Exercice 4 : Un agriculteur dispose d'une superficie cultivable de 50 ha. Il peut écouler, au prix du marché, tous les produits qu'il obtient et qui sont essentiellement des tomates, des laitues et des radis. Les tomates se vendent 50 DA le kg, la laitue se vend 30,50 DA le pied et la livre de radis 20,50 DA.

Les rendements moyens par ha sont respectivement de 2 tonnes, 4 000 pieds et 1 tonne, pour les tomates, la laitue et les radis.
Pour obtenir ces résultats, il faut employer des engrais à raison de 100 kg/ha pour les tomates et pour les laitues et à raison de 50 kg/ha pour les radis. D'autre part, les travaux d'aménagement du sol, de semence et de récolte demandent l'emploi de dix hommes/jour par hectare pour les tomates, de six hommes/jour par hectare pour les radis et de vingt hommes/jour par hectare pour la laitue. Compte tenu des disponibilités locales en main-d'œuvre, le cultivateur ne peut employer que 400 hommes/jour.
L'engrais revient à 50 DA le kg, le coût d'un homme/jour est de 350 DA.
Il s'agit de déterminer le meilleur programme de production.

1) Poser le problème sous forme de programme linéaire.
2) Déterminer la solution optimale à l'aide de la méthode du simplexe.
3) Peut-on améliorer le programme si on peut disposer de 200 hommes/jour de main d'œuvre supplémentaire au prix de 400 DA par homme/jour ?

Question 1 : Formulation du problème sous forme d'un programme linéaire.

a) Définition des variables

Soient :

x_1 : le nombre d'hectare cultivés en tomate

x_2 : le nombre d'hectare cultivés en laitue

x_3 : le nombre d'hectare cultivés en radis

b) Description de la fonction objective

Max Z= $(50*2000-(50*100) -(10* 350))x_1+(30.5*4000-(100*50) -(350*20)) x_2+(1000*2*20.50-(50*50) -(350*6)) x_3$

MaxZ =91500x_1+110000x_2 +36400x_3

c) Description des contraintes

Tel que $\begin{cases} 10x_1+20x_2+6x_3 \leq 400 & \textbf{(Contrainte sur les hommes disponibles)} \\ x_1+x_2+x_3 \leq 50 & \textbf{(Contrainte sur la superficie totale cultivable)} \\ x_j \geq 0 \text{ , } j=1 \text{ ,}2,3 & \textbf{(Contraintes de non-négativité des variables)} \end{cases}$

d) Le programme linéaire

MaxZ=91500x_1+110000$_2$+36400x_3

Tel que $\begin{cases} 10x_1+20x_2+6x_3 \leq 400 \\ x_1+x_2+x_3 \leq 50 \\ x_j \geq 0 \text{ , } j=1 \text{ ,}2,3 \end{cases}$

Question 2 : Résolution par la méthode du simplexe du PL

MaxZ=91500x_1+110000$_2$+36400x_3

Tel que $\begin{cases} 10x_1+20x_2+6x_3 \leq 400 \\ x_1+x_2+x_3 \leq 50 \\ x_j \geq 0 \text{ , } j=1 \text{ ,}2,3 \end{cases}$

1. Transformation des inéquations en équations

MaxZ=91500x_1+110000$_2$+36400x_3

Tel que $\begin{cases} 10\ x_1+20x_2+6x_3+x_4 = 400 & \text{(Ajout de la variable d'écart } x_4 \text{)} \\ x_1+x_2+x_3 + x_5 = 50 & \text{(Ajout de la variable d'écart } x_5 \text{)} \\ x_j \geq 0 \text{ , } j=1 \text{ ,}2,3,4,5 \end{cases}$

2. Création d'une solution de base de départ

Les variables d'écart jouent le rôle de variables de base donc, il n'y a pas lieu de rajouter d'autres variables, nous avons donc une solution de base de départ :

Solution de base de départ :
MaxZ=0

(Variables de base) : $\begin{cases} X_4 = 400 \\ x_5 = 50 \end{cases}$

(Variables de hors base) : $x_j = 0$, $j=1,2,3$

3. Utilisation des tableaux du simplexe pour la résolution du PL ainsi transformé

	C_j	91500	110000	36400	0	0		
c^*	x^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Rapport
0	X_4	10	20	6	1	0	400	400/20=20
0	X_5	1	1	1	0	1	50	50/1=50
Tableau	Z_j	0	0	0	0	0		
N°1	Z_j-C_j	-91500	-110000	-36400	0	0	Z_0=0	

– Puisqu'il y a des (Z_j-C_j) négatifs, le maximum n'est pas atteint .
– Parmi les (Z_j-C_j) négatifs, nous choisirons le plus grand en valeur absolue, donc : Z_2-C_2
– Ceci indique que x_2 entre en base.
– Le minimum des rapports (b_i/a_{ij}) de la colonne 2 (avec $a_{ij} \neq 0$) est (400/20) de la ligne 1.
– Ceci indique que x_4 quitte la base (x_4 sera remplacé par x_2)
– Donc le pivot = 20, qui se trouve à l'intersection de la colonne 2 et de la ligne 1

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan nous obtenons le 2ième Tableau :

	C_j	91500	110000	36400	0	0		
c^*	x^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Rapport
110000	X_2	1/2	1	3/10	1/20	0	20	20/1/2=40
0	X_5	1/2	0	7/10	-1/20	1	30	30/1/2=60
Tableau	Z_j	55000	110000	33000	5500	0		
N°2	Z_j-C_j	-36500	0	-3400	0	0	Z=2200000	

– Puisqu'il y a des (Z_j-C_j) négatifs, le maximum n'est pas atteint .
– Puisque (Z_1-C_1) est le plus grand négatif la variable hors base x_1 deviendra variable de base.
– Puisque minimum$\{$ 20/1/2, 30/1/2 $\}$ =40, la variable hors base x_1 deviendra variable de base dans la troisième équation, à la place de x_2. (pivot =1/2)

Après application de la procédure Gauss-Jordan nous obtenons le 3ième tableau :

	C_j	91500	110000	36400	0	0		
c^*	x^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Rapport
91500	X_1	1	2	3/5	1/10	0	40	
0	X_5	0	-1	4/10	-1/10	1	10	
Tableau	Z_j	91500	183000	54900	9150	0		
N°3	Z_j-C_j	0	73000	18500	9150	0	Z=3660000	

– Puisque tous les (Z_j-C_j) sont non-négatifs, le maximum est atteint .

– La solution de base maximale est :

MaxZ= 3 660 000
$x_1 = 40$ $x_2 = 0$
$x_5 = 10$ $x_3 = 0$
$x_4 = 0$

– Le profit maximal est de 3 660 000 DA
– L'agriculteur doit donc cultiver une superficie de 40 ha de tomate uniquement pour avoir un gain maximal de 3 660 000 DA .
– Pas de radis !
– Et pas laitue !

Question 3 : Peut-on améliorer le programme si on peut disposer de 200 hommes/jour de main d'œuvre supplémentaire au prix de 400 DA par homme/jour ?

Réponse :

la contrainte de main d'œuvre $10x_1+20x_2+6x_3 \leq 400$ devient dans ce cas $10x_1+20x_2+6x_3 \leq 600$
Si on remplace les variables par leurs valeurs, ça donne :

$10*40+0+0\leq600$ c'est-à-dire : $400\leq600$ la contrainte est satisfaite, donc 200 Hommes supplémentaires n'améliore pas le gain qui au contraire va diminuer de 200*400=80.000 Da