur un déplacement quelconque

Pour obtenir le travail total de la force sur le déplacement total *AB*, il suffit d'additionner les travaux élémentaires quand on passe du point *A* au point *B*. La sommation est continue, ce qui conduit à :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

3. Exemples de calcul du travail

3.1 Travail d'une force constante : poids d'un corps.

Considérons une masse *m* se déplaçant d'un point *A* d'altitude Z_A à un point *B* d'altitude Z_B et calculons le travail du poids de ce corps au cours de ce déplacement.

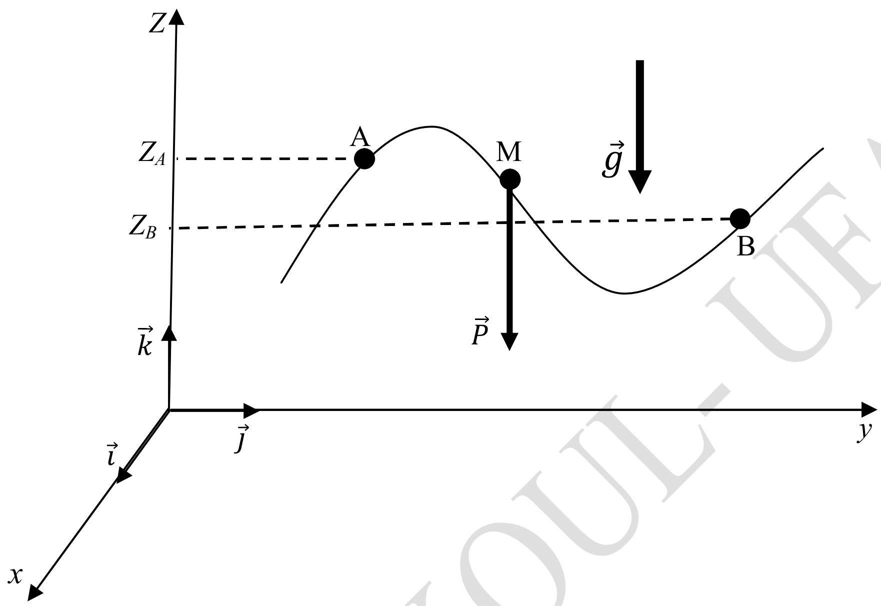


Figure 2 : Travail du poids

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{P}.\overrightarrow{dl}$$

On sait que

$$\vec{P} = -mg\vec{k} = \overrightarrow{cte}$$

Donc

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \vec{P}\int_A^B \overrightarrow{dl} = \vec{P}.\overrightarrow{AB}$$

Avec

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\imath} + (z_B - z_A)\vec{\imath}$$

$$\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$$

Remarque

Le travail de la force du poids ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale A et finale B.

3.2 Travail d'une force variable : force de tension (élastique).

Considérons un ressort de raideur k, de longueur au repos l_0, au bout duquel est accrochée une masse m comme l'indique la figure ci-dessous. Le ressort et la masse sont sur un plan horizontal et nous nous intéressons uniquement à la tension $\vec{T}$ du ressort qui s'écrit sous la forme :

$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{\imath} = -kx\vec{\imath}$$

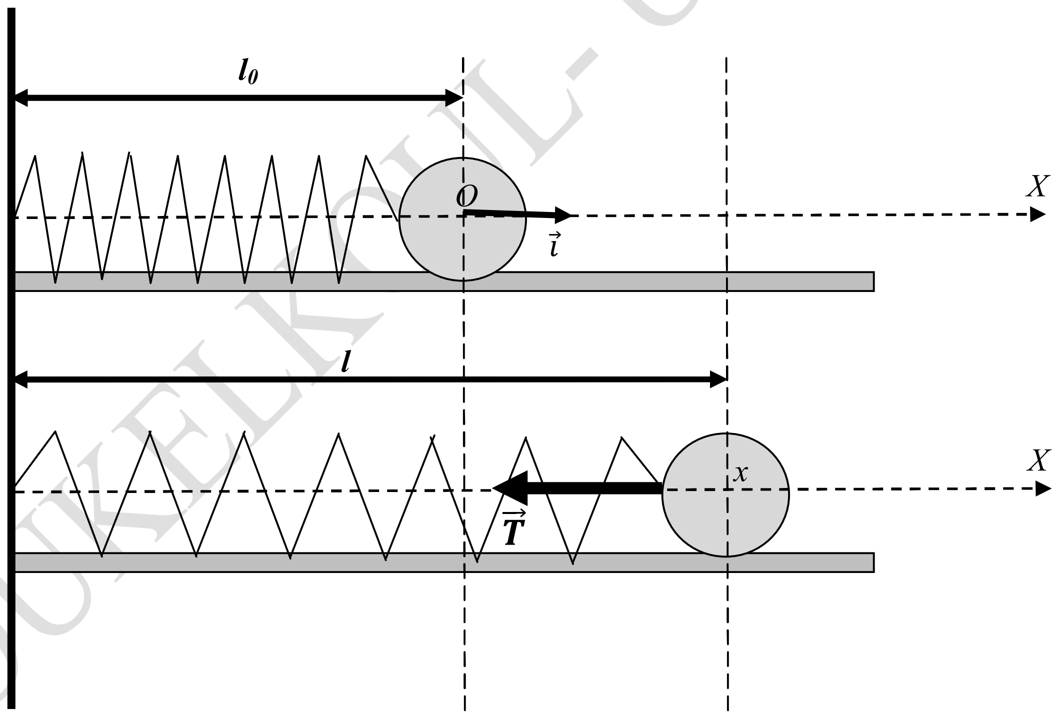


Figure 3 : Illustration de la force de tension d'un ressort

Le travail élémentaire de la force élastique $\vec{T}$ est donné par

$$dW = \vec{T}.\overrightarrow{dl}$$

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\Rightarrow dW = -kxdx$$

Lorsque le point d'application passe d'une position x_1 à une position x_2 , le travail de la force élastique est donc :

$$W_{x1\to x2}(\vec{T}) = \int_{x_1}^{x_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = \frac{1}{2}k({x_1}^2 - {x_2}^2)$$

Remarque

Le travail de la force de tension ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale du ressort.

4. Puissance d'une force

La Puissance instantanée d'une force est donnée par :

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

On peut écrire :

$$dW = P(t).dt \quad \Rightarrow \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P(t).dt$$

II. Energie

1. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse *m* ,de vitesse instantanée *v* est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

On peut exprimer l'énergie cinétique en fonction de la quantité de mouvement du point matériel. En effet, on a

$$p = mv \quad \Rightarrow E_c = \frac{p^2}{2m}$$

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

Soit

$$\Delta E_c|_A^B = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

2. Energie potentielle

Forces conservatives / non conservatives

- **Les forces conservatives** sont les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

Exemples : travail du poids, travail de la tension du ressort, travail d'une force constante.

- **Les forces non conservatives** sont les forces dont le travail dépend du chemin suivi.

Exemples : travail des forces de frottement.

Energie potentielle

L'énergie potentielle *Ep* est la fonction d'état de coordonnées dont l'intégration entre ses deux valeurs prises au départ et à l'arrivée soit égale au travail des forces conservatives.

Théorème de l'énergie potentielle

Enoncé : la variation de l'énergie potentielle est représentée par l'opposé du travail des forces conservatives, soit :

$$\Delta E_P|_A^B = E_P(B) - E_P(A) = -\sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}^C)$$

En explicitant la définition du travail, on obtient la forme intégrale de l'énergie potentielle donnée par :

$$E_P(B) - E_P(A) = -\int_A^B \vec{F}_{ext}^C . \overrightarrow{dl}$$

La forme différentielle alors s'écrit sous la forme :

$$dE_p = -\vec{F}_{ext}^C . \overrightarrow{dl}$$

La définition locale de l'énergie potentielle peut se déduire de la forme différentielle. En effet :

$$dE_p = \overrightarrow{grad}E_p . \overrightarrow{dl} = -\vec{F}_{ext}^C . \overrightarrow{dl}$$

$$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{grad}E_p = -\vec{F}_{ext}^C$$

2.2 Exemples d'énergie potentielle

a) Énergie potentielle de pesanteur

$$dE_{Pp} = -\vec{P} . \overrightarrow{dl} = mgdz$$

$$E_{Pp} = \int mgdz = mgz + c$$

L'énergie potentielle de pesanteur est définie à une constante près qui déterminée en choisissant généralement $E_{Pp}(z = 0) = 0$ (à la surface de la terre). Donc on peut écrire :

$$E_{Pp} = mgz = mgh$$

Où *h* est l'altitude du corps considéré.

b) Énergie potentielle élastique

De la même façon que l'énergie de pesanteur, on peut utiliser la forme différentielle de l'énergie potentielle pour écrire l'expression de l'énergie potentielle élastique

$$dE_{Pe} = -\vec{T}.\vec{dl} = kxdx$$

$$E_{Pe} = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + c$$

Il est clair que l'énergie potentielle élastique s'annule en absence de toute déformation

$$E_{Pe}(x = 0) = 0$$

Alors la constante *c* est nulle et on peut écrire :

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

Remarque

x dans l'expression de E_{Pe} peut être un allongement ou une compression.

3. Equilibre d'un système

Un système, livré à lui-même, évolue donc spontanément vers un état d'équilibre qui correspond à une position pour laquelle l'énergie potentielle est minimale.

Equilibre stable pour $x = x_0 \iff \begin{cases} E_p(x = x_0)\ est\ minimale \\ \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \\ \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0 \end{cases}$

Equilibre instable pour$x = x_0 \iff \begin{cases} E_p(x = x_0)\ est\ maximale \\ \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \\ \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0 \end{cases}$

4. Energie mécanique

L'énergie mécanique d'un point matériel à un instant donné est égale à lasomme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle notée par :

$$E_M = E_c + E_p$$

Exemple

Chute libre

$$E_M = \frac{1}{2}mV^2 + mgz$$

Un ressort

$$E_M = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Théorème de l'énergie mécanique (Principe de la conservation de l'énergie mécanique)

Enoncé : L'énergie mécanique d'un système soumis à une force conservative (dérivant d'un potentiel) est conservée au cours du temps.

$$E_M = E_c + E_p = cte$$

$$\Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

En d'autres termes, l'énergie mécanique d'un système isolée est conservée.

Dans le cas de présence de forces non conservatives (les forces de frottement par exemple), le théorème de l'énergie mécanique s'écrit sous la forme :

$$\Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p = \sum_i W_i(\vec{F}_{ext}^{N.C})$$

Champs de forces conservatives

Le champ d'une force conservative exercée sur un système est donné à partir de l'énergie potentielle par :

$$\vec{F}_{ext}^{C} = -\overrightarrow{grad} E_p$$

Exemple

Dans le cas d'une chute libre

$$E_p(x, y, z) = mgz$$

La force conservative responsable de la chute libre est donnée par

$$\vec{F}_{ext}^{C} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{\imath}\right) = -mg\vec{k} = \vec{P}$$

5. Applications

Exercice 1

Soit la particule M dans la plans xoy$M$ soumise à une force donnée par l'expression $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{\imath} + 2xy\vec{\jmath}$.

La particule se déplace du point *A(0, 0)* au point *B(1,3)* suivant deux chemins donnés par : $y=3x$ et $y=x^2$.

La force F est-elle conservative ?

Exercice 2

Quelle est la vitesse initiale V_0 orientée verticalement vers le haut, communiquée à un corps pour qu'il atteigne une hauteur *h* à partir de la surface de la terre ? (On néglige tous les frottements).

Exercice 3

L'énergie potentielle d'un corps est donnée par : $E_p = 2x^2 - xy + yz$.

1) Trouver l'expression de la force appliquée sur ce corps.

2) La force dérive-t-elle d'un potentiel ?

Exercice 4

Un bateau de masse *m* ayant atteint sa vitesse de croisière *v*0, coupe ses moteurs à l'instant $t = 0$. L'eau exerce une force de frottement proportionnelle à la vitesse *v* du bateau.

1) À l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Où le bateau s'arrêtera-t-il ?

2) Quel est le travail effectué par la force de frottement entre l'instant où le bateau coupe ses moteurs et celui où il s'arrête ? Le comparer à l'énergie cinétique du bateau à l'instant $t = 0$.

Exercice 5

Le corps de la figure ci-dessous a une masse $m=5\ kg$. Partant du repos, il glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale, jusqu'à ce qu'il atteigne un ressort *R* de longueur à vide $l_0 = 40cm$, de constante de raideur $k = 5000\ N\,m^{-1}$ et dont l'autre extrémité *C* est fixée au bout du plan.

On suppose qu'une force de frottement s'oppose au mouvement du corps sur le segment $AB=a$ dont le coefficient de frottement cinétique étant $\mu_c = 0.2$ puis elle s'annule sur le reste du trajet $BC = 2a$.

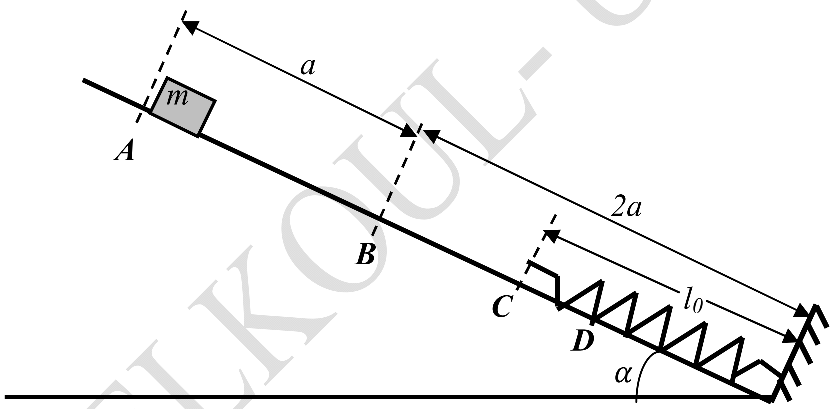
1/ Calculer la force de frottement sur le segment AB.

2/ Calculer la vitesse acquise par le corps au point B puis la vitesse V avec laquelle le corps heurte le ressort.

3/ De combien le ressort se déforme-t-il (comprimé) ?

4/ De combien le corps remonte-t-il sur le plan incliné lorsqu'il est repoussé par le ressort vers le haut à partir du point où a eu lieu le premier choc, en supposant que la remontée se fait sans frottement ?

On donne $g=9.8\ ms^{-2}$.



6. Solutions

Exercice 1

- Suivant le premier chemin : ***y=3x***

  $y=3x \Rightarrow \vec{F} = (-8x^2)\vec{\imath} + 6x^2\vec{\jmath}$

$$dy = 3dx \Rightarrow \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} = dx\vec{\imath} + 3dx\vec{\jmath}$$

$$dW_1 = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = (-8x^2dx + 18x^2)dx = 10x^2dx$$

$$W_1 = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_0^1 10x^2dx = \frac{10}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{10}{3}joules$$

- Suivant le premier chemin : $y=x^2$

  $y=x^2 \quad \Rightarrow \vec{F} = (x^2 - x^4)\vec{\imath} + 2x^3\vec{\jmath}$

$$dy = 2xdx \Rightarrow \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} = dx\vec{\imath} + 2xdx\vec{\jmath}$$

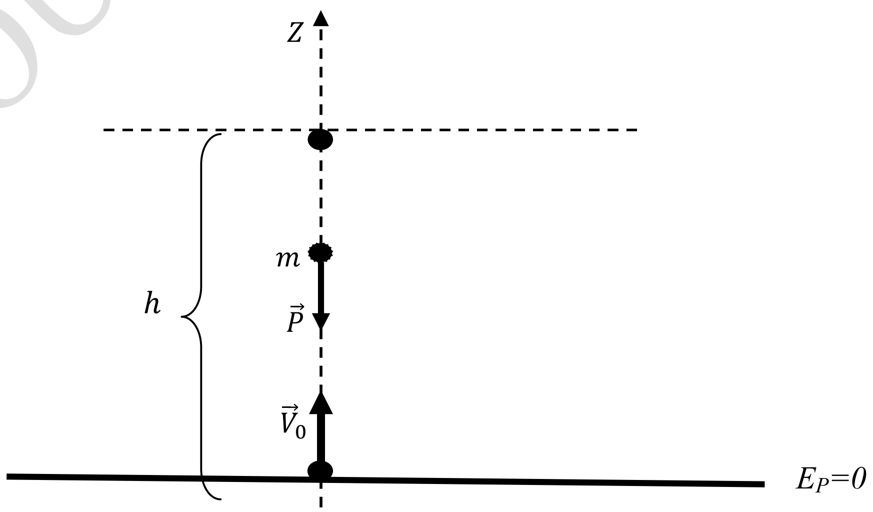
$$dW_2 = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = (x^2 - x^4)dx + 4x^4dx = (x^2+3x^4)dx$$

$$W_2 = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_0^1 (x^2+3x^4)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{12}joules$$

$W_1 \neq W_2 \Rightarrow$ La force n'est pas conservative (elle dépend du chemin suivi).

Exercice 2

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre la surface de la terre et le point atteint par le projectile



$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

Le corps est soumis uniquement à la force du poids

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum W(\vec{P}) = -mgh$$

Le corps atteint sa hauteur maximale lorsque *v=0* , d'où

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

Exercice 3

1)

$$E_p = 2x^2 - xy + yz$$

On a

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = -4x + y \\ F_y = x - z \\ F_z = -y \end{cases}$$

$$\vec{F} = (-4x + y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} - y\vec{k}$$

2) La force dérive-t-elle d'un potentiel ?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 1 \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = -1 \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = -1 \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Donc cette force dérive d'un potentiel.

Exercice 4

On considère le système bateau dans le référentiel galiléen *R*. Les forces extérieures appliquées au bateau sont :

$\vec{P}$le poids du bateau ;

$\vec{R}$la poussée de l'eau sur le bateau ;

$\vec{f}$la force de frottement.

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{f}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Ce qui conduit par projection dans la direction *x* d'avancée du bateau

$$m\frac{dV_x}{dt}=-kV_x$$

$$\frac{dV_x}{V_x}=-\frac{k}{m}dt \Rightarrow \ln V_x=-\frac{k}{m}t+C$$

Les conditions initiales du mouvement imposent que :

à *t=0* $V=V_0 \;\Rightarrow C=\ln V_0$

$$\ln\frac{V_x}{V_0}=-\frac{k}{m}t \Rightarrow V_x=V_0e^{-\frac{k}{m}t}$$

Pour trouver la position d'arrêt, il faut intégrer la vitesse, soit :

$$x=\int V_x dt=V_0\int e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\frac{mV_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}+C_1$$

À l'instant $t=0$ le bateau était en $x=0$, donc :

$$C_1=\frac{mV_0}{k}\Rightarrow \quad x=\frac{mV_0}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Le bateau s'arrêtera au bout d'un temps infini à la position : $x_a=\frac{mV_0}{k}$

2) Par définition, le travail de la force de frottement est donné par :

$$W_{1\to 2}=\int_1^2 \vec{f}.\overrightarrow{dl}$$

Avec

$$\vec{f}=-k\vec{V}=-kV_x\vec{\imath}$$

$$\overrightarrow{dl}=V_x\vec{\imath}dt$$

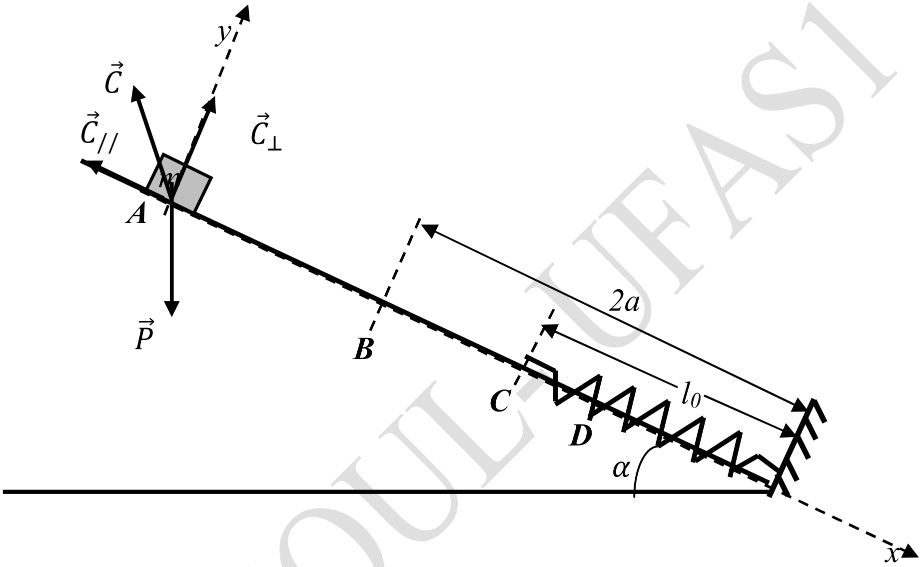
$$W_{1\to 2}(\vec{f})=\int_1^2 -k\,V_x{}^2dt=-kV_0{}^2\int_{t_1}^{t_2} e^{-2\frac{k}{m}t}\,dt$$

Soit, entre l'origine des temps et l'infini :

$$W_{1\to 2}(\vec{f}) = kV_0{}^2 \frac{m}{2k}\left[e^{-2\frac{k}{m}t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}mV_0{}^2$$

ce qui représente l'opposé de l'énergie cinétique de départ (Ceci est logique dans la mesure où seule la force de frottement travaille).

Exercice 5



1) Calcul de la force de frottement sur le segment *AB*

D'après le PFD

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

Après projection

$$\begin{cases} P\sin\alpha - C_{\parallel} = ma \\ C_{\perp} - P\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow C_{\perp} = P\cos\alpha = mg\cos\alpha$$

$$C_{\parallel} = \mu_g C_{\perp} = \mu_g mgcos\alpha = 4.9\ N$$

2) La vitesse au point *B*

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B

$$\Delta E_C|_A^B = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_i(\vec{F}_{ext})$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{C_\parallel})$$

Avec

$$W(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{P}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.\cos(\vec{P},\overrightarrow{AB}) = mgbsin\alpha$$

$$W(\vec{C_\parallel}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{C_\parallel}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.\cos(\vec{C_\parallel},\overrightarrow{AB}) = -\mu_g mgbcos\alpha$$

$$V_A = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}mV_B^2 = mgbsin\alpha - \mu_g mgbcos\alpha$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2gb(sin\alpha - \mu_g cos\alpha} = 3.88m/s$$

La vitesse à laquelle le corps heurte le ressort

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points *B* et *C*

$$\Delta E_C|_B^C = E_c(C) - E_c(B) = \sum_i W_i(\vec{F}_{ext})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = W(\vec{P}) = mg(2b - l_0)sin\alpha$$

$$\Rightarrow V_C = V = \sqrt{2g(2b - l_0)sin\alpha + v_B^2} = 4.6m/s$$

3) De combien le ressort se comprime-t-il ?

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique entre les points C et D

$$\Delta E_M|_C^D = E_c(D) - E_c(C) = 0 \qquad (système\ conservatif)$$

$$\Rightarrow E_c(D) = E_c(C) \qquad \Leftrightarrow \qquad E_c(D) + E_P(D) = E_c(C) + E_P(C)$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mV^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = V\sqrt{\frac{m}{k}} = 14.5cm$$

4) De combien le ressort est-il repoussé

Toute l'énergie potentielle acquise par le ressort au cours de sa compression se transforme de nouveau en énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre les points D et C

$$\Delta E_M|_D^C = E_c(C) - E_c(D) = 0 \qquad (système\ conservatif)$$

$$E_c(D) + E_P(D) = E_c(C) + E_P(C)$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mV^2 \quad \Rightarrow \quad V = x\sqrt{\frac{k}{m}} = 4.6m/s$$

Pour calculer la distance parcourue par le corps pendant la remontée, on applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point du lancement C et le point E où il s'arrête sur le plan incliné.

$$\Delta E_C|_C^E = E_c(E) - E_c(C) = W(\vec{P})$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}mV_C^2 = -(mgsin\alpha)|CE|$$

On pose *CE=d*

$$\Rightarrow \quad d = \frac{V_C^2}{2gsin\alpha} = 1.23m$$