Convergence des méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Exemple : Etudier la convergence de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $det(A) = 1 \neq 0$ donc A est inversible et le système $Ax = b$ admet une solution unique.
2. **Méthode de Jacobi**, La matrice A n'est pas a diagonale strictement dominante donc on calcule la matrice de Jacobi :

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode de Jacobi est convergente si et seulement si $\rho(J) < 1$.

$\rho(J)$ =rayon spectral de J est le plus grand des modules des valeurs propres de J

Calculons les valeurs propres de la matrice J :

Le nombre λ est une valeur propre de la matrice A si et seulement si

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Autrement dit, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique de A.

$$P_J(\lambda) = \det(J - \lambda I) = det\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= det\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

$$= det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \right)$$

$$\det(J-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & -2 & 2\\ -1 & -\lambda & -1\\ -2 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ -2 & -\lambda\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1 & -\lambda\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-\lambda^3$$

Donc $P_J(\lambda)=-\lambda^3=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \Leftrightarrow \rho(J)=0<1.$

Alors la méthode de Jacobi converge.

3. **Méthode de Gauss-Seidel**, La matrice A n'est pas a diagonale strictement dominante donc on calcule la matrice de Gauss-Seidel :

$$GS=(D-E)^{-1}F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss-Seidel est convergente si et seulement si $\rho(GS)<1$.

Calculons les valeurs propres de la matrice GS :

$$P_{GS}(\lambda)=\det(GS-\lambda I)=det\left(\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$
$$=det\left(\begin{pmatrix}-\lambda & -2 & 2\\ 0 & 2-\lambda & -3\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}\right)$$

$$\det(GS-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & -2 & 2\\ 0 & 2-\lambda & -3\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}2-\lambda & -3\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)(2-\lambda)$$

Donc $P_{GS}(\lambda)=\det(GS-\lambda I)=0 \Leftrightarrow -\lambda(2-\lambda)(2-\lambda)=0 \Leftrightarrow \mathrm{spec(GS)}=\{0,2,2\} \Leftrightarrow \rho(GS)=2>1$

Alors la méthode de Gauss-Seidel diverge.

Exercice : Etudier la convergence de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax=b$: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$