Département de mathématiques
Faculté des Sciences
Université Ferhat Abbas-Sétif 1

2020/2021

Analyse numérique 1

Série d'exercices N° 3

Exercice 1 :

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ le sous espace vectoriel $F = span\{(1,1,1)^T, (0,1,3)^T\}$

1) Vérifier que $f = (-2,0,1)^T \notin F$
2) Déterminer au sens des moindres carrés, la meilleure approximation de f dans F que l'on note $\overline{f}$ et donner l'erreur.

Exercice 2 :

1) Déterminer au sens de moindre carré la meilleure approximation de degré 1 de la fonction $f(x) = e^x$ dans $[0 \ , \ 1]$, puis déduire une valeur approchée au nombre *e*.
2) Déterminer au sens de moindre carré la meilleure approximation de degré 2 de la fonction $f(x) = sinx$ dans $\left[\frac{-\pi}{2} \ , \ \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3 :

1) Déterminer au sens de moindre carré le polynôme $p_1(x)$ meilleure approximation de la fonction f définie par :

x	*-1*	*0*	*1*	*2*
F(x)	*3*	*2*	*-3*	*5*

2) Calculer $p_1(x)$ par une autre manière (minimisation d'une fonction quadratique).
3) Evaluer l'erreur : $\|f - p_1\|_2$.

Exercice 4 :

Soient F un s. e. v de $E = C([-\pi, \pi])$ muni du produit scalaire :

$< g, k >= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)k(x)dx$ et $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \{1, \cos x, \sin x\}$ une base de F.

1. Transformer B à une base orthonormée $B' = \{h_1, h_2, h_3\}$ en utilisant la formule de Gram-Schmidt :

$$\begin{cases} h_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}, \quad h_m = \frac{u_m}{\|u_m\|} \end{cases} \text{ avec } u_m = \varphi_m - \sum_{i=1}^{m-1} < \varphi_m, h_i > h_i, \quad m \geq 2.$$

2. Soient f un élément de E et φ^* un élément de F tel que $\varphi^* = \sum_{i=1}^{3} b_i h_i$.
Déterminer les constantes b_i en fonction de f pour que φ^* soit la meilleure approximation de f dans F au sens des moindres carrées

3. Prenons $f(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$, déduire alors sans calcul, la valeur de φ^*.

Exercice 5 :

Soient E un espace préhilbertien, f un élément de E, $\| f \| = \sqrt{< f, f >}$, et F un sous espace vectoriel de dimension finie de E, on sait qu'il existe au moins un élément $\varphi^* \in F$ constituant la meilleure approximation de f dans F. Démontrer le théorème suivant :

1. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi^* \in F$ soit la meilleure approximation d'un élément f de E est : $< f - \varphi^*, \varphi > = 0 \quad \forall \varphi \in F$.
2. φ^* est unique.

Exercice 6 (supplémentaire) :

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{H} = \mathrm{C}[0,1]$ muni du produit scalaire $< k, g >= \int_0^1 k(x)g(x)dx$ et le sous espace $F = span\{1, x,\ x^2\}$. Construire une base orthogonale à F, puis déterminer la meilleure approximation polynomiale de degré 2 au sens des moindres carrés pour la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ dans $[0,1]$.

Indication : Une base quelconque $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ peut être transformée à une base orthogonale $\{k_0, k_1, k_2, \dots, k_n\}$ comme suit :

$$\begin{cases} k_0 = e_0, \quad k_i = e_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{< e_{i,} k_j >}{\|k_j\|^2} k_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$