Convergence des méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Exemple : Etudier la convergence de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $det(A) = 18 \neq 0$ donc A est inversible et le système $Ax = b$ admet une solution unique.
2. **Méthode de Jacobi**, La matrice A n'est pas a diagonale strictement dominante donc on calcule la matrice de Jacobi :

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode de Jacobi est convergente si et seulement si $\rho(J) < 1$.

$\rho(J)$ =rayon spectral de J est le plus grand des modules des valeurs propres de J

Calculons les valeurs propres de la matrice J :

Le nombre λ est une valeur propre de la matrice A si et seulement si

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Autrement dit, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique de A.

$$P_J(\lambda) = \det(J - \lambda I) = det\left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= det\left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

$$= det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$\det(J-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \frac{5}{4}\lambda$$

Donc $P_J(\lambda) = -\lambda^3 = -\lambda^3 - \frac{5}{4}\lambda \Leftrightarrow \mathrm{spec(J)} = \left\{0, \mp\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}\right\} \Leftrightarrow \rho(J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1.$

Alors la méthode de Jacobi diverge.

3. **Méthode de Gauss-Seidel**, La matrice A n'est pas a diagonale strictement dominante donc on calcule la matrice de Gauss-Seidel :

$$GS = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la matrice inverse de $(D-E)$ on peut utiliser la définition

$$(D-E)^{-1} = \frac{1}{\det(D-E)}(com(D-E))^t$$

Mais puisque la matrice $D-E$ est triangulaire inferieure, on peut utiliser la propriété suivante : $(D-E)x = y \Leftrightarrow x = (D-E)^{-1}y$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = y_2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(y_2 - 2\left(\frac{1}{2}y_1\right)\right) = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}\left(y_3 + \frac{1}{2}y_1 + \left(\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1\right)\right) = \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{4}y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} y_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 \\ x_3 = \frac{1}{4} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \end{cases}$$

Donc

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$GS = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss-Seidel est convergente si et seulement si $\rho(GS) < 1$.

Calculons les valeurs propres de la matrice GS :

$$P_{GS}(\lambda) = \det(GS - \lambda I) = det\left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \right)$$

$$\det(GS-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)$$

Donc $P_{GS}(\lambda)=\det(GS-\lambda I)=0 \Leftrightarrow -\lambda\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)=0 \Leftrightarrow \mathrm{spec(GS)}=\{0,-0.5,-0.5\} \Leftrightarrow$ $\rho(GS)=0.5<1$

Alors la méthode de Gauss-Seidel converge.