PL : Devoir de TD,
à envoyer à l'adresse email : lakhdar.amrani@uni-setif.dz,
avant le 28 février 2021

Exercice N°1(Formulation) : Ecrire le programme linéaire formulant le problème suivant :

Un grossiste désire renouveler son stock de savon. Il s'adresse à trois fabricants F_1 , F_2 et F_3 pour une commande globale de 20 unités (unité=100 kg). Il est cependant tenu d'acheter une quantité non nulle aux deux fournisseurs F_1 et F_2 .

Quelle sont les commandes à passer à chacun de ces fournisseurs de manière à avoir une dépense optimale, si l'on sait que :

- F_1 peut fournir au maximum 10 unités, mais n'accepte jamais de commandes inférieures à 5 unités ;
- F_2 peut fournir au maximum 8 unités, mais n'accepte jamais de commandes inférieures à 4 unités ;
- F_3 peut fournir au maximum 8 unités.
- Les prix d'achats unitaires (en milliers de dinars) auprès de chaque fabricant sont les suivants : F_1 : 11 pour les 5 premiers unités et 9 pour les suivantes ; F_2 : 8 ; F_3 : 10.

Exercice N°2 (Méthode graphique) : Résoudre par la méthode graphique (en utilisant le logiciel graphique **Geogebra**) le PL suivant :

$$\text{Min}Z = -X_1 + X_2$$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} 2X_1 - X_2 \geq -2 \\ X_1 - 2X_2 \leq 2 \\ X_1 + X_2 \leq 5 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(PL)}$$

Exercice N°3 (Méthode du simplexe) : Résoudre, par la méthode du simplexe, le PL de l'exercice N°2(PL)

Corrigé exercice N°1

1. Définition des variables

Soient : x_1 :le nombre d'unités de savon achetées chez le fabricant 1

X_2 :le nombre d'unités de savon achetées chez le fabricant 2

X_3 :le nombre d'unités de savon achetées chez le fabricant 3

2. Description de la fonction objective

MinZ= $(11*5)+9(x_1-11)+8X_2+ 10X_3=9x_1+8X_2+10X_3-9*11+5*11=9x_1+8X_2+10X_3-44$

MinZ=$9x_1+8X_2+10X_3-44$

3. Description des contraintes

$x_1+X_2+X_3=20$ (Contrainte sur la quantité total commandé)

$\left.\begin{array}{l} x_1>0 \\ X_2>0 \end{array}\right\}$ (Contraintes des fabricants F_1 et F_2)

$5 \leq x_1 \leq 10 \equiv x_1 \leq 10$ et $x_1 \geq 5$ (Contraintes du fabricant F_1)

$4 \leq x_2 \leq 8 \equiv x_2 \leq 8$ et $x_2 \geq 4$ (Contraintes du fabricant F_2)

$0 \leq x_3 \leq 8 \equiv x_3 \leq 8$ (Contrainte du fabricant F_3)

$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \\ X_3 \geq 0 \end{array}\right\}$ (Contraintes de non-négativités des variables)

Donc :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+X_2+X_3=20 \\ x_1>0 \\ X_2>0 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1 \geq 5 \\ x_2 \leq 8 \\ x_2 \geq 4 \\ x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \\ X_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

Après simplification par suppression des contraintes redondantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+X_2+X_3=20 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1 \geq 5 \\ x_2 \leq 8 \\ x_2 \geq 4 \\ x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \\ X_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

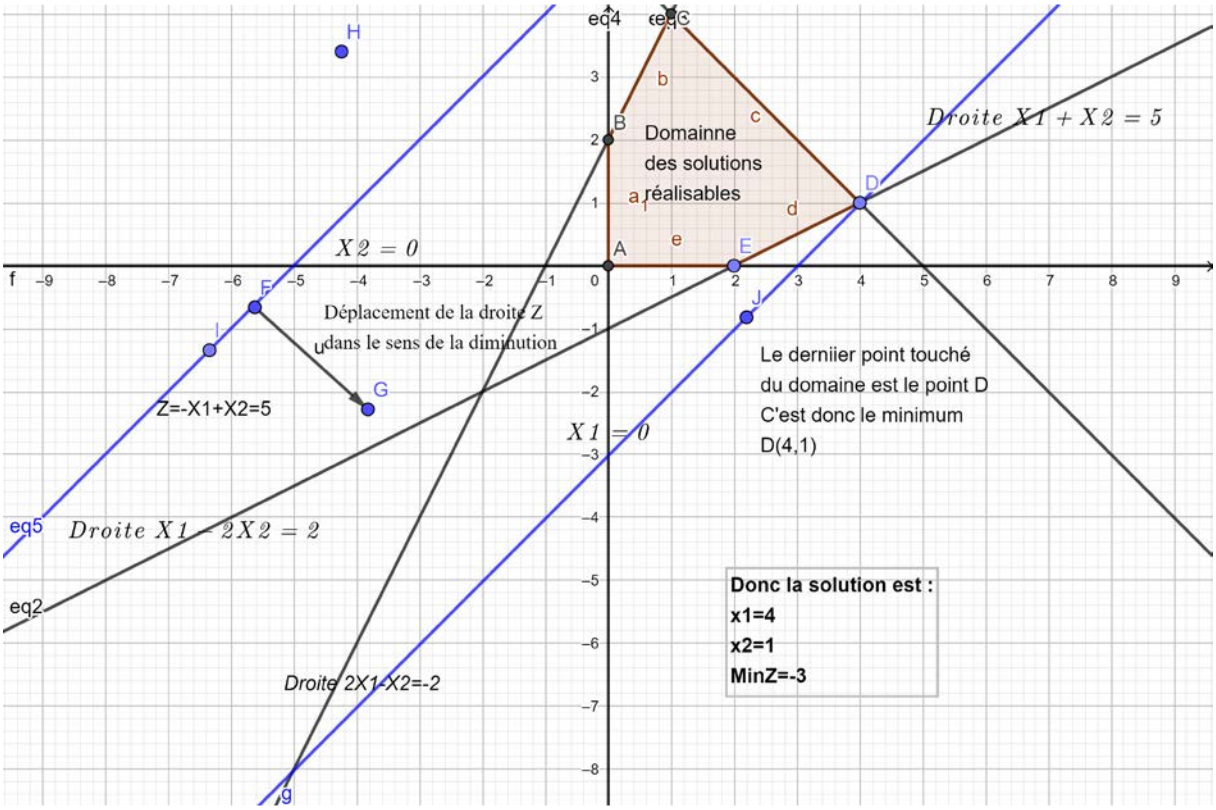
4. Le PL

MinZ=9x1+8X2+10X3-44

Tel que :

$$\begin{cases} x_1+X_2+X_3=20 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1 \geq 5 \\ x_2 \leq 8 \\ x_2 \geq 4 \\ x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Corrigé exercice N°2



Le programme admet la solution minimale:

$X_1=4$
$X_2=1$
MinZ=-3

Corrigé exercice N°3:Résoudre, par la méthode du simplexe,le PL de l'exercice N°2

$$\text{MinZ}= -X_1+X_2$$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} 2X_1-X_2 \geq -2 \\ X_1-2X_2 \leq 2 \\ X_1+X_2 \leq 5 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(PL)}$$

Il faut rendre tous les b_i non-négatif, il faut donc multiplier la contrainte 1 par (-1) :$(2X_1-X_2 \geq -2)*(-1)=(-2X_1+X_2 \leq 2)$ce qui donne le PL suivant : MinZ= $-X_1+X_2$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} -2X_1+X_2 \leq 2 \\ X_1-2X_2 \leq 2 \\ X_1+X_2 \leq 5 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

lakhdar.amrani@uni-setif.dz

- Sachant que MinZ=-Max(-Z), on va donc maximiser :
  $Max(-Z)= X_1-X_2$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} -2X_1+X_2 \leq 2 \\ X_1-2X_2 \leq 2 \\ X_1+X_2 \leq 5 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Et multiplier la valeur finale de (-Z) par (-1)

a) Transformation des inéquation en équations
   $Max(-Z)= X_1-X_2$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} -2X_1+X_2+X3 = 2 \\ X_1-2X_2+X4 = 2 \\ X_1+X_2+X5 = 5 \\ X_j \geq 0 \quad j=1\frown 5 \end{cases}$$

b) Création d'une solution de base de départ

Nous avons déjà une solution de base de départ puisque les variables d'écart jouent le rôle de variables de base :

Variables de base	Variables hors base	
X3 = 2	$X_1=0$	-Z=0
X4 = 2	$X_2=0$	
X5 = 5		

Utilisation des tableaux du simplexe pour la résolution du PL ainsi transformé :

	C_j	1	-1	0	0	0		
c^*	x^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Rapport
0	X_3	-2	1	1	0	0	2	
0	X_4	1	-2	0	1	0	2	2/1
0	X_5	1	1	0	0	1	5	5/1
Tableau	Z_j	0	0	0	0	0	$Z_0=0$	
N°1	Z_j-C_j	-1	1	0	0	0		

- Puisqu'il y a des (Z_j-C_j) négatifs, le maximum n'est pas atteint .
- Il n'y a qu'un (Z_j-C_j) négatif, c'est Z_1-C_1=-1,nous le choisirons, donc.
- Ceci indique que x_1 entre en base.
- Le minimum des rapports (b_i/a_{ij}) de la colonne 1 (avec $a_{ij}>0$) est (2/1=2) de la ligne 2.
- Ceci indique que x_4 quitte la base (x_4 sera remplacé par x_1)
- Donc le pivot = 1, qui se trouve à l'intersection de la colonne 1 et de la ligne 2

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan nous obtenons le 2[ième] Tableau :

	C_j	1	-1	0	0	0		
c^*	x^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Rapport
0	X_3	0	-3	1	2	0	6	
1	X_1	1	-2	0	1	0	2	
0	X_5	0	3	0	1	1	3	3/3
Tableau	Z_j	1	-2	0	1	0	Z=2	
N°2	Z_j-C_j	0	-1	0	1	0		

- Puisqu'il y a des (Z_j-C_j) négatifs, le maximum n'est pas atteint .
- Il n'y a qu'un (Z_j-C_j) négatif, nous le choisirons, c'est Z_2-C_2=-1
- Ceci indique que x_2 entre en base.
- Le minimum des rapports (b_i/a_{ij}) de la colonne 2 (avec $a_{ij}>0$) est (3/3=1) de la ligne 3. Il est le seul rapport possible (les autres (ligne1 et 2) ont leurs $a_{ij}<0$ en rouge dans le tableau)
- Ceci indique que x_5 quitte la base (x_5 sera remplacé par x_2)

- Donc le pivot = 3, qui se trouve à l'intersection de la colonne 2 et de la ligne 3

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan nous obtenons le 3ième Tableau

	C_j	1	-1	0	0	0	
c^*	x^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	X_3	0	0	1	3	1	9
1	X_1	1	0	0	5/3	2/3	4
-1	X_2	0	1	0	1/3	1/3	1
Tableau	Z_j	1	-1	0	4/3	1/3	Z=3
N°3	Z_j-C_j	0	0	0	4/3	1/3	

- Puisque tous les (Z_j-C_j) sont non-négatifs, le maximum est atteint .

Max(-Z)= 3
MinZ=-Max(-Z)= -(3)=-3

MinZ=-3
$x_1 = 4$ $\quad x_4 = 0$ car variable hors base
$x_2 = 1$ $\quad x_5 = 0$ car variable hors base
$x_3 = 9$

Evidement nous obtenons le même résultat avec les deux méthodes (Graphique et Simplexe)