Université Ferhat ABBAS – Sétif 1
Faculté des Sciences
Département d'Informatique

2^{ième} année Licence
Matière: méthode numérique /
Travaux Pratiques

Année 2020/2021

TP N°3 Résolution numérique des systèmes linéaires $Ax = b$

méthodes itératives.

Objectif: Le but de ce TP est de résoudre le système $Ax = b$ par des méthodes numériques itératives

On considère le système d'équations linéaires $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ Où $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des inconnues.

Le système $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ admet une solution unique si et seulement si $det(A) \neq 0$.

Pour toute la suite, on convient de la notation suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} = D - E - F$$

où $\boldsymbol{D}$ est une matrice diagonale inversible, $\begin{cases} d_{ij} = a_{ij}; si\ i = j \\ d_{ij} = 0; si\ i \neq j \end{cases}$

$\boldsymbol{E}$ est une matrice strictement triangulaire inférieure $\begin{cases} e_{ij} = -a_{ij}; & si\ i > j \\ e_{ij} = 0; & si\ i \leq j \end{cases}$

$\boldsymbol{F}$ est une matrice strictement triangulaire supérieure. $\begin{matrix} f_{ij} = -a_{ij}; & si\ i < j \\ f_{ij} = 0; & si\ i \geq j \end{matrix}$

On rappelle que les méthodes dites itératives reposent toutes sur la même idée. On décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice inversible et on réécrit le système linéaire $Ax = b$ que l'on souhaite résoudre sous la forme d'un problème équivalent

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

On peut alors introduire la suite définie par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \end{cases}$$

Cette suite converge vers la solution du système linéaire $Ax = b$ si et seulement si le rayon spectral $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Pour obtenir une "bonne approximation" de la solution x, on doit définir un test d'arrêt pour notre méthode itérative.

- Il est possible par exemple de tester si $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \epsilon$, où ϵ est une précision que l'on se fixe.
- On peut aussi tester si $\|Ax^{(k)} - b\| \leq \epsilon$.

Dans ce TP, on utilisera le deuxième critère.

Méthode de Jacobi

La méthode de **Jacobi** est la méthode itérative obtenue lorsqu'on choisit $M = D\ et\ N = E + F$.

Donc on obtient l'algorithme

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b \end{cases}$$

- Ecrire une fonction silab qui renvoie une approximation de la solution x du système linéaire $Ax = b$ à l'aide de la méthode de Jacobi.

Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de **Gauss-Seidel** est la méthode itérative obtenue lorsqu'on choisit $M = D - E \; et \; N = F$.
Donc on obtient l'algorithme

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b \end{cases}$$

- Ecrire une fonction scilab qui renvoie une approximation de la solution x du système linéaire $Ax = b$ à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel.

  Applications

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - Résoudre à l'aide des deux méthodes précédentes le système linéaire $Ax = b$.(On prend $x^{(0)} = b, et \; \varepsilon = 10^{-5}$.
  - Laquelle de ces méthodes semble converger le plus rapidement.