

Exo 1

Rappel (Meilleure approximation au sens des moindres carrés (M.C))

Soit E un esp. vect. préhilbertien, muni de la norme
 $\forall f \in E, \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire)
 et soit $F \subseteq E$, un sous-esp. vect. de dimension finie
 ($\dim F = n < \infty$) et soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de F .

Alors, $\forall f \in E$, il existe $e^* \in F$ / e^* est la meilleure approximation au sens des moindres carrés (M.C) de f , et on a :

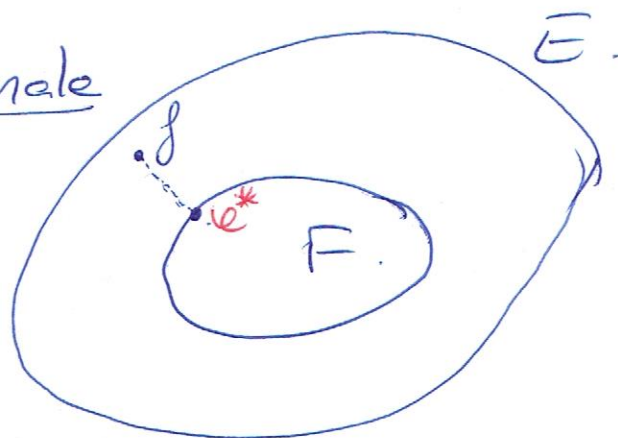
($e^* = \sum_{i=1}^n a_i^* e_i$ est la m. app. au sens des M.C de f)

$$\Leftrightarrow \langle f - e^*, e \rangle = 0, \forall e \in F$$

$$\Leftrightarrow \langle f - e^*, e_k \rangle = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle f - e^*, e_1 \rangle = 0 \\ \langle f - e^*, e_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle f - e^*, e_n \rangle = 0 \end{cases}$$

i.e e^* est la projection orthogonale de f sur F .

Remarques:

1) Si $f \in F$, alors $e^* = f$.

2) e^* vérifie :

$$\|f - e^*\| = \min_{e \in F} \|f - e\|$$

3) L'erreur :

$$\varepsilon = \|f - e^*\| = \sqrt{\langle f - e^*, f - e^* \rangle}$$

Exo 1: Soit le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ tel.

$$F = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\} = \{ \alpha v_1 + \beta v_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

* $\{v_1, v_2\}$ est une base de F (car $\{v_1, v_2\}$ génèrent F et sont libres i.e. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

1) Vérifier que $f = (-2, 0, 1)^T \notin F$.

On a $(v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F) \Leftrightarrow (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid v = \alpha v_1 + \beta v_2)$.

Supposons que $f \in F$ i.e. $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid f = \alpha v_1 + \beta v_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad 1 \neq 2$$

impossible

Donc, $\nexists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid f = \alpha v_1 + \beta v_2$

$\Rightarrow f \notin F$.

2) Déterminer la m. app. au sens des P.C de f sur F .

On a: $(\bar{f} = a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R})$, et la m. app. au sens des P.C de f

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle f - \bar{f}, v_1 \rangle = 0 \\ \langle f - \bar{f}, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} \bar{f} &= (a_1, a_1 + a_2, a_1 + 3a_2)^T \\ f - \bar{f} &= (-2 - a_1, -a_1 - a_2, 1 - a_1 - 3a_2)^T \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} -2 - a_1 \\ -a_1 - a_2 \\ 1 - a_1 - 3a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} -2 - a_1 \\ -a_1 - a_2 \\ 1 - a_1 - 3a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} \text{On a, } \forall u, v \in \mathbb{R}^3 \\ \langle u, v \rangle = v^T u. \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 + 4a_2 = -1 \\ 4a_1 + 10a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{11}{7} \\ a_2 = \frac{13}{14} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{f} = a_1 v_1 + a_2 v_2 = \frac{1}{14} (-22, -9, 17)^T$$

* l'erreur: $\varepsilon = \|f - \bar{f}\| = \sqrt{\langle f - \bar{f}, f - \bar{f} \rangle}$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \|f - \bar{f}\|^2 &= \langle f - \bar{f}, f - \bar{f} \rangle = \left\langle \left(-\frac{6}{14}, \frac{9}{14}, -\frac{3}{14}\right), \left(-\frac{6}{14}, \frac{9}{14}, -\frac{3}{14}\right) \right\rangle \\ &= \left(-\frac{6}{14}\right)^2 + \left(\frac{9}{14}\right)^2 + \left(-\frac{3}{14}\right)^2 = 0,6429. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \|f - \bar{f}\| = \sqrt{0,6429} = 0,8018$$

Exo 2

Rappel: Soit E l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$.

$$E = \mathcal{C}([a, b]) = \{f \mid f \text{ continue sur } [a, b]\}$$

On considère le produit scalaire :

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot w(x) dx.$$

où $w(x)$ est la fonction poids ($w(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$)

$$\text{et } \|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) w(x) dx.$$

Soit $F \subseteq E$ (s.e.v) tq $\dim F = n < \infty$.

et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de F . Alors on a, $\forall f \in E$

$(e^* = \sum_{i=1}^n a_i^* e_i \in F \text{ et le m. app. au sens des P.C de } f \text{ sur } [a, b])$

$$\Leftrightarrow \langle f - e^*, e_k \rangle = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle f - e^*, e_1 \rangle = \int_a^b (f(x) - e^*(x)) \cdot e_1(x) \cdot w(x) dx = 0 \\ \vdots \\ \langle f - e^*, e_n \rangle = \int_a^b (f(x) - e^*(x)) \cdot e_n(x) \cdot w(x) dx = 0 \end{cases}$$

Remarques

- 1) Généralement, on prend $w(x) = 1$.
- 2) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthogonale (i.e. $\langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i \neq j$)
alors $a_i^* = \frac{\langle f, e_i \rangle}{\|e_i\|^2}, \forall i = 1, 2, \dots, n$.
- 3) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée
(i.e. orthogonale ($\langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i \neq j$) et $\|e_i\| = 1, \forall i = 1, \dots, n$)
alors : $a_i^* = \langle f, e_i \rangle, \forall i = 1, 2, \dots, n$.
- 4) Si f est paire $\Rightarrow e^*$ est paire
- 5) Si f est impaire $\Rightarrow e^*$ est impaire

Exo2

1) Déterminer au sens des P.C la m. app. de degré 1 (i.e $P_1(x) = ?$) de $f(x) = e^x$ dans $[0, 1]$.

On prend $F = \mathbb{R}_1[x] = \text{span}\{1, x\}$ (l'espace vect. des polynômes de degré ≤ 1) i.e on considère la base $\{1, x\}$.

On a $(P_1(x) = ax + b)$ est la m. app. au sens des P.C de f sur $[0, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle f(x) - P_1(x), 1 \rangle = 0 \\ \langle f(x) - P_1(x), x \rangle = 0 \end{cases}$$

On a:

$$\begin{aligned} * \langle f(x) - P_1(x), 1 \rangle &= \int_0^1 (e^x - ax - b) \cdot 1 \cdot w(x) dx \quad / \quad w(x) = 1 \\ &= \int_0^1 e^x - ax - b dx = \left[e^x - \frac{ax^2}{2} - bx \right]_0^1 \\ &= \boxed{e - \frac{a}{2} - b - 1 = 0} \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \langle f(x) - P_1(x), x \rangle &= \int_0^1 (e^x - ax - b) \cdot x \cdot w(x) dx \quad (w(x) = 1) \\ &= \left[xe^x - e^x - \frac{ax^3}{3} - \frac{bx^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{-\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1 = 0} \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

$$\text{On a De ② } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b = e - 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 18 - 6e} \\ \boxed{b = 4e - 10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1(x) = (18 - 6e)x + 4e - 10}$$

2) En déduire une valeur approximative de e

On a, $\forall x \in [0, 1], f(x) \simeq P_1(x)$ (au sens des P.C)

Pour $x = 1 \in [0, 1]$, on a $e = f(1)$ (car $f(x) = e^x$).

$$\Rightarrow e = f(1) \simeq P_1(1) = (18 - 6e) \cdot 1 + 4e - 10 = 8 - 2e$$

$$\Rightarrow e \simeq 8 - 2e \Rightarrow 3e \simeq 8 \Rightarrow e \simeq \frac{8}{3} = 2,6667$$

$$\Rightarrow \boxed{e \simeq 2,67}$$

Exo 2

2) Déterminer au sens des moindres carrés $P_2(x)$ la m. app. de degré 2 de la fonction $f(x) = \sin x$ dans $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On a: f est impaire sur I ($f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$)
 $\Rightarrow P_2(x) = P_1(x) = ax$ (P_1 impair)

On a: (P_1 est m. app. au sens des M.C)

$$(H) \begin{cases} \langle f - P_1, 1 \rangle = 0 \\ \langle f - P_1, x \rangle = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \begin{cases} 0 = 0 \text{ car } P_1(x) = ax + 0 \cdot 1 \\ \text{i.e } b = 0 \end{cases}$$

$$(H) \langle f - P_1, x \rangle = 0 \quad (H) \langle \sin x - ax, x \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - ax) \cdot x \cdot w(x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x - ax^2 dx = 0 \quad (\text{on prend } \underline{w(x)=1})$$

$$\Leftrightarrow \left[-x \cos x + \sin x - \frac{a}{3} x^3 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{a}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 + \frac{a}{3} \left(-\frac{\pi}{2} \right)^3 = 0 \quad (H) \quad 2 = \frac{\pi^3}{12} a$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = \frac{24}{\pi^3}}$$

Donc: $\boxed{P_1(x) = \frac{24}{\pi^3} x}$ est la m. app. au sens des M.C de degré 2 de $f(x) = \sin x$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exo3:

Rappel: Meilleure app. au sens des P.C. discrets.

Soient $E = C([a, b])$ et $F \subseteq E$ un s.e.v tq $\dim F = n < \infty$ avec $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de F .

Soit f donnée en m pts $x_i \in [a, b]$,
où $m > n$. Alors on a:

x_1	x_2	$\dots$	x_m
$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_m)$

($e^* = \sum_{i=1}^n a_i^* e_i$ est la m. app. au sens des P.C de f sur F)

$$\Leftrightarrow \langle f - e^*, e_p \rangle = 0, \quad \forall p = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m [(f(x_k) - e^*(x_k)) \cdot e_p(x_k) \cdot w(x_k)] = 0, \quad \forall p = 1, 2, \dots, n.$$

où $w(x)$ est une fonction poids (généralement on prend)
 $w(x) = 1$

1) Soit f donnée par:

x_i	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 2$
$f(x_i)$	3	2	-3	5

Déterminer $P_1(x) = ax + b$

la m. app. au sens des P.C de f .

On a $F = \mathbb{R}_1[x]$, on prend la base canonique de F

$B = \{1, x\}$. Alors:

($P_1(x) = ax + b$ est la m. app. p. au sens des P.C de f sur F)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle f - P_1, e_1 \rangle = 0 \\ \langle f - P_1, e_2 \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{tq } \begin{cases} e_1(x) = 1 \\ e_2(x) = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^4 [(f(x_k) - P_1(x_k)) \cdot 1] = 0 \\ \sum_{k=1}^4 [(f(x_k) - P_1(x_k)) \cdot x_k] = 0 \end{cases}$$

/ On prend
 $w(x) = 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(x_1) - ax_1 - b) + (f(x_2) - ax_2 - b) + (f(x_3) - ax_3 - b) + (f(x_4) - ax_4 - b) = 0 \\ (f(x_1) - ax_1 - b) \cdot x_1 + (f(x_2) - ax_2 - b) \cdot x_2 + (f(x_3) - ax_3 - b) \cdot x_3 + (f(x_4) - ax_4 - b) \cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+a-b) + (2-b) + (-3-a-b) + (5-2a-b) = 0 \\ (3+a-b) \cdot (-1) + (2-b) \cdot 0 + (-3-a-b) \cdot 1 + (5-2a-b) \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 7 \\ 6a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} = 0,1 \\ b = \frac{17}{10} = 1,7 \end{cases}$$

Donc, $P_1(x) = ax + b = 0,1x + 1,7$

2) Déterminer $P_1(x)$ par une autre méthode (minimisation d'une fonction convexe).

Soit $F(a,b) = \|f - P_1\|^2 = \langle f - P_1, f - P_1 \rangle = \sum_{k=1}^4 (f(x_k) - P_1(x_k))^2$

On a: ($P_1(x) = ax + b$, et la m. app. p. au sens des M.C de f)

$\Leftrightarrow (a,b)$ est solution du prob $\left\{ \begin{array}{l} \min F(a,b) \\ a,b \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

On a: $F(a,b) = \sum_{k=1}^4 (f(x_k) - P_1(x_k))^2 = \sum_{k=1}^4 (f(x_k) - ax_k - b)^2$

$\Rightarrow F(a,b) = (3+a-b)^2 + (2-b)^2 + (-3-a-b)^2 + (5-2a-b)^2$

$\Rightarrow F(a,b) = 6a^2 + 4b^2 + 4ab - 8a - 14b + 47$

F est une fonction convexe. Alors:

(a,b) est le min de $F \Leftrightarrow \nabla F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = 12a + 4b - 8 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = 8b + 4a - 14 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 4 \\ 2a + 4b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} = 0,1 \\ b = \frac{17}{10} = 1,7 \end{cases}$

Donc: $P_1(x) = 0,1x + 1,7$

Remarque: On a trouvé le même polynôme, c'est normal, car $P_1(x)$, s'il existe, il est unique.

3) d'erreur: $e = \|f - P_1\|_2$
On a: $\|f - P_1\|^2 = \sum_{k=1}^4 (f(x_k) - P_1(x_k))^2 = F(0,1; 1,7) = 34,7$
 $\Rightarrow e = \sqrt{34,7} = 5,89$

4) Soit g donnée par

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
$g(x_i)$	1	3	7

Déterminer la m. app de g de la forme
 $e(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$ tq $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit $F(a, b) = \|g - e\|^2 = \langle g - e, g - e \rangle$.

$$= \sum_{i=1}^3 (g(x_i) - e(x_i))^2$$

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
$e(x_i)$	a	b	$a + 4b$

$$\Rightarrow F(a, b) = (1-a)^2 + (3-b)^2 + (7-a-4b)^2$$

$$\Rightarrow F(a, b) = 2a^2 + 17b^2 + 8ab - 16a - 62b + 59$$

F est une fonction convexe. Alors on a:

($e(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$ est la m. app. au sens des P.C de g)

$\Leftrightarrow (a, b)$ est la solution de $\begin{cases} \min F(a, b) \\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \nabla F(a, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = 4a + 8b - 16 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = 34b + 8a - 62 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 4 \\ 4a + 17b = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ b = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc: } e(x) = \frac{2}{3}\sqrt{|x-1|} + \frac{5}{3}x^2$$

Exo 4:

Soit F un s.e.v de $E = C([-\pi, \pi])$ muni du produit scalaire

$$\forall g, k \in E, \langle g, k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot k(x) dx.$$

Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\} = \{1, \cos x, \sin x\}$ une base de F .

1) Transformer B à une base orthonormée $B' = \{h_1, h_2, h_3\}$ en utilisant la formule de Gram-Schmidt:

$$\{h_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, h_m = \frac{L_m}{\|L_m\|} \text{ avec } L_m = e_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle e_m, h_i \rangle \cdot h_i, m \geq 2\}$$

* On a: $h_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\|1\|}$

• $\|e_1\|^2 = \|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2\pi}$

$\Rightarrow h_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

* $h_2 = \frac{L_2}{\|L_2\|}$ tq $L_2 = e_2 - \langle e_2, h_1 \rangle \cdot h_1$ tq $e_2 = \cos x$

On a: $\langle e_2, h_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e_2(x) h_1(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$\Rightarrow L_2 = e_2 - 0 \cdot h_1 \Rightarrow L_2 = e_2 = \cos x$

et $\|L_2\|^2 = \langle \cos x, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$

$= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \Rightarrow \|L_2\| = \sqrt{\pi}$

Alors: $h_2 = \frac{L_2}{\|L_2\|} = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$

* $h_3 = \frac{L_3}{\|L_3\|}$ tq $L_3 = e_3 - \langle e_3, h_1 \rangle \cdot h_1 - \langle e_3, h_2 \rangle \cdot h_2$.

On a: $\langle e_3, h_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e_3(x) \cdot h_1(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

• $\langle e_3, h_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} dx = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin^2 x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \left(\int f f' = \frac{1}{2} f^2 \right)$

Donc: $L_3 = e_3 = \sin x$

• $\|L_3\|^2 = \langle L_3, L_3 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$

Alors $h_3 = \frac{L_3}{\|L_3\|} = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$ et $B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right\}$

2) Soient $f \in E$ et $e^* = \sum_{i=1}^3 b_i h_i = b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3$.

Déterminer les constantes b_i en fonction de f , pour que e^* soit la m. app. au sens des m.c de f sur F .

On a: ($e^* = \sum_{i=1}^3 b_i h_i$ est la m. app au sens des m.c de f)

$$\Leftrightarrow \langle f - e^*, h_i \rangle = 0, \forall i = 1, 2, 3.$$

Et comme $B' = \{h_1, h_2, h_3\}$ est une base orthogonale, alors:

$$b_i = \langle f, h_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \langle f, h_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) h_1(x) dx \\ b_2 = \langle f, h_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) h_2(x) dx \\ b_3 = \langle f, h_3 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) h_3(x) dx \end{cases}$$

3) Soit $f(x) = 2 \cos^2(\frac{x}{2})$: Déduire, sans calcul, la valeur de e^*

$$\text{On a: } f(x) = 2 \cos^2(\frac{x}{2})$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1 + \cos(2 \times \frac{x}{2})}{2} \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \cos x = e_1 + e_2 + 0 \cdot e_3 \quad (\text{combinaison linéaire des } e_i)$$

$$\Rightarrow f \in F = \text{span} \{e_1, e_2, e_3\}.$$

$$\Rightarrow \boxed{e_{(f)}^* = f(x) = 2 \cos^2(\frac{x}{2})}$$

Exo 6: Soit $\mathcal{H} = \mathcal{C}([0, 1])$ l'espace des fonctions continue sur $[0, 1]$, muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in \mathcal{H}, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

et soit le s.e. $F = \text{span}\{1, x, x^2\}$

1) Construire une base orthogonale de F .

Rappel: Une base quelconque $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ peut être transformée en une base orthogonale $\{k_0, k_1, \dots, k_n\}$ comme suit:

$$\begin{cases} k_0 = e_0 \\ k_i = e_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle e_i, k_j \rangle}{\|k_j\|^2} \cdot k_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Soit $F = \text{span}\{1, x, x^2\} = \{e_0, e_1, e_2\}$ / $e_0 = 1, e_1 = x, e_2 = x^2$

alors $\{k_0, k_1, k_2\}$ est une base orthogonale tq:

* $k_0 = e_0 = 1$

* $k_1 = e_1 - \frac{\langle e_1, k_0 \rangle}{\|k_0\|^2} \cdot k_0 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 = x - \int_0^1 x \cdot 1 dx$

$\Rightarrow k_1 = x - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = x - \frac{1}{2}$ ($\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1$)

* $k_2 = e_2 - \left[\frac{\langle e_2, k_0 \rangle}{\|k_0\|^2} \cdot k_0 + \frac{\langle e_2, k_1 \rangle}{\|k_1\|^2} \cdot k_1 \right]$

$= x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 - \frac{\langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle}{\|x - \frac{1}{2}\|^2} \cdot (x - \frac{1}{2})$

on a: $\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

* $\langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle = \int_0^1 x^2 (x - \frac{1}{2}) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

* $\|x - \frac{1}{2}\|^2 = \langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) dx = \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} dx$

$\Rightarrow \|x - \frac{1}{2}\|^2 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow k_2 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} (x - \frac{1}{2})$

$\Rightarrow k_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$

* On vérifie facilement que $\{k_0, k_1, k_2\}$ est une base orthogonale i.e. $\langle k_i, k_j \rangle = 0, \forall i \neq j$
 ($\langle k_0, k_1 \rangle = 0$, $\langle k_0, k_2 \rangle = 0$ et $\langle k_1, k_2 \rangle = 0$)

2) Déterminer la m. app. p au sens des P.C de degré 2 de $f(x) = \sqrt{x}$ dans $[0,1]$.

On utilise la base orthogonale $\{k_0, k_1, k_2\} = B$
 on a: $\left(P_2(x) = a_0 k_0 + a_1 k_1 + a_2 k_2 \right.$ est m. app. de degré 2
 $\left. \text{de } f \text{ au sens des P.C sur } [0,1] \right)$

$$\Leftrightarrow \langle f - P_2, k_i \rangle = 0 \quad \forall i = 0, 1, 2.$$

Comme la base B est orthogonale alors:

$$a_i = \frac{\langle f, k_i \rangle}{\|k_i\|^2}, \quad i = 0, 1, 2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{\langle f, k_0 \rangle}{\|k_0\|^2} \\ a_1 = \frac{\langle f, k_1 \rangle}{\|k_1\|^2} \\ a_2 = \frac{\langle f, k_2 \rangle}{\|k_2\|^2} \end{cases}$$

* Calculons $\|k_i\|^2 = ?$

$$\text{on a: } * \|k_0\|^2 = \langle k_0, k_0 \rangle = \int_0^1 k_0 \cdot k_0 dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = \boxed{1 = \|k_0\|^2}$$

$$* \|k_1\|^2 = \langle k_1, k_1 \rangle = \int_0^1 k_1^2 dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx = \boxed{\|k_1\|^2 = \frac{1}{12}}$$

$$\begin{aligned} * \|k_2\|^2 &= \langle k_2, k_2 \rangle = \int_0^1 k_2^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{36}x \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|k_2\|^2 = \frac{1}{180}}$$

* Calculons $\langle f, k_i \rangle =$

$$* \langle f, k_0 \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot k_0 dx = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot 1 dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{\langle f, k_0 \rangle}{\|k_0\|^2} = \frac{2/3}{1} \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{2}{3}}$$

$$* \langle f, k_1 \rangle = \int_0^1 f(x) k_1 dx = \int_0^1 \sqrt{x} (x - \frac{1}{2}) dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{15}}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\langle f, k_1 \rangle}{\|k_1\|^2} = 12 \cdot \frac{1}{15} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{4}{5}}$$

$$* \langle f, k_2 \rangle = \int_0^1 f(x) k_2 dx = \int_0^1 \sqrt{x} (x^2 - x + \frac{1}{6}) dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \boxed{-\frac{1}{315}}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\langle f, k_2 \rangle}{\|k_2\|^2} = 180 \cdot \left(-\frac{1}{315}\right) = -\frac{36}{63} \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{12}{21}}$$

Finalemment:

$$P_2(x) = a_0 k_0 + a_1 k_1 + a_2 k_2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot (x - \frac{1}{2}) - \frac{12}{21} (x^2 - x + \frac{1}{6})$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = -\frac{12}{21} x^2 + \frac{48}{35} x + \frac{18}{105}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = -0,5714 \cdot x^2 + 1,3714 \cdot x + 0,1714}$$