# Résolution d’un programme linéaire dans le cas d’une minimisation

Il faut préciser que l’algorithme du simplexe conjugué à n variantes offre des variantes permettant de solutionner aussi bien la maximisation que la minimisation.

Cependant il n’est pas nécessaire de connaitre **le simplexe de maximisation et le simplexe de minimisation ;**

En effet un des deux algorithme suffit, puisque les deux relations sont vraies :

**MinZ= -Max(-Z)**

**Et MaxZ=-Min(-Z)**

Comme nous avons introduit, en cours, l’algorithme du simplexe recherche du Maximum,

Quand il faut minimiser un PL il faut suivre cette procédure utilisant l’algorithme de maximisation MinZ=-Max(-Z) :

1. **Multipier la fonction objective à minimiser Z par *(-1), on obtient (-Z)**
2. **Appliquer le simplexe de maximisation à (-Z)**
3. **Dans le tableau final (optimal) du simplexe, multiplier la valeur de (-Z) ainsi obtenue pa(-1)**

**<u>Pour bien comprendre ce processus suivez bien la résolution de l'exercice N°5 du TD</u>**

**Exercice 5 :** La société des carrières de **Aîn-Arwa** a pour objet l'extraction et la distribution de matériaux de carrière. Elle doit assurer, pour des travaux routiers, la fourniture aux Ponts et Chaussées de graviers en divers calibres.
Un marché portant sur les quantités suivantes :

| | |
|---|---|
| Graviers calibre 1 | 13 500 tonnes |
| Graviers calibre 2 | 11 200 tonnes |
| Graviers calibre 3 | 5 000 tonnes |

a été adjugé pour un prix global de facturation.
La société exploite deux carrières P1 et P2 louées à une société civile qui perçoit une redevance par tonne de pierre extraite. Celle-ci est la suivante :

| | |
|---|---|
| Pour P1 | 19,40 da par tonne |
| Pour P2 | 20,00 da par tonne |

Après extraction la pierre et concassée. Les graviers ainsi obtenus sont triés selon leur calibre. Chaque tonne de pierre fournit les quantités suivantes de gravier (exprimées en tonnes) :

| Pierre de P1 : | Pierre de P2 : |
|---|---|
| Graviers calibre 1 : 0,36 t<br>Graviers calibre 2 : 0,40 t<br>Graviers calibre 3 : 0,16 t | Graviers calibre 1 : 0,45 t<br>Graviers calibre 2 : 0,20 t<br>Graviers calibre 3 : 0,10 t |

(Le complément à une tonne représente du sable, actuellement considéré comme déchet sans valeur marchande).

1) La direction souhaite définir son programme d'extraction de pierre de P1 et de P2 de façon à minimiser le coût de redevances à la société civile. (Formulation)
2) Résoudre le programme par la méthode du simplexe
3) L'optimisation du programme conduit-elle à produire des graviers en excédent par rapport aux tonnages adjugés ?

**Question 1 :** Formulation du problème sous forme d'un programme linéaire.

a) Définition des variables

Soient :

x1 : le nombre de tonne de pierre extraite de P1

x2 : le nombre de tonne de pierre extraite de P2

b) Description de la fonction objective

$$\mathbf{Min Z = 19.4x_1 + 20x_2}$$

c) Description des contraintes

**Tel que**
$$\begin{cases} 0.36x_1+0.45x_2 \geq 13500 & \text{( Contrainte sur le gravier calibre 1)} \\ 0.40x_1+0.20x_2 \geq 11200 & \text{( Contrainte sur le gravier calibre 2)} \\ 0.16x_1+0.10x_2 \geq 5000 & \text{( Contrainte sur le gravier calibre 3)} \\ x_1 \geq 0 \; ; x_2 \geq 0 & \text{( Non-négativité des variables)} \end{cases}$$

d) Le programme linéaire

$$\mathbf{Min Z = 19.4x_1 + 20x_2}$$

**Tel que**
$$\begin{cases} 0.36x_1+0.45x_2 \geq 13500 \\ 0.40x_1+0.20x_2 \geq 11200 \\ 0.16x_1+0.10x_2 \geq 5000 \\ x_1 \geq 0 \; ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Question 2 :** Résolution par la méthode du simplexe du PL

Sachant que : MinZ=-Max(-Z), nous allons utiliser donc le simplexe recherche du maximum pour trouver Max(-Z)

$$\text{Min}Z = 19.4x_1+20x_2 \quad = \quad -\text{Max}(-Z) = -19.4x_1-20x_2$$

Tel que
$$\begin{cases} 0.36x_1+0.45x_2 \geq 13500 \\ 0.40x_1+0.20x_2 \geq 11200 \\ 0.16x_1+0.10x_2 \geq 5000 \\ x_1 \geq 0 \; ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Transformation des inéquations en équations

$$\text{Max}(-Z) = -19.4x_1-20x_2$$

Tel que
$$\begin{cases} 0.36x_1+0.45x_2 - x_3 = 13500 & \text{(Soustraction de la variable d'excédent } x_3\text{)} \\ 0.40x_1+0.20x_2 - x_4 = 11200 & \text{(Soustraction de la variable d'excédent } x_4\text{)} \\ 0.16x_1+0.10x_2 - x_5 = 5000 & \text{(Soustraction de la variable d'excédent } x_5\text{)} \\ x_j \geq 0 \; ; j=1 \curvearrowright 5 \end{cases}$$

2. Création d’une solution de base de départ

Il faut rajouter des variables artificielles pour avoir une solution de base de départ :

$Max(-Z) = -19.4x_1 - 20x_2 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8$ (Désavantager les variables artificielles !)

Tel que
$$\begin{cases} 0.36x_1 + 0.45x_2 - x_3 + x_6 = 13500 & \text{(Ajout de la variable artificielle } x_6\text{)} \\ 0.40x_1 + 0.20x_2 - x_4 + x_7 = 11200 & \text{(Ajout de la variable artificielle } x_7\text{)} \\ 0.16x_1 + 0.10x_2 - x_5 + x_8 = 5000 & \text{(Ajout de la variable artificielle } x_8\text{)} \\ x_j \geq 0 \; ; \; j=1 \sim 8 \end{cases}$$

Nous avons, maintenant, une solution de base de départ :

Solution de base de départ :
$Max(-Z) = -29700M$

(Variables de base ) : $\begin{cases} X_6 = 13500 \\ x_7 = 11200 \\ X_8 = 5000 \end{cases}$

(Variables de hors base ) : $x_j = 0$ , $j=1 \sim 8$

3. Utilisation des tableaux du simplexe pour la résolution du PL ainsi transformé

| | $C_j$ | -19.4=-97/5 | -20 | 0 | 0 | 0 | -M | -M | -M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c^*$ | $x^*$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $b_i$ | Rapport |
| -M | $x_6$ | 9/25 | 9/20 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 13500 | 13500/(9/25)=37500 |
| -M | $x_7$ | 2/5 | 1/5 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 11200 | 11200/(2/5)=28000 |
| -M | $x_8$ | 4/25 | 1/10 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 5000 | 5000/(4/25)=31250 |
| Tableau | $Z_j$ | -23M/25 | -15M/20 | M | M | M | -M | -M | -M | $Z_0$=-29700M | |
| N°1 | $Z_j$-$C_j$ | (-23M/25)+97/5 | (-15M/20)+20 | M | M | M | 0 | 0 | 0 | | |

- Puisqu’il y a des ($Z_j$-$C_j$ ) négatifs, le maximum n’est pas atteint .
- Parmi les ($Z_j$-$C_j$) négatifs, nous choisirons le plus grand en valeur absolue, donc : $Z_1$-$C_1$
- Ceci indique que $x_1$ entre en base.
- Le minimum des rapports ($b_i/a_{ij}$ ) de la colonne 2 (avec $a_{ij}>0$) est (11200/(2/5)=28000) de la ligne 2.
- Ceci indique que $x_7$ quitte la base ($x_7$ sera remplacé par $x_1$ )
- Donc le pivot = 2/5, qui se trouve à l’intersection de la colonne 1 et de la ligne 2

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan nous obtenons le 2[ième] Tableau :

| | $C_j$ | -19.4 | -20 | 0 | 0 | 0 | -M | -M | -M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c^*$ | $x^*$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $b_i$ | Rapport |
| -M | $x_6$ | 0 | 27/100 | -1 | 9/10 | 0 | 1 | -9/10 | 0 | 3420 | 3420/(9/10)=3800 |
| -97/5 | $X_1$ | 1 | 1/2 | 0 | -5/2 | 0 | 0 | 5/2 | 0 | 28000 | ✖ |
| -M | $X_8$ | 0 | 1/50 | 0 | 2/5 | -1 | 0 | -2/5 | 1 | 520 | 520/(2/5)=1300 |
| Tableau | $Z_j$ | -97/5 | -29M/100-97/10 | M | -13M/10+97/2 | M | -M | 13M/10-97/2 | -M | Z=-543 200-3940M | |
| N°2 | $Z_j$-$C_j$ | 0 | -29M/100+103/10 | M | -13M/10+97/2 | M | 0 | 3M/10-97/2 | 0 | | |

Remarque : On ne fait pas le rapport de la ligne 2 car $a_{ij}$=-5/2 en rouge est négatif, alors qu’il doit être > 0 !

- Puisqu'il y a des ($Z_j$-$C_j$ ) négatifs, le maximum n'est pas atteint .
- Puisque ($Z_4$-$C_4$) est le plus grand négatif la variable hors base $x_4$ deviendra variable de base.
- Puisque minimum{ 3420/(9/10)=3800, 520/(2/5)=1300 } =1300, la variable hors base $x_4$ deviendra variable de base dans la troisième équation, à la place de $x_8$. (pivot =2/5)

Après application de la procédure Gauss-Jordan nous obtenons le 3[ième] tableau :

| | $C_j$ | -19.4 | -20 | 0 | 0 | 0 | -M | -M | -M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c^*$ | $x^*$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $b_i$ | Rapport |
| -M | $x_6$ | 0 | 9/40 | -1 | 0 | 9/4 | 1 | 0 | -9/4 | 2250 | ← |
| -97/5 | $X_1$ | 1 | 5/8 | 0 | 0 | -25/4 | 0 | 0 | 25/4 | 31250 | ✖ |
| 0 | $X_4$ | 0 | 1/20 | 0 | 1 | -5/2 | 0 | -1 | 5/2 | 1300 | ✖ |
| Tableau | $Z_j$ | 97/5 | -9M/40-97/8 | M | 0 | -9M/4+485/4 | -M | 0 | -9M/4-485/4 | Z=- | |
| N°3 | $Z_j$-$C_j$ | 0 | -9M/40+63/8 | M | 0 | -9M/4+485/4 | 0 | M | -5M/4-485/4 | 2250M | |

- Un seul rapport est possible, celui de la ligne 1 !

Après application de la procédure Gauss-Jordan nous obtenons le 4[ième] tableau :

| | $C_j$ | -19.4 | -20 | 0 | 0 | 0 | -M | -M | -M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c^*$ | $x^*$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $b_i$ | Rapport |
| 0 | $X_5$ | 0 | 1/10 | -4/9 | 0 | 1 | 4/9 | 0 | -1 | 1000 | 10000 ← |
| -97/5 | $X_1$ | 1 | 5/4 | -25/9 | 0 | 0 | 25/9 | 0 | 0 | 37500 | 30000 |
| 0 | $X_4$ | 0 | 3/10 | -10/9 | 1 | 0 | 10/9 | -1 | 0 | 3800 | 38000/3 |
| Tableau | $Z_j$ | -97/5 | -97/4 | +485/9 | 0 | 0 | -485/9 | 0 | 0 | Z=- | |
| N°4 | $Z_j$-$C_j$ | 0 | -17/4 | +485/9 | 0 | 0 | M-485/9 | M | M | 727500 | |

Après application de la procédure Gauss-Jordan nous obtenons le 5[ième] tableau :

| | $C_j$ | -19.4 | -20 | 0 | 0 | 0 | -M | -M | -M | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c^*$ | $x^*$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $b_i$ |
| -20 | $X_2$ | 0 | 1 | -40/9 | 0 | 10 | 40/9 | 0 | -10 | 10000 |
| -97/5 | $X_1$ | 1 | 0 | 25/9 | 0 | -25/2 | -25/9 | 0 | 25/2 | 25000 |
| 0 | $X_4$ | 0 | 0 | 2/9 | 1 | -3 | -2/9 | -1 | 3 | 800 |
| Tableau | $Z_j$ | -97/5 | -20 | +315/9 | 0 | 285 | -315/9 | 0 | -85 | Z=-685 000 |
| N°4 | $Z_j$-$C_j$ | 0 | 0 | +315/9 | 0 | 285 | M-315/9 | M | M-85 | |

- Puisque tous les ($Z_j$-$C_j$ ) sont non-négatifs, le maximum est atteint .

Max(-Z)= -685 000
MinZ=-Max(-Z)= -(-685 000)= 685 000

- La solution minimale est :

MinZ= 685 000
$x_1 = 25000$ $x_3 = 0$
$x_2 = 10000$ $x_5 = 0$
$x_4 = 800$ $x_6 = 0$
$x_7 = 0$
$x_8 = 0$

- La redevance  minimale est de 685 000 DA
- Pour cette dépense de redevances minimale, la direction doit extraire :
  - 25000 tonnes de pierre de la carrière P1
  - et 10 000 tonnes de pierre de la carrière P2.

**Question 5** : L'optimisation du programme conduit-elle à produire des graviers en excédent par rapport aux tonnages adjugés ?

**Réponse : Vérifions les trois contraintes du problème avec les valeurs des variables $x_1$ et $x_2$**

$x_1 = 25000$ ; $x_1 = 25000$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $0.36x_1+0.45x_2 \geq 13500$ | | $0.36_{x}25000+0.45_{x}10000 \geq 13500$ | | $13500 \geq 13500$ |
| $0.40x_1+0.20x_2 \geq 11200$ | $\Rightarrow$ | $0.40_{x}25000+0.20_{x}10000 \geq 11200$ | $\Rightarrow$ | $12000 \geq 11200$ |
| $0.16x_1+0.10x_2 \geq 5000$ | | $0.16_{x}25000+0.10_{x}10000 \geq 5000$ | | $5000 \geq 5000$ |

Ainsi donc : l'optimisation conduit à extraire :

- **13500 tonnes** de graviers de **calibre 1**  et sans aucun excédent.
- **12000 tonnes** de graviers de **calibre 2** avec un excédent de **800 tonnes = 12000-11200**.
- Et **5000 tonnes** de graviers de **calibre 3**  et sans aucun excédent**.**