Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

Introduction

Dans le langage courant, les mots **série** et **suite** signifient la même chose. Cependant, en mathématiques, il est essentiel de reconnaître la **différence**. Une **série** est le résultat de l'addition d'une suite de nombres.

Nous traitons constamment et **sans le savoir** des séries lorsque nous écrivons des expressions comme

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

puisque cela signifie que

$$\begin{aligned}
0,333... &= 0,3 + 0,03 + 0,003 + ... \\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... \\
&= 3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n \text{ somme infinie de termes de suite géométrique de raison } \frac{1}{10} < 1 \\
&= 3 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\
&= 3 \times \frac{1}{10} \times \frac{10}{9} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

1.1 Définitions et généralités

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique réelle (ou complexe), c.à.d. $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in \mathbb{R}$ (ou $u_n \in \mathbb{C}$). On construit une nouvelle suite $(S_n)_n$, comme suit

La suite (u_n)	La suite $(S_n)_n$
u_0	$S_0 = u_0$
u_1	$S_1 = u_0 + u_1$
u_2	$S_2 = u_0 + u_1 + u_2$
u_3	$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$
.	.
.	.
.	.
u_n	$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
.	.
.	.

Définition 1 *On appelle* ***série numérique de terme générale*** u_n *la suite* $(S_n)_n$*, notée* $\sum\limits_n u_n$*.*

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *est appelé somme partielle d'ordre* n *de la série* $\sum\limits_n u_n$*.*

Exemple 1 *1. Si* $u_n = n$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, alors* $0, 1, 2, 3, ..., n, ...$ *est une suite et*

$$0, 0+1, 0+1+2, 0+1+2+3, ..., 0+1+2+3+...+n, , ...$$

est la série $\sum\limits_{n\geq 0} n$*.*

2. Si $u_n = \frac{1}{n}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *alors* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\frac{1}{n}, ...$ *est une suite et*

$$1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, ...1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}, ...$$

est la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$

Remarque 1 *A partir d'une somme partielle* S_n, *on peut reconstituer la suite* $(u_n)_n$ *par*

$$u_n = S_n - S_{n-1}, \forall n \geq 1 \text{ et } u_0 = S_0$$

Remarque 2 *Si* $(u_n)_n$ *est définie seulement à partir d'un certain* $n_0 \in \mathbb{N}$ *(c.à.d.* u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2},......*), il en est de même pour la série de terme général* u_n, *que l'on note* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *avec somme partielle* $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + ... + u_n$.

Exemple 2 (quelques séries usuelles) ***1. La série géométrique***

Soit $(u_n)_n$ *une suite géométrique définie par*

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = ru_n,\ a \in \mathbb{R}^*,\ r > 0 \text{ et } r \neq 1$$

on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = ar^n$$

On défini la série géométrique de terme générale u_n *par la somme partielle*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \\ &= a\left(1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n\right) \\ &= a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \text{(par division euclidienne)} \end{aligned}$$

2. La série harmonique

Il s'agit de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, *Soit* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *de somme partielle*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

3. Le développement décimal

Tout nombre réel $x \in]0,1[$ s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ... \tag{1}$$

avec $a_n \in \{0,1,2,...,9\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (1) est le développement décimal de x qui est présenté par une série numérique de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{10^n}$ et de somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n}$$

En effet : *On a*

$$x \in]0,1[\Rightarrow x = 0, a_1 a_2 a_3 ... a_n .... \tag{2}$$

avec $a_n \in \{0,1,2,...,9\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Rightarrow \quad x = 0, a_1 + 0, 0a_2 + 0, 00a_3 + ... + 0, \underbrace{0...0}_{n-1 \ fois} a_n + ... \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ... \\
&\Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}
\end{aligned}$$

Définition 2 (Convergence d'une série numérique) *On dit que la série $\sum_n u_n$ est convergente (resp. divergente) si la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge (resp. diverge).*

▶ *En cas de convergence, la limite $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$ est appelée somme de la série et notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Exemple 3 *La série géomértique $\sum_{n \geq 0} ar^n$ (**voir plus haut**) converge vers $\dfrac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$ et diverge si $|r| > 1$ puisque la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles définie par $S_n =$*

$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ *vérifie*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} \; si \; |r| < 1 \\ \infty \; si \; |r| > 1 \end{cases}$$

Définition 3 *On appelle reste de* $\sum_n u_n$ *à l'ordre* n*, la différence notée* R_n *entre* S_n *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$*, soit*

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - S_n \\ R_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + ... \end{aligned}$$

▶ ***Si la série*** $\sum_n u_n$ ***est convergente, il est clair que*** $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$*.*

Exemple 4 *Le reste de la série géomértique* $\sum_{n\geq 0} ar^n$ *tend vers* 0 *si* $|r| < 1$*, en effet :*

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} (S - S_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{r^{n+1}}{1-r} = 0 \; si \; |r| < 1$$

Une autre définition équivalente de convergence :

Définition 4 *La série* $\sum_n u_n$ *converge et sa somme est* S *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \; tel \; que \; \forall n, \, n \geq n_0 \Rightarrow |R_n| = |S_n - S| < \varepsilon$$

Exercise 1.1.1 *Utiliser cette définition pour montrer que* $\sum_{n\geq 0} ar^n$ *converge vers* $\frac{a}{1-r}$ *si* $|r| < 1$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$*.*

Solution 1 *Soit $\varepsilon > 0$. On a*

$$\begin{aligned}
|S_n - S| &= \left| a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} - \frac{a}{1-r} \right| \\
&= |a| \left| \frac{1-r^{n+1}-1}{1-r} \right| \\
|S_n - S| &= |a| \frac{|r|^{n+1}}{1-r},\ (1-r>0 \text{ puisque } |r|<1)
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |r|^{n+1} < 1 = 0$ *(puisque $|r| < 1$), alors il existe $n_0 \geq 0$ tel que*

$$\begin{aligned}
\forall n,\ n &\geq n_0 \Rightarrow |r|^{n+1} < \frac{1-r}{|a|}\varepsilon \\
&\Rightarrow |S_n - S| = |a| \frac{|r|^{n+1}}{1-r} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n,\ n \geq n_0 \Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon$$

On déduit que $\sum\limits_{n\geq 0} ar^n$ *converge vers* $\dfrac{a}{1-r}$ *si* $|r| < 1$.

Remarque 3 *On parle de nature d'une série pour désigner la convergence ou la divergence de cette série.*

Remarque 4 *La nature d'une série ne change pas si on change un nombre fini de termes. Par contre, si la série est convergente sa somme (limite) change.*

Remarque 5 *Si $u_n = a_n + ib_n$ est complexe, la série $\sum\limits_{n} u_n$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ convergent. Dans ce cas la somme (limite) de $\sum\limits_{n} u_n$ est donnée par*

$$\sum_{n} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Exercise 1.1.2 *Monter que* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{2^n}$ *converge vers* 1?

Solution 2 *On commence souvent par définir la suite des sommes partielles.*

Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$, *on a :*

$$\begin{array}{rll}
S_1 = \frac{1}{2} & = \frac{1}{2} & = 1 - \frac{1}{2} \\
S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & = \frac{3}{4} & = 1 - \frac{1}{2^2} \\
S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & = \frac{7}{8} & = 1 - \frac{1}{2^3} \\
S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & = \frac{15}{16} & = 1 - \frac{1}{2^4} \\
. & . & . \\
. & . & . \\
. & . & . \\
S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} & & = 1 - \frac{1}{2^n}
\end{array}$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$, *on déduit que* $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{2^n}$ *converge vers* 1.

1.2 Structure d'espace vectoriel de séries

Soient $\sum\limits_n a_n$ et $\sum\limits_n b_n$ deux séries numériques de termes généreaux a_n et b_n respectivement.

▶ L'addition de $\sum\limits_n a_n$ et $\sum\limits_n b_n$ est une série numérique de terme général $c_n = a_n + b_n$ définie par

$$\sum_n c_n = \sum_n a_n + \sum_n b_n \text{ sa somme partielle est } S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

▶ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, ($\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Le produit de $\sum\limits_n a_n$ par λ est une série numérique de terme général $h_n = \lambda a_n$ définie par

$$\sum_n h_n = \sum_n \lambda a_n = \lambda \sum_n a_n \text{ sa somme partielle est } S_n = \sum_{k=0}^{n} h_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des séries numériques et $\mathcal{SC}$ **l'ensemble des séries numériques convergentes.**

Proposition 3 *$(\mathcal{S},+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration 1 *Vu en cours de 1ère année.*

Proposition 4 *$\mathcal{SC}$ est un sous espace vectoriel de $(\mathcal{S},+,.)$ sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration 2 *Soient $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$ deux séries convergentes et $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ sont respectivement les suites des sommes partielles de $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$, et $\alpha \in \mathbb{K}$. On montre que $\sum\limits_n u_n + \sum\limits_n v_n$ et $\alpha \sum\limits_n u_n$ sont deux séries convergentes.*

1. On a

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Rightarrow \exists S \in \mathbb{K} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

et

$$\sum_n v_n \text{ converge} \Rightarrow \exists T \in \mathbb{K} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} T_n = T$$

donc la suite $(W_n)_n$ définie par $W_n = S_n + T_n$ est convergente, il existe $W \in \mathbb{K}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = W$, d'où $W = S + T$, autrement dit $\sum\limits_n u_n + \sum\limits_n v_n$ est convergente.

2. On a

$$\begin{aligned} \sum_n u_n \text{ converge} &\Rightarrow \exists S \in \mathbb{K} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} S_n = S \\ &\Rightarrow \exists S \in \mathbb{K} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} (\alpha S_n) = \alpha S \end{aligned}$$

donc la suite $(\sigma_n)_n$ définie par $\sigma_n = \alpha S_n$ est convergente, il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$, d'où $\sigma = \alpha S$, autrement dit $\alpha \sum\limits_n u_n$ est convergente.

Proposition 5 *1. Si $\sum\limits_n u_n$ est convergente et $\sum\limits_n v_n$ est divergente, alors $\sum\limits_n u_n + \sum\limits_n v_n$ est divergente.*

2. Si $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n (u_n + v_n)$ sont convergentes, alors $\sum\limits_n v_n$ est convergente.

Démonstration 3 *1. Soient* $(S_n)_n$ *et* $(T_n)_n$ *les suites des sommes partielles de* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *respectivement. En utilisant les résultats connus sur les suites, on obtient*

$$\begin{aligned}\sum_n u_n \text{ converge et } \sum_n v_n \text{ diverge} &\Rightarrow (S_n)_n \text{ converge et } (T_n)_n \text{ diverge}\\ &\Rightarrow \text{la suite } (S_n+T_n)_n \text{ diverge}\\ &\Rightarrow \text{la série } \sum_n (u_n+v_n) \text{ diverge}\end{aligned}$$

2. Utilisons les propriétés du sous espace vectoriel $\mathcal{SC}$ *(voir plus haut).*

$$\begin{aligned}\sum_n u_n \text{ converge} &\Rightarrow -\sum_n u_n \text{ converge}\\ \sum_n (u_n+v_n) \text{ et } -\sum_n u_n \text{ converge} &\Rightarrow \sum_n v_n = \sum_n (u_n+v_n) - \sum_n u_n \text{ converge}\end{aligned}$$

Remarque 6 *Si* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *sont divergentes,* ***on ne peut pas conclure*** *sur la nature de* $\sum_n u_n + \sum_n v_n$*. Par exemple, si* $u_n = 1$ *et* $v_n = -1$*,* $\forall n$*, il est clair que* $\sum_n u_n\,(=+\infty)$ *et* $\sum_n v_n\,(=-\infty)$ *sont divergentes, par contre* $\sum_n w_n = \sum_n (u_n+v_n) = 0$ *est convergente !*

1.3 Condition nécessaire de convergence

Proposition 6 (Condition nécessaire de convergence) *Si la série* $\sum_n u_n$ *est convergente, alors son terme général* u_n *tend vers zéro. Autrement dit*

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Démonstration 4 *Soit* $(S_n)_n$ *la suite des sommes partielles de* $\sum_n u_n$*. On sait que* $u_n = S_n - S_{n-1}$*,* $\forall n \geq 1$*, alors*

$$\begin{aligned}\sum_n u_n \text{ converge} &\Rightarrow \exists S \text{ tel que } \lim_n S_n = \lim_n S_{n-1} = S\\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0\end{aligned}$$

La contraposée de l'implication de la proposition ci-dessus, nous donne un **test de divergence** efficace !

Proposition 7 ***Si le terme général*** u_n *de la série* $\sum_n u_n$ ***ne tend pas vers zéro****, alors* $\sum_n u_n$ ***est divergente****. Autrement dit*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_n u_n \text{ diverge}$$

Exemple 5 *1. La série géométrique* $\sum_n r^n$ *est divergente si* $|r| \geq 1$. *puisque*

$$|r| \geq 1 \Rightarrow \lim_n r^n \neq 0$$

2. $\sum_n \frac{n}{3n+1}$ *diverge puisque* $\lim_n \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0.$

Remarque 7 *La condition* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *est nécessaire mais pas suffisante pour la convergence de* $\sum_n u_n$.

Exemple 6 *Pour la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *(appelée série harmonique), on a* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *mais* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.* ***En effet :*** *soit* $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, *on a*

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} \end{aligned}$$

d'où

$$\forall n \geq 1 : S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$$

Si $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *converge on a* $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ *alors*

$$0 = S - S \geq \frac{1}{2} \text{ contradiction!}$$

donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.*

1.4 Le critère de Cauchy

Définition 5 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série numérique et* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ *sa somme partielle.* $\sum_n u_n$ ***converge au sens de Cauchy si et seulement si*** $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall p, q$:

$$\begin{aligned} q > p \geq n_0 &\Rightarrow |S_q - S_p| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{q} u_k - \sum_{k=1}^{p} u_k\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

▶ *Si* $\sum_n u_n$ *est convergente, la suite* (S_n) *admet une limite, elle est en particulier une suite de Cauchy.*

Remarque 8 *Dans le cas où* $u_n \in \mathbb{K}$ *(espace vectoriel normé complet), (on prend* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*), on a*

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Leftrightarrow (S_n)_n \text{ est une suite de Cauchy}$$

1.5 La convergence absolue d'une série

Définition 6 *On dit que la série numérique* $\sum_n u_n$ *est absolument convergente si la série* $\sum_n |u_n|$ *est convergente.*

▶ *Une série convergente mais non absolument convergente est dite* ***semi-convergente.***

Exemple 7 *La série alternée* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ *est semi-convergente puisqu'elle est*

- convergente (sera démontrée plus tard).

- non absolument convergente puisque $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ *série harmonique divergente (démontrée plus haut).*

Remarque 9 *La convergence simple et la convergence absolue coincident dans le cas d'une série à termes positifs.*

Proposition 8 *Si* $\sum\limits_{n} u_n$ *est absolument convergente, alors elle est convergente et on a*

$$\left|\sum_{n} u_n\right| \leq \sum_{n} |u_n|$$

Démonstration 5

$$\begin{aligned} \sum_{n} u_n \text{ est absolument convergente } &\Rightarrow \sum_{n} |u_n| \text{ est convergente} \\ &\Rightarrow \sum_{n} |u_n| \text{ est convergente au sens de Cauchy} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q : q > p \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |u_k| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \sum_{n} u_n \text{ est convergente au sens de Cauchy} \\ &\Rightarrow \sum_{n} u_n \text{ est convergente} \end{aligned}$$

et comme

$$\forall n \in \mathbb{N} : |S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

alors par passage à la limite, on obtient

$$\left|\sum_n u_n\right| \leq \sum_n |u_n|$$

Remarque 10 *Pour étudier la nature d'une série à termes de signes variables, on commence toujours par la convergence absolue.*

1.6 Calcul de la somme d'une série convergente

Lorsqu'une série converge, il est naturel de chercher à calculer sa somme ; cela n'est pas généralement possible et, même si possible, ce n'est pas toujours facile. Les techniques de calcul de telles sommes sont très variées mais les outils pour y parvenir sont peu. La plupart de ces méthodes nous seront fournies par les séries entières et les séries de Fourier, que nous verrons dans les chapitres trois et quatre.

1.6.1 Séries géométriques

On connait déjà la somme d'une série géométrique de raison r ; en effet, si $a_n = t^n$, avec $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $|t| < 1$, alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} \longrightarrow \frac{1}{1-t} \text{ quand } t \longrightarrow +\infty$$

autrement dit la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_k$ converge si $|t| < 1$ et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

En particulier, on a par exemple :

- pour $t = \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

- pour $t = -\frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

en général

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n} = \frac{a}{a-1} \text{ si } |a| > 1$$

1.6.2 Séries télescopiques

Définition 7 *Une série télescopique (ou somme télescopique) désigne une somme dont les termes s'annulent de proche en proche. Si $(a_n)_n$ est une suite, la série télescopique correspondante est la série de terme général $a_{n+1} - a_n$. La formule de télescopage s'écrit alors*

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

Exemple 8 (Terme général rationnel) *Soit la série de terme général $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

soit

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

d'où la somme de la série est donnée par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Exemple 9 (Autres cas) *Soit la série de terme général* $a_n = \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}$ *:*

$$\arctan a + \arctan b = \frac{a+b}{1-ab} \textit{ avec } ab < 1 \qquad (*)$$

Ecrivons

$$a_n = \arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \arctan \frac{(n+1)+(-n)}{1-(n+1)(-n)}$$

D'après $(*)$ *avec* $a = n+1$ *et* $b = -n$*, on obtient*

$$a_n = \arctan(n+1) + \arctan(-n) = \arctan(n+1) - \arctan n$$

d'où

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\arctan(k+1) - \arctan k\right) \\ &= \arctan(n+1) \end{aligned}$$

on déduit que la série converge et sa somme et donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$$

1.7 Séries à termes positifs

Dans toute cette section on suppose que la série $\sum_n u_n$ est à termes positifs, c.à.d. $\forall n : u_n \geq 0$. Dans ce cas la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est croissante puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$$

Nous allons développer des outils en vu d'étudier la nature de ces série à termes positifs.

1.7.1 Critère de majoration

Proposition 9 *Une série à termes positifs $\sum_n u_n$ est* ***convergente*** *si et seulement si la suite $(S_n)_n$ est* ***majorée.***

Démonstration 6 *$(S_n)_n$ est croissante et majorée donc convergente.*

Exemple 10 *Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.*

Solution 10 *Soit $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$. On a*

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2} \\ &\leq 1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p(p-1)} \\ &\leq 1 + \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

donc $(S_n)_n$ est majorée, on déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

1.7.2 Critère de comparaison

Proposition 11 (Comparaison directe) *Soit* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq b_n \leq a_n$*. Alors*

$$\sum_n a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ converge}$$
$$\sum_n b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ diverge}$$

Exemple 11 *Montrer que* $\sum_{n\geq 0} \sin \frac{1}{2^n}$ *est convergente.*

Solution 12 *Pour* n *assez grand* $\sin \frac{1}{2^n} \geq 0$*. On a*

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \sin \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

et

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \text{ série géométrique convergente } (r = \frac{1}{2} < 1) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \sin \frac{1}{2^n} \text{ est convergente}$$

Définition 8 (Négligeabilité) *On dit que* a_n *est négligeable devant* b_n *au voisinage de l'infini* $(n \to +\infty)$ *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ avec } b_n \neq 0 \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

et on écrit (notation de Landau)

$$a_n = o(b_n) \ \ (n \to +\infty)$$

ou (notation de Hardy)

$$a_n \prec b_n \ (n \to +\infty)$$

Définition 9 (Equivalence) *On suppose que b_n ne s'annule pas pour n assez grand. On dit que a_n est équivalent à b_n en $+\infty$, et on note $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, lorsque*

$$a_n - b_n = o(b_n) \ \ (n \to +\infty)$$

autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Définition 10 (Domination) *On dit que a_n est dominé par b_n en $+\infty$, ou que b_n domine a_n en $+\infty$, lorsqu'il existe des constantes N et C telles que*

$$\forall n > N : |a_n| < C\,|b_n|$$

et on écrit (notation de Bachmann)

$$a_n = O(b_n) \ \ (n \to +\infty)$$

ou (notation de Hardy)

$$a_n \preceq b_n \ (n \to +\infty)$$

La comparaison directe des séries positives a pour corollaire immédiat des résultats de comparaison par les relations de négligeabilité, d'équivalence et de domination.

Corollaire 1 (Comparaison par o, O et $\sim$) *Soient $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ deux séries à termes positifs ou nuls.*

*1. On suppose que $a_n = o(b_n)$ **ou** $a_n = O(b_n)$. On a :*

- Si $\sum_n b_n$ converge, alors $\sum_n a_n$ converge.

- Si $\sum_n a_n$ diverge, alors $\sum_n b_n$ diverge.

2. Si $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $a_n \underset{n\sim+\infty}{\sim} b_n$, alors $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont de même nature.

Exemple 12 *La série $\sum_n \frac{n^2+n}{n^3+1}$ est divergente puisque $\frac{n^2+n}{n^3+1} \underset{n\sim+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente.*

Remarque 11 *Pour les séries à termes quelconques, le critère d'équivalence n'est plus valable, puisqu'on peut avoir* $a_n \underset{n\sim+\infty}{\sim} b_n$ *avec* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *de nature différente, comme le montre le contre-exemple suivant : en effet, prenons* $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ *; il est clair que*

$$a_n \underset{n\sim+\infty}{\sim} b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

nous avons montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *est une série alternée convergente, par contre* $\sum_n a_n$ *est divergente puisque* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est la série harmonique divergente.*

Proposition 13 (Comparaison logarithmique) *Soient* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *deux séries à termes strictement positifs telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Corollaire 2 *- Si* $\sum_n b_n$ *converge, alors* $\sum_n a_n$ *converge.*

- Si $\sum_n a_n$ *diverge, alors* $\sum_n b_n$ *diverge.*

1.7.3 Test intégral : comparaison d'une série à une intégrale

Proposition 14 *Soient* a *un réel et* $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *une fonction continue et décroissante ; posons, pour* $n \geq a$, $a_n = f(n)$. *Alors la série* $\sum_n a_n$ *converge si et seulement si la suite* $\left(\int_a^n f(t)\,dt\right)_n$ *a une limite quand* n *tend vers* $+\infty$. ***On peut même dire que la série*** $\sum_n a_n$ ***et l'intégrale impropre*** $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ***sont de même nature.***

▶ *En cas de convergence, on a un encadrement du reste* R_n *:*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

Comme application de cette proposition, nous allons étudier la nature de deux types de séries :

1. Les séries de Riemann dont le terme général est donné par

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}, \, n \in \mathbb{N}^*$$

2. Les séries de Bertrand dont le terme général est donné par

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } n \geq 2$$

Corollaire 3 (Séries de Riemann) *La série* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *converge si* $\alpha > 1$ *et diverge si* $\alpha \leq 1$.

Démonstration 7 *Il suffit de comparer* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *à l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$.

Exemple 13 *1.* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est une série de Riemman* ***convergente*** *puisque* $\alpha = 2 > 1$.

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est une série de Riemman* ***divergente*** *puisque* $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Corollaire 4 (Séries de Bertrand) *La série* $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$ ***converge*** *si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$ *et* ***diverge*** *si* $\alpha < 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta \leq 1$.

Exemple 14 *1.* $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ *converge puisque* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 2 > 1$.

2. $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^{-1}}$ *diverge puisque* $\alpha = 1$ *et* $\beta = -1 \leq 1$.

1.7.4 Règle de Cauchy

Proposition 15 (Règle de Cauchy) *Soit* $\sum_n a_n$ *une série à termes positifs ou nuls* ***telle que***

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

- *Si* $l < 1$, *la série* $\sum_n a_n$ *converge ;*
- *Si* $l > 1$, *la série* $\sum_n a_n$ *diverge ;*

- *Si $l = 1$, cas douteux, on ne peut pas conclure ; toutefois,* ***si la suite*** $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_n$ ***tend vers*** 1 ***par valeurs supérieures, alors la série diverge.***

Exemple 15 *La série* $\sum_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ *converge puisque* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e} < 1.$

1.7.5 Règle de D'Alembert

Proposition 16 (Règle de D'Alembert) *Soit* $\sum_n a_n$ *une série à termes strictement positifs* ***telle que***

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- *Si $l < 1$, la série $\sum_n a_n$ converge ;*
- *Si $l > 1$, la série $\sum_n a_n$ diverge ;*
- *Si $l = 1$, cas douteux, on ne peut pas conclure ; toutefois,* ***si la suite*** $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_n$ ***tend vers*** 1 ***par valeurs supérieures, alors la série diverge.***

Exemple 16 *La série* $\sum_n \frac{n!}{n^n}$ *converge puisque si* $a_n = \frac{n!}{n^n}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

Remarque 12 *Lorsque $l = 1$, on peut conclure en écrivant un développement limité à l'ordre 1 en $x = \frac{1}{2}$ de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, c'est l'objet de la proposition suivante*

Proposition 17 (Critère de Raabe-Duhamel) *Soit $\sum_n a_n$ une série à termes strictement positifs telle que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors $\sum_n a_n$ *converge si* $\alpha > 0$ *et diverge si* $\alpha < 1$.

Exemple 17 *La série* $\sum_n \dfrac{e^n n!}{n^n}$ *est divergente ? En effet :*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{e} = 1$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{e}{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}} \\ &= e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\sim+\infty}{=} e^{1-n\left(0+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ avec } \alpha = -\frac{1}{2} < 0$$

on déduit que $\sum_n \dfrac{e^n n!}{n^n}$ *est divergente.*

1.7.6 Règle de Riemman

Proposition 18 *Soit* $\sum_n a_n$ *une série à termes strictement positifs.*

- *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = 0$ *alors* $\sum_n a_n$ *converge.*
- *S'il existe* $\alpha \leq 1$ *tel que* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n \neq 0$ *alors* $\sum_n a_n$ *diverge.*

Exemple 18 *La série* $\sum_n e^{-2\sqrt{n}}$ *est convergente, puisque*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-2\sqrt{n}} &= \lim_{n\to+\infty} e^{2\sqrt{n}\left(\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}-1\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{-2\sqrt{n}} = 0 \text{ avec } \alpha = 2 > 1 \end{aligned}$$

1.8 Séries à termes quelconques

1.8.1 Séries alternées

Définition 11 *Une série alternée est une série à termes réels de type* $\sum\limits_{n} (-1)^n a_n$ *avec* a_n *de signe constant.*

Exemple 19 *1.* $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ *est une série alternée divergente.*

2. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$*est une série alternée convergente (démontré plus tard).*

Proposition 19 (Critère des séries alternées) *La série alternée* $\sum\limits_{n} (-1)^n a_n$ *avec* $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$*,* ***est convergente****, si la suite* $(a_n)_n$ *est décroissante et tend vers* 0*. En outre, on a la majoration suivante des restes,*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \leq a_{n+1}$$

Autrement dit, l'erreur commise en remplaçant la somme de la série par la somme partielle d'ordre n *est majorée par la premier terme négligé.*

Exemple 20 *1. La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *est convergente puisque* $(a_n)_n$ *tel que* $a_n = \frac{1}{n}$ *est décroissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*.*

2. L'erreur faite en remplaçant $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *par la somme des 100 premiers est inférieure à* 10^{-4}*. En effet :*

la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *série de Riemman convergente* $(\alpha = 2 > 1)$ *et on a*

$$R_{100} = \sum_{k=101}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + ... \leq \frac{1}{101^2} = 0.000098 < 10^{-1}$$

1.8.2 Règle d'Abel

Théorème 1 (d'Abel) *Soient* $(a_n)_n$ *une suite réelle et* $(b_n)_n$ *une suite réelle ou complexe satisfaisant les conditions ci-après :*

1. *il existe un réel positif* M *tel que, pour tous entiers* p *et* q *avec* $p < q$, *on ait*

$$|b_{p+1} + b_{p+2} + ... + b_q| \leq M;$$

2. *la suite* $(a_n)_n$ *est décroissante et tend vers zéro.*

Alors la série $\sum\limits_n a_n b_n$ *converge.*

Exemple 21 *Etudier la convergence de la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin n}{n}$.

Solution 20 *Posons* $a_n = \sin n$ *et* $b_n = \dfrac{1}{n}$. *Il est clair que* $(a_n)_n$ *est décroissante et tend vers zéro. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ik} - e^{-ik}\right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(e^{i}\right)^k - \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-i}\right)^k \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^{i}} - \frac{1 - e^{-i(n+1)}}{1 - e^{-i}} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)} + e^{i} - e^{-in}}{1 - e^{i}} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)} + e^{i} - e^{-in}}{e^{\frac{i}{2}} \left(e^{-\frac{i}{2}} - e^{\frac{i}{2}}\right)} \right)
\end{aligned}$$

d'où

$$|S_n| = |b_1 + b_2 + ... + b_n| \leq \frac{2}{\left|e^{\frac{i}{2}} - e^{-\frac{i}{2}}\right|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}\right|}, \text{ (ici } p = 0,\ q = n \text{ et } M = \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}\right|}\text{)}$$

d'après le théorème d'Abel la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin n}{n}$ *est convergente.*

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

2.1 Suites de fonctions

Dans tout ce qui suit dans cette section, $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 12 *On appelle suite de fonctions définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, toute application $n \to f_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$f_n : \underset{x \longmapsto f_n(x)}{\mathcal{D} \to \mathbb{R}}$$

► *Cette suite est notée $(f_n)_n$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(f_n(x))_n$ est une suite de nombres réels.*

Exemple 22 $(x^n)_n$, $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_n$ *et* $(\arctan(nx))_n$ *sont des suites de fonctions.*

2.1.1 La convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 13 *Une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur $\mathcal{D}$* ***converge simplement*** *vers la fonction f* ***si pour tout*** *$x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))_n$* ***converge*** *vers $f(x)$ et on écrit*

$$\forall x \in \mathcal{D} \ : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

f est dite limite simple de la suite $(f_n)_n$ sur $\mathcal{D}$.

Une définition équivalente est donnée de la façon suivante :

Définition 14 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur $\mathcal{D}$ **converge simplement** vers la fonction f si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathcal{D},\ \forall \varepsilon > 0, \exists \boldsymbol{N}{=}\boldsymbol{N}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{CS}$$

Exemple 23 *1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = x^n$$

$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \in [0,1[\\ 1 \ si \ x = 1 \end{cases}$$

(clair puisque $x = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f_n(1) = 1 \to f(x) = 1$ et $0 \leq x < 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = x^n \to f(x) = 0$).

2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$$

$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ ($\lim\limits_n \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1, \forall \in \mathbb{R}$).

3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ ($\lim\limits_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \forall \in \mathbb{R}$).

2.1.2 La convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 15 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définies sur* $\mathcal{D}$. $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathcal{D}$*, si*

$$\lim_n \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

f est dite limite uniforme de la suite $(f_n)_n$ *sur* $\mathcal{D}$.

Une définition équivalente est donnée de la façon suivante :

Définition 16 *La suite de fonctions* $(f_n)_n$ ***converge uniformément*** *vers la fonction* f *sur* $\mathcal{D}$ *si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists \boldsymbol{N}\boldsymbol{=}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \forall x \in \mathcal{D},\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{CU}$$

Cette définition s'écrit encore :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists \boldsymbol{N}\boldsymbol{=}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Remarque 13 *1. La différence entre convergence simple et uniforme est que dans* (CS) *le* $\boldsymbol{N}\boldsymbol{=}\boldsymbol{N}(\mathbf{x},\boldsymbol{\varepsilon})$ ***dépend de*** ε ***et*** x*, alors que dans* (CU) *le* $\boldsymbol{N}\boldsymbol{=}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\varepsilon})$ ***dépend de*** ε ***seulement*** *mais* ***commun*** *à tous les* $x \in \mathcal{D}$.

2. Pour prouver la convergence uniforme (resp. non uniforme) d'une suite de fonctions définies sur $\mathcal{D}$*, on suit les étapes suivantes :*

a) Etudier la convergence simple pour déterminer f*,*

b) Calculer $a_n = \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)|$ *(s'il existe),*

c) Démontrer que $\lim_n a_n = 0$ *(resp.* $\lim_n a_n \neq 0$*). Il est parfois plus rapide dans cette étape de majorer (resp. minorer)* a_n *par une suite* b_n *qui tend vers* 0 *(resp. qui ne tend pas vers* 0*).*

Proposition 21 *Si* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathcal{D}$ *alors elle converge simplement vers* f.

Démonstration 8 *Soit $x_0 \in \mathcal{D}$ quelconque. On a*

$$0 \leq |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| \tag{*}$$

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathcal{D}$ on a $\lim_n \sup\limits_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| = 0$, alors

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_n |f_n(x_0) - f(x_0)| = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \lim_n f_n(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

ce qui donne la convergence simple de $(f_n)_n$.

Remarque 14 *La reciproque de cette proposition n'est pas vraie.* ***Un contre exemple :*** *Nous avons vu plus haut que la suite $(x^n)_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \in [0,1[\\ 1 \ si \ x = 1 \end{cases}$$

On montre qu'elle converge uniformément vers la fonction nulle $(f = 0)$ sur $[0,1[$, mais pas sur l'intervalle ***fermé*** *$[0,1]$.* ***En effet :*** *Pour tout a tel que $0 \leq a < 1$, on a*

$$\begin{aligned} \forall x \quad &\in \quad [0,a] \Longrightarrow 0 \leq x \leq a < 1 \\ &\Longrightarrow \lim_n x^n = 0 \ et \ \lim_n \sup_{0\leq x\leq a} |x^n - 0| = \lim_n a^n = 0 \end{aligned}$$

Mais

$$\sup_{x\in[0,1]} |x^n - 0| = 1 \neq 0$$

Exercise 2.1.1 *Soit la suite définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{n}$.*

1. *Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.*
2. *Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$.*

Solution 22 *1.* $(f_n)_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* $f = 1$*, puisque*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1$$

2. On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|1 + \frac{x}{n} - 1\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{n} = +\infty$$

Mais, pour tout $a > 0$*,*

$$\lim_n \sup_{|x|\leq a} |f_n(x) - f(x)| = \lim_n \sup_{|x|\leq a} \left|1 + \frac{x}{n} - 1\right| = \lim_n \sup_{|x|\leq a} \frac{|x|}{n} = \lim_n \frac{a}{n} = 0$$

On déduit que $(f_n)_n$ *converge uniformément sur tout* $[-a, a] \subset \mathbb{R}$*, mais pas sur* $\mathbb{R}$*.*

Proposition 23 (Critère de suite non uniformément convergente) *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définies sur* $\mathcal{D}$ *et* $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$*. S'il existe une suite* $(t_n)_n$ *de* $\mathcal{D}$ *telle que*

$$\lim_n [f_n(t_n) - f(t_n)] \neq 0$$

alors $(f_n)_n$ *ne converge pas uniformément vers* f *sur* $\mathcal{D}$*.*

Définition 17 (Suite uniformément de Cauchy) *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définies sur* $\mathcal{D}$*. On dit que* $(f_n)_n$ *est uniformément de Cauchy sur* $\mathcal{D}$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \boldsymbol{N{=}N(\varepsilon)} \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} : p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

Le théorème suivant établit le lien entre la convergence uniforme d'une suite de fonctions et l'uniforme de Cauchy :

Théorème 2 (Critère de Cauchy) *Une suite* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $\mathcal{D}$ *si et seulement si elle est uniformément de Cauchy sur* $\mathcal{D}$*.*

Remarque 15 *Le critère de Cauchy prouve la convergence uniforme d'une suite de fonctions* ***sans faire appel à sa limite.***

2.1.3 Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Nous verrons que, sans aucune condition supplémentaire, la convergence uniforme conserve le passage à la limite ainsi que la continuité. En revanche, pour l'intégrabilité, des conditions sont imposées. Quant à la dérivabilité, elle est transmise à la limite sous l'hypothèse de la convergence uniforme de la suite des dérivées.

Continuité de la limite

Contrairement à la limite simple, **la limite uniforme d'une suite de fonctions continues hérite la continuité.**

Théorème 3 (Continuité de la limite) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{D}$ qui **converge uniformément** vers une fonction f et soit $x_0 \in \mathcal{D}$.*

***Si**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 (resp. sur $\mathcal{D}$), **alors** f est continue en x_0 (resp. sur $\mathcal{D}$).*

Démonstration 9 *Soit $x_0 \in \mathcal{D}$ et $\varepsilon > 0$.*

f_n converge uniformément sur $\mathcal{D} \Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\forall x \in \mathcal{D} : |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

en particulier, on a

$$|f_{N_\varepsilon}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

et

$$|f_{N_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

et comme f_n (en particulier f_{N_ε}) est continue en x_0, alors

$$\exists \eta_\varepsilon > 0 \text{ tel que : } |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}(1),(2) \ \ et \ \ (3) \ \ \Longrightarrow \ \ |f(x)-f(x_0)| &\leq |f(x)-f_{N_\varepsilon}(x)|+|f_{N_\varepsilon}(x)-f_{N_\varepsilon}(x_0)|+|f_{N_\varepsilon}(x_0)-f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

On déduit que f est continue en x_0.

Un corollaire directe du théorème ci-dessus.

Corollaire 5 *La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.*

Remarque 16 *On peut utiliser le théorème ci-dessus pour montrer qu'une suite de fonctions continues ne converge pas uniformément.*

Exemple 24 *Nous avons vu plus haut que la suite $n \longmapsto x^n$ de fonctions **continues** sur $[0,1]$, **converge simplement** sur $[0,1]$ vers la fonction $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ 0 \leq x < 1 \\ 1 \ si \ x = 1 \end{cases}$ qui **n'est pas continue** sur $[0,1]$. Ce qui prouve que cette suite n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.*

Intégrabilité de la limite

Contrairement à la limite simple, **la limite uniforme d'une suite de fonctions intégrable au sens de Riemann hérite l'intégrabilité.**

Théorème 4 (Intégrabilité de la limite) *Soient $a,b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle $[a,b]$ et qui **converge uniformément** vers une fonction f sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a,b]$, posons $F_n(t) = \int_a^t f_n(s)\,ds$. **Alors** la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur $[a,b]$ où $F(t) = \int_a^t f(s)\,ds$.*

En particulier, on a

$$\lim_n \int_a^b f_n(s)\,ds = \int_a^b \lim_n f_n(s)\,ds$$

Démonstration 10 *Soit* $\varepsilon > 0$. $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$*, alors*

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \forall s \in [a,b] \ : |f_n(s) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

et comme, pour tout $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |F_n(t) - F(t)| &= \left| \int_a^t (f_n(s) - f(s))\, ds \right| \leq \int_a^t |f_n(s) - f(s)|\, ds \\ &< \int_a^t \frac{\varepsilon}{b-a} ds = \frac{\varepsilon(t-a)}{b-a} \leq \varepsilon \text{ (puisque } t \leq b) \end{aligned}$$

Donc $(F_n)_n$ *converge uniformément vers* F *sur* $[a,b]$.

Remarque 17 *1. Dans le théorème ci dessus, on peut remplacer la condition de continuité sur* $[a,b]$ *par une condition faible à savoir "borneé et intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$*".*

2. Le théorème ci-dessus, montre que la convergence uniforme permet d'intervertir la limite uniforme et l'intégrale. Par contre la convergence simple ne le permet pas. ***Comme le montre le contre exemple suivant :***

Soit $f_n(x) = 2n^2 e^{-n^2x^2}$, $x \in [0,1]$. *On peut montrer facilement que* $\lim\limits_n f_n(x) = 0$, *donc* $(f_n)_n$ *converge simplement vers* $f = 0$. *D'une part on a*

$$\int_0^1 \lim_n f_n(x)\, dx = \int_0^1 (0)\, dx = 0$$

et d'une autre part, on a

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 2n^2 e^{-n^2x^2} dx = -\left[e^{-n^2x^2}\right]_0^1 = 1 - e^{-n^2} \longrightarrow 1 \neq 0 \text{ (quand } n \longrightarrow +\infty)$$

c.à.d.

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \lim_n f_n(x)\, dx$$

Tout ça ***est dû*** *au fait que* $(f_n)_n$ *n'est pas uniformément convergente sur* $[0,1]$. *En* *effet :*

$$\lim_n \sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_n \sup_{0\leq x\leq 1} \left|2n^2 e^{-n^2x^2} - 0\right| = \lim_n \left(2n^2\right) \neq 0$$

Dérivabilité de la limite

Pour avoir un résultat pour $(f_n)_n$ similaire à ceux de la continuité et l'intégrabilité, on éxige la convergence uniforme de la suite des dérivées $(f'_n)_n$.

Théorème 5 (Dérivabilité de la limite) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ telle que*

1. Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))_n$ converge ;

2. La suite des dérivées $(f'_n)_n$ converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b]$.

Alors

I*. $(f_n)_n$ converge uniformément vers une foncion f sur $[a,b]$;*

II*. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ de dérivée g (c.à.d. $f' = g$).*

▶ Sous les conditions du théoème ci-dessus, nous avons montré que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x)$$

Démonstration 11 ***I. Montrons que*** $(f_n)_n$ ***est uniformément convergente sur*** $[a,b]$ ***?***

Il suffit de montrer que $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après l'hypothèse 2, la suite des dérivées $(f'_n)_n$ est uniformément de Cauchy sur $[a,b]$, alors

$$\exists\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p,q \in \mathbb{N}\ : p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \forall x \in [a,b] : \left|f'_p(x) - f'_q(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Pour chaque couple $p,q \geq N$, appliquons le théorème des accroissements finis entre x

et x_0 à la fonction $f_p - f_q$ pour tout $x \in [a,b]$, il existe t_0 entre x et x_0 tel que

$$\begin{aligned} \left|\left(f_p(x) - f_q(x)\right) - \left(f_p(x_0) - f_q(x_0)\right)\right| &= \left|(x-x_0)\right| \left|f_p'(t_0) - f_q'(t_0)\right| \\ &\leq \left|(x-x_0)\right| \sup_{a\leq t\leq b} \left|f_p'(t) - f_q'(t)\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \left|(x-x_0)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \text{ (puisque } \left|(x-x_0)\right| \leq b-a\text{)} \end{aligned}$$

donc

$$\left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \left|f_p(x_0) - f_q(x_0)\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

(puisque $\left|\left(f_p(x) - f_q(x)\right)\right| - \left|\left(f_p(x_0) - f_q(x_0)\right)\right| \leq \left|\left(f_p(x) - f_q(x)\right) - \left(f_p(x_0) - f_q(x_0)\right)\right|$).

D'après l'hypothèse 1, la suite $\left(f_n(x_0)\right)_n$ est de Cauchy, il existe donc $N' = N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq N' \text{ et } q \geq N' \Rightarrow \left|f_p(x_0) - f_q(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit que

$$p, q \geq \max\{N, N'\} \Rightarrow \forall x \in [a,b] : \left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers une fontion f sur $[a,b]$.

II. Montrons que f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et que $f' = g$?

Posons pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(s)\,ds$ ($= f_n(x) - f_n(x_0)$). La suite $(f_n')_n$ des dérivées vérifie bien les conditions du théorème 4 (d'intégrabilité), donc $(F_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$. Autrement dit : d'une part on a

$$\lim_n \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right) = F(x)$$

et d'une autre part, on a

$$\lim_n \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right) = f(x) - f(x_0)$$

L'unicité de la limite implique que

$$f(x) = F(x) + f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds + f(x_2)$$

La fonction f est donc une primitive de g ; elle est donc dérivable et on $f' = g$.

Remarque 18 *Remarquons que la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ (**sans la convergence uniforme de la suite de dérivées** $(f_n')_n$) ne suffit pas à assurer la dérivabilité de la limite. **Voici un exemple :***

Exemple 25 *Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que $(f_n)_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On montre que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto |x|$, qui n'est pas dérivable en 0. **En effet :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_n f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x \ \text{si } x < 0 \\ 0 \ \text{si } x = 0 \\ +x \ \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ non dérivable en } 0 \text{ donc sur } \mathbb{R}.$$

On montre que

$$f_n(x) - |x| \leq \frac{1}{n}$$

en effet :

$$\begin{aligned} f_n(x) - |x| &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \\ &= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \text{ (le conjugué)} \\ &\leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \left| f_n\left(x\right) - \left|x\right| \right| \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim_n \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n\left(x\right) - \left|x\right| \right| = 0$$

Ce qui implique la convergence uniforme de la suite $\left(f_n\right)_n$ *vers la fonction* $x \mapsto |x|$ *qui n'est pas dérivable en* 0.

► *Ce résultat de* ***la non dérivabilité de la limite*** *est dû à la* ***convergence non uniforme*** *de la suite de dérivées* $\left(f_n'\right)_n$. ***En effet :*** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$f_n'\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}}$$

il est clair que $\left(f_n'\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $\mathbb{R}$, *par contre sa limite est* ***discontinue*** *sur* $\mathbb{R}$, *puisque*

$$\lim_n f_n'\left(x\right) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 \ \ si \ x > 0 \\ -1 \ \ si \ x < 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\left(f_n'\right)_n$ *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}$.

2.2 Séries de fonctions

Dans tout ce qui suit dans cette section, $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

Les séries de fonctions constituent une famille particulière parmi les suites de fonctions. Cette section est une traduction en tremes de séries des résultats et des définition déjà rencontrés lors de l'étude des suites de fonctions.

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 18 *La série de fonctions associée à $(f_n)_n$, notée $\sum\limits_n f_n$ est la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles définies sur $\mathcal{D}$, par*

$$\forall x \in \mathcal{D} : S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} f_p(x)$$

Le reste de $\sum\limits_n f_n$ est la suite $(R_n)_n$ définie par

$$\forall x \in \mathcal{D} : R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_p(x)$$

Définition 19 *Soient $(S_n)_n$ et $(R_n)_n$ la suite des sommes partielles et le reste de la série $\sum\limits_n f_n$, respectivement. On a les définitions de convergence suivantes :*

1. $\sum\limits_n f_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $(S_n)_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$, c.à.d.

$$\forall x \in \mathcal{D} : \lim_n S_n(x) = S(x) \;\; \text{où } S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

autrement dit

$$\forall x \in \mathcal{D} : \lim_n R_n(x) = 0$$

▶ *Dans ce cas la limite S est appelée somme de la série $\sum_n f_n$ et on écrit*

$$\forall x \in \mathcal{D} : S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

2. $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $(S_n)_n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$, ***autrement dit***

$$\lim_n \sup_{x\in\mathcal{D}} |R_n(x)| = 0$$

Proposition 24 (Condition nécessaire de convergence uniforme)

$$\sum_n f_n \text{ converge uniformément sur } \mathcal{D} \Longrightarrow \lim_n \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x)| = 0$$

Définition 20 (Série uniformément de Cauchy) *Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définies sur $\mathcal{D}$. On dit que $\sum_n f_n$ est uniformément de Cauchy sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \boldsymbol{N}\boldsymbol{=}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N}\ : p > q \geq N\ \Rightarrow \sup_{x\in\mathcal{D}} \left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

Le théorème suivant établit le lien entre la convergence uniforme d'une série de fonctions et l'uniforme de Cauchy :

Théorème 6 (Critère de Cauchy) *Une série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$ si et seulement si elle est uniformément de Cauchy sur $\mathcal{D}$.*

Remarque 19 *Le critère de Cauchy est de grande utilité prouver la convergence uniforme d'une série de fonctions* ***sans faire appel à sa somme.***

2.2.2 Règle d'Abel

Comme pour les séries numériques (voir chapitre 1), nous avons l'analogue de la règle d'Abel.

Théorème 7 (Règle d'Abel) *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définies sur* $\mathcal{D}$ *où* $f_n(x) = \varepsilon_n g_n(x)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1. *la suite de nombres* $(\varepsilon_n)_n$ *tend vers zéro et la série* $\sum_n |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|$ *est convergente ;*
2. *il existe* $M > 0$ *tel que, pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\forall x \in \mathcal{D} \ : |g_p(x) + g_{p+1}(x) + ... + g_{p+n}(x)| \leq M.$$

Alors la série $\sum_n f_n$ *est uniformément convergente sur* $\mathcal{D}$.

Exemple 26 *On montre que la série définie par*

$$\sum_{n \geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n}, \ x \in [0,1] \qquad (*)$$

est uniformément convergente sur $[0,1]$. *En effet :*

Posons , $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ *et* $g_n(x) = (-1)^n x^n$. *On a :*

1. $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ *et la série*

$$\sum_n |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| = \sum_n \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right| = \sum_n \frac{1}{n(n+1)} \sim \sum_n \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

2. Et comme $g_n(x) = (-x)^n$ *avec* $|-x| \leq 1$ *est le terme général d'une série géométrique convergente, alors pour tout* $p \in \mathbb{N}$,

$$|g_p(x) + g_{p+1}(x) + ... + g_{p+n}(x)| = x^p \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} \leq 1, \ \forall x \in [0,1] \ \text{(ici } M = 1\text{).}$$

On en déduit que la série $\sum_n f_n$ *définie par* $(*)$ *est uniformément convergente sur* $[0,1]$.

2.2.3 Convergence normale

En plus de la convergence simple et uniforme, on dispose d'une notion de convergence plus forte spécifique aux séries de fonctions, c'est la **convergence normale** :

Définition 21 *Soit* $\sum_n f_n$ *une série de fonctions définies sur* $\mathcal{D}$*. On dit que* $\sum_n f_n$ *converge normalement sur* $\mathcal{D}$*, si et seulement si* ***la série numérique*** $\sum_n \|f_n\|_\infty$***converge,*** *où* $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x)|$.

Remarque 20 *1. Pour montrer qu'il ya convergence normale, on cherche à majorer* $|f_n(x)|$ *par un réel* a_n*, tel que* $\sum_n a_n$ *converge.*

2. Pour montrer qu'il n'ya pas de convergence normale, on cherche à minorer $|f_n(x)|$ *par un réel* b_n*, tel que* $\sum_n a_n$ *diverge.*

Exemple 27 *La série* $\sum_n \frac{\sin nx}{n^2}$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$*. En efffet,*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

d'où

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}\text{terme général d'une série de Riemann convergente}$$

d'où $\sum_n \|f_n\|_\infty$*converge (par comparaison). On en deduit que* $\sum_n \frac{\sin nx}{n^2}$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercise 2.2.1 *Montrer que la série* $\sum_n \frac{e^{-nx}}{2^n}$ *converge normalement sur* $[0, +\infty[$ *!*

On montre grâce au critère de Cauchy uniforme que la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Theorem 25 *Toute série normalement convergente sur* $\mathcal{D}$ *est uniformément convergente sur* $\mathcal{D}$*.*

Démonstration 12 *Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $\sum_n f_n$ *une série normalement convergente sur* $\mathcal{D}$*. La série numérique* $\sum_n \|f_n\|_\infty$*converge, elle est donc de Cauchy, il existe donc* $N' = N'(\varepsilon) \in$

$\mathbb{N}$ *tel que*

$$\begin{aligned}
p &> q \geq N' \Rightarrow \sum_{k=q+1}^{p} \|f_k\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow \left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ x \in \mathcal{D} \\
\textit{(puisque } |f_n(x)| &\leq \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{D}} |f_n(x)|\,,\ \textit{pour tout } x \in \mathcal{D} \textit{ et } n \in \mathbb{N}\textit{)} \\
&\Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{D}} \left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

alors $\sum_n f_n$ *est uniformément de Cauchy sur* $\mathcal{D}$*, elle est donc uniformément convergente sur* $\mathcal{D}$*.*

Theorem 26 *Toute série normalement convergente sur* $\mathcal{D}$ *est absolument convergente sur* $\mathcal{D}$*.*

Démonstration 13 *Directe du fait que*

$$\forall\ x \in \mathcal{D}\ : |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$$

Remarque 21 *Une série de fonctions peut être uniformément convergente sans y être normalement convergente. Voici un exemple :*

Exemple 28 *Soit* $\sum_n f_n$ *telle que*

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n},\ x \in [0,1]$$

D'une part, *on a* $\|f_n\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n}$ *d'où* $\sum_n \|f_n\|_\infty = \sum_n \frac{1}{n}$ *est la série harmonique divergente, donc* $\sum_n f_n$ *n'est pas normalement convergente sur* $[0,1]$*.*

D'une autre part, $\sum_n f_n$ *est uniformément convergente sur* $[0,1]$ *(d'après l'exercice du théorème de régle d'Abel ci-dessus).*

2.2.4 Propriétés de la somme d'une série de fonctions

On ne peut pas trouver, en général, une expression explicite de la somme d'une série de fonctions convergente. En revanche, nous savons prouver, en utilisant les critères précédents l'existence d'une telle somme. La plupart des résultats sur les propriétés de la somme (continuité, intégrabilité et dérivation) des séries de fonctions sont obtenus en appliquant directement ceux appliqués déjà sur les suites de fonctions.

Continuité de la somme

Théorème 8 (Continuité de la somme) *Soit* $\sum_n f_n$ *une série de fonctions définies sur* $\mathcal{D}$. *Soit* $x_0 \in \mathcal{D}$, ***on suppose que :***

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue en* x_0 *(resp. sur* $\mathcal{D}$*) ;*
2. $\sum_n f_n$ *converge uniformément sur* $\mathcal{D}$.

Alors la somme $x \longmapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est continue en* x_0 *(resp. sur* $\mathcal{D}$*).*

Démonstration 14 *Il suffit d'appliquer le théorème de continuité de la limite de la suite de fonctions (de sommes partielles) définie sur* $\mathcal{D}$, *par* $S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} f_p(x)$.

► Ce théorème affirme que la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente est continue.

Intégrabilité terme à terme

Théorème 9 (Intégrabilité terme à terme) *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions continues sur le segment* $[a, b]$, $(a < b)$. ***Si*** *la série de fonctions* $\sum_n f_n$ *converge uniformément sur* $[a, b]$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in [a, b]$, *posons* $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt$, ***alors :***

1. *la somme* $x \longmapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est continue sur* $[a, b]$ *;*
2. *la série* $\sum_n F_n$ *converge uniformément vers* F *sur* $[a, b]$ *où* $F(x) = \int_a^x S(t)\, dt$.

En particulier nous avons, pour tout $x \in [a,b]$, l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

Démonstration 15 *Il suffit d'appliquer le théorème d'intégrabilité de la limite de la suite de fonctions (de sommes partielles) définie sur $\mathcal{D}$, par $S_n(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} f_p(x)$.*

Remarque 22 *1. Dans le théorème ci dessus, on peut remplacer la condition de continuité sur $[a,b]$ par une condition faible à savoir "borneé et intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$".*

2. Le théorème ci-dessus, montre que la convergence uniforme permet d'intervertir la somme uniforme "$\sum$" et l'intégrale "$\int$".

Dérivation terme à terme

Théorème 10 (Dérivation terme à terme) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, $(a < b)$ telle que :*

1. Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la série numérique $\sum\limits_n f_n(x_0)$ converge ;

2. La suite des dérivées $\sum\limits_n f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Alors

***I**. la série $\sum\limits_n f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$;*

***II**. La somme de $\sum\limits_n f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ de dérivée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$, c.à.d.*

$$\forall x \in [a,b] : \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n{}'(x)$$

Démonstration 16 *Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation de la limite de la suite de fonctions (de sommes partielles) définie sur $\mathcal{D}$, par $S_n(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} f_p(x)$.*