Université Ferhat Abbas-Sétif1-Département de Mathématiques
Exament de rattrapage en Analyse 3
Mardi 25/11/2020 de 9h45 à 11h15

■ EXERCICE 1 (7 points)

I) En utilisant le développement limité des fonctions e^x et $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, étudier la convergence des deux séries suivantes :

$$1. \sum_{n=2}^{+\infty}\left(ne^{\frac{1}{n}}-1\right), \quad 2. \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+e^{-n}\right)$$

II) Soit la série de terme général : $U_n = \dfrac{1}{n^2+3n+2}$, $n \geq 0$

1. Etudier la nature de $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$,
2. Calculer la somme de $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$.

■ EXERCICE 2 (7 points)

Soit $(f_n)_n$ la **suite** des fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \forall n \geq 1, \ f_n(x) = \frac{n}{1+(1+x)n}$$

1. Calculer la limite simple de $(f_n)_n$,
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$,
3. La convergence de $(f_n)_n$ est-elle normale sur $[0,1]$.

■ EXERCICE 3 (6 points)

1. Déterminer le domaine de convergence pour chacune des deux séries entières suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[5]{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{2^n}(x-3)^n$
2. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = x^2\cos\sqrt{2}x^3$$