

Page 1 | Série 2 (Solutions)

Ex 1) (i) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -espace vectoriel normé et $B[x, \pi]$ la boule fermée de rayon $\pi > 0$. $B[x, \pi] = \{y \mid \|y - x\| \leq \pi\}$. Soient $y_1, y_2 \in B[x, \pi]$ et soit $\lambda \in [0, 1]$.

$$\|\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 - x\| = \|\lambda y_1 - \lambda x + (1-\lambda)y_2 - (1-\lambda)x\|$$

$$\leq \lambda \|y_1 - x\| + (1-\lambda)\|y_2 - x\|.$$

or $\|y_1 - x\| \leq \pi$ et $\|y_2 - x\| \leq \pi$ car $y_1, y_2 \in B[x, \pi]$.

$$\text{D'où } \|\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 - x\| \leq \lambda \pi + (1-\lambda)\pi = \pi.$$

$\Rightarrow \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in B[x, \pi]$. Ceci montre que

$B[x, \pi]$ est convexe.

(ii) Montrons que l'application $(x, y) \rightarrow x + y$ est uniformément continue. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments quelconques de $E \times E$.

$$\text{Posons } \varphi(x, y) = x + y.$$

$$\|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)\| = \|x_1 + y_1 - x_2 - y_2\|$$

$$= \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Pour que $\|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)\|$ soit $< \varepsilon$, il suffit que :

$$\|x_1 - x_2\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|y_1 - y_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

c'est à dire qu'en posant $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, nous avons alors :

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \text{ et } \|y_1 - y_2\| < \delta$$

$$\Rightarrow \|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)\| < \varepsilon.$$

Ceci montre bien que l'application somme sur un espace vectoriel normé est uniformément continue.

(iii) $(\lambda, x) \xrightarrow{\pi} \lambda \cdot x$ est continue?

soit $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$. Montrons que l'application produit π est continue au point (λ_0, x_0) .

Il nous faut montrer qu'étant donné $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tq, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ et $\|x - x_0\| < \delta$ implique que $\|\lambda \cdot x - \lambda_0 \cdot x_0\| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot x - \lambda_0 \cdot x_0\| &= \|\cancel{\lambda x - \lambda_0 x_0}\| = \|\lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0\| \\ &= \|\lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0\| \leq |\lambda| \cdot \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\| \end{aligned}$$

Pour que $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$, il suffit que,

$$|\lambda| \|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |\lambda - \lambda_0| \|x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{or } |\lambda - \lambda_0| \|x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2 \|x_0\|}$$

si $x_0 \neq 0$. Mais pour éviter ce le cas ($x_0 = 0$), il suffit de remarquer que

$$|\lambda - \lambda_0| \|x_0\| \leq |\lambda - \lambda_0| (\|x_0\| + 1) \quad \text{et donc,}$$

Pour que $|\lambda - \lambda_0| \|x_0\|$ soit $< \frac{\varepsilon}{2}$, il suffit que $|\lambda - \lambda_0| (\|x_0\| + 1)$ soit $< \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\text{i.e. } |\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\| + 1)}$$

Page 3

$$\text{or } |\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)} \Rightarrow$$

$$|\lambda| < |\lambda_0| + \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}$$

Pour que $|\lambda| \|x - x_0\|$ soit $< \frac{\varepsilon}{2}$,
il suffit que $\left(|\lambda_0| + \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}\right) \cdot \|x - x_0\|$ soit $< \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\text{i.e. } \|x - x_0\| < \left(\frac{1}{|\lambda_0| + \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

Il suffit donc de prendre

$$0 < \delta < \min \left(\frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}, \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|\lambda_0| + \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}} \right)$$

et donc : $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ et $\|x - x_0\| < \delta$

implique que $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$.

Ceci montre bien que l'application produit π est continue.

En particulier ~~en fixant~~ l'application
qui à $x \in E$ fait envoyer $\lambda_0 x \in E$
est continue et l'application qui à
 $\lambda \in \mathbb{K}$ fait envoyer $\lambda \cdot x_0$ est aussi
continue sur $\mathbb{K}$.

Remarque: L'application $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ est continue mais elle n'est pas uniformément continue car le δ qu'on a trouvé ne dépend pas uniquement de ε mais il dépend de ε et du point (λ_0, x_0) .

(iv) $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$ et V un ouvert $\neq \emptyset$ de $E \Rightarrow V+A = \{x+a \mid x \in V \text{ et } a \in A\}$ est un ouvert de E ?

Pour montrer que $V+A$ est ouvert, il suffit de remarquer que $B(x, r) + a = B(x+a, r)$ où $B(x, r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r . En effet soit $z \in B(x, r) + a$

$$B(x, r) + a \Leftrightarrow \exists y \in B(x, r) \mid$$

$$z = y + a \Leftrightarrow y = z - a \Leftrightarrow$$

$$\|z - a - x\| < r \Leftrightarrow \|z - (x+a)\| < r$$

$$\Leftrightarrow z \in B(x+a, r).$$

Soit alors $y \in V+A \Rightarrow \exists x \in V$

$$\text{t.q. } y = x + a. \text{ Or } x \in V \Rightarrow \exists r > 0$$

$$\text{t.q. } B(x, r) \subset V \Rightarrow B(x, r) + a \subset V+A$$

$$\text{Or } B(x, r) + a = B(x+a, r) = B(y, r)$$

$$\text{D'où } B(y, r) \subset V+A.$$

Ce qui montre bien que $V + A$ est ouvert.

Remarque : Même si A n'est pas ouvert, $V + A$ est ouvert.

Remarque : On aurait pu remarquer que

$$V + A = \bigcup_{a \in A} (V + a) \text{ et il aurait suffi}$$

de montrer que $\forall a \in A, V + a$ est ouvert.

Or si $y \in V + a \Rightarrow y = x + a$ avec $x \in V$

$$x \in V \Rightarrow \exists r > 0 \mid B(x, r) \subset V.$$

$$\Rightarrow B(x, r) + a \subset V + a$$

$$\text{Or } B(x, r) + a = B(x + a, r) = B(y, r)$$

$$\text{Donc } B(y, r) \subset V + a.$$

$$\Rightarrow V + a \text{ est ouvert.}$$

Comme $V + A = \bigcup_{a \in A} V + a$ alors $V + A$

est réunion d'ouverts et est donc un ouvert.

Ex2)

Page 6

E un $\mathbb{K}$ e.v.n et F un s.e.v de E
tq $F \neq E$ (sous-esp-vec propre).

(i) $\overset{\circ}{F} = \text{Int}(F) = \emptyset$ (ensemble vide)?

($\overset{\circ}{F}$ est l'intérieur topologique de F).

La démonstration se fait par l'absurde en
supposant le contraire: $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$. Soit alors

$$x_0 \in \overset{\circ}{F} \Rightarrow \exists r > 0 \text{ tq } B(x_0, r) \subset F$$

$$\Rightarrow B(x_0, r) + \{ -x_0 \} \subset F + \{ -x_0 \}.$$

et comme $-x_0 \in F$ alors $F + \{ -x_0 \} \subset F$
car F est un s.e.v.

Donc $B(x_0, r) + \{ -x_0 \} \subset F$. Or

$$B(x_0, r) + \{ -x_0 \} = B(x - x_0, r) = B(0, r).$$

Donc $B(0, r) \subset F$. Ceci veut dire
que si $\|x\| < r$ alors $x \in F$.

soit $0 < \lambda < r$ et $x \neq 0, x \in E$.

$$\text{Soit } y = \frac{\lambda \cdot x}{\|x\|}. \quad \|y\| = \left\| \frac{\lambda \cdot x}{\|x\|} \right\| =$$

$$\frac{\lambda}{\|x\|} \|x\| = \lambda < r \Rightarrow \|y\| < r$$

$\Rightarrow y \in F$ et comme

$$x = \frac{\|x\|}{\lambda} \cdot y \text{ alors } x \in F \text{ car}$$

F est un s.e.v de E .

Donc $\forall x \in E \mid x \neq 0$ alors $x \in F$
 et comme F est un s.e.v. alors $0 \in F$.
 D'où $\forall x \in E \Rightarrow x \in F$.

Ceci montre que $F = E$.

Or $F = E$ contredit l'hypothèse que
 $F \neq E$.

(ii) $\overline{F}$ est un s.e.v. de E ?

($\overline{F}$ est l'adhérence ou la fermeture
 topologique de F dans E).

soient $\alpha, \beta \in K$; x_0 et $y_0 \in \overline{F}$.

Par définition de l'adhérence dans
 les espaces métriques, $x_0, y_0 \in \overline{F}$ alors,

$\exists$ deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ telles que
 $x_n, y_n \in F$ et $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

$$\alpha x + \beta y = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} y_n =$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n)$ car l'application:
 $(x, y) \rightarrow \alpha x + \beta y$ est continue.

Mais comme $x_n, y_n \in F$ et F est un s.e.v.
 de E alors $\alpha x_n + \beta y_n \in F$.

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n + \beta y_n \in \overline{F}$.

Donc $\alpha x + \beta y \in \overline{F}$.

ce qui montre bien que $\overline{F}$ est un
sous-espace vectoriel de E .

Page 8

Ex 3) $E = \mathcal{C}([0, 1]) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
telle que f soit continue sur $[0, 1]\}$.

E peut être muni d'une structure d'espace
vectoriel sur $\mathbb{R}$ comme suit:

Pour f, g dans E , on définit $f+g$ par:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et pour } \lambda \in \mathbb{R} \text{ on}$$

definit $\lambda \cdot f$ par: $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

Il est facile de vérifier que ces deux
opérations font de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Pour $f \in E$, on note $\|f\|_{\infty}$ la borne
supérieure du sous-ensemble $\{|f(x)| \mid 0 \leq x \leq 1\}$

majoré dans $\mathbb{R}$ car f est supposée être
continue sur $[0, 1]$ et il est bien connu

que toute fonction continue sur un intervalle
fermé et bornée y est majorée.

Donc $f \in E \Rightarrow |f|$ est continue. D'où

$\sup\{|f(x)| \mid 0 \leq x \leq 1\}$ est finie. On pose

$$\text{alors } \|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

On écrit aussi $\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Page 8

soit alors $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite à éléments dans E (i.e. $f_n \in E$). Munissons E de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ et supposons que la suite $\{f_n\}$ converge vers $f \in E$.

Par définition de la convergence des suites,
 $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ (n_0 dépend de ε)
 tel que $\forall n \geq n_0 : \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq x \leq 1} |(f_n - f)(x)| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall 0 \leq x \leq 1 : |(f_n - f)(x)| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1] \text{ et } \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre bien que la suite de fonctions $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction continue $f(x)$ sur $[0, 1]$.

Réciproquement si, $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ est une suite de fonction convergeant uniformément vers la fonction f alors, il est bien connu que f doit être continue sur $[0, 1]$.

et de plus $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ qui ne dépend que de ε (donc n_0 ne dépend pas de $x \in [0, 1]$) tel que :

$$\forall n \geq n_0 \text{ et } \forall x \in [0, 1] : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \varepsilon$ est un majorant du sous-ensemble $\{ |f_n(x) - f(x)| / 0 \leq x \leq 1 \}$

$$\text{Donc } \sup \{ |f_n(x) - f(x)| / 0 \leq x \leq 1 \} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que,
 $\forall n \geq n_0 : \|f_n - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$ et comme $f \in E$,
cela montre bien que la suite $\{f_n\}_{n \geq 1}$
à éléments dans E converge vers f dans
 $(E, \|\cdot\|_{\infty})$.

Remarque : à cause de l'équivalence
de la convergence uniforme des suites de
fonctions continues sur $[0, 1]$ (ou plus
généralement sur un espace topologique
compact) et de la convergence des suites
dans l'espace normé $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ que
la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ est appelée,
« la norme de la convergence uniforme ».

EX4) $E = \mathcal{C}([0, 1])$. Pour $f, g \in E$,

on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$

Il est clair que N_g est une fonction bien définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Remarque: La fonction g est fixée et la variable, c'est la fonction f . Cherchons alors une condition sur g pour que N_g soit une norme sur E . Commençons par vérifier la condition (ii) et (iii) d'une norme.

$$(ii) \lambda \in \mathbb{R}, f \in E : \cancel{\|g(\lambda f)\|_\infty} \|g(\lambda f)\|_\infty = \|\lambda gf\|_\infty = |\lambda| \|gf\|_\infty \Rightarrow N_g(\lambda f) = |\lambda| N_g(f).$$

$$(iii) f, h \in E : N_g(f+h) = \|g(f+h)\|_\infty = \|gf+gh\|_\infty \leq \|gf\|_\infty + \|gh\|_\infty = N_g(f) + N_g(h).$$

$$(i) N_g(f) = 0 \Leftrightarrow \|gf\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall x \in [0, 1], (g \cdot f)(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ \text{ou} \\ f(x) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$g(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Soit alors,

$A = \{x \mid g(x) \neq 0\}$. A est un ouvert car g est continue sur $[0, 1]$.

D'où $x \in A \Rightarrow f(x) = 0$. Page 12

Donc f s'annule sur A .

Rappel de topologie : si X et Y sont deux espaces topologiques séparés

(Par exemple des espaces métriques).

et $f: X \rightarrow Y$ une fonction continue sur X . Soit $A \subset X$ une partie de X telle que,
 $\forall x \in A \Rightarrow f(x) = 0$. Alors dans ce cas,

$\forall x \in \bar{A}$ (adhérence de A) $\Rightarrow f(x) = 0$.

Revenons à la solution. Nous avons vu que $\forall x \in A : f(x) = 0$ et comme f est continue sur $[0, 1]$ alors,

$\forall x \in \bar{A} \Rightarrow f(x) = 0$. Mais pour que la condition (i) soit vérifiée, il faut que $f = 0$ sur $[0, 1]$. Tout ce qu'on peut montrer pour le moment est que f s'annule sur $\bar{A}$. Donc pour que f s'annule sur $[0, 1]$, il suffit que $\bar{A} = [0, 1]$.

$\bar{A} = [0, 1]$ veut dire que A doit être dense dans $[0, 1]$.

Donc pour que N_g vérifie la condition (i), il suffit que A soit dense dans $[0, 1]$.

Par conséquent, pour que N_g soit une norme, il suffit que A soit dense dans $[0, 1]$. Réciproquement si N_g vérifie la condition (i), est ce que A doit être dense dans $[0, 1]$, c'est à dire, est ce que la densité de A dans $[0, 1]$ est nécessaire pour que N_g soit une norme (ie pourquoi N_g vérifie (i))?

Supposons que N_g soit une norme et que A ne soit pas dense dans $[0, 1]$. Donc $\bar{A} \neq [0, 1]$. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $x \in [0, 1]$, $f(x) = d(x, \bar{A}) = \text{distance}(x, \bar{A})$. Il est bien connu que f est continue sur $[0, 1]$ et de plus $f(x) = 0$ ssi $x \in \bar{A}$.

Or si $x \in [0, 1]$ alors, $x \in \bar{A}$ ou $x \notin \bar{A}$.
 si $x \in \bar{A}$ alors $f(x) = 0 \Rightarrow (gf)(x) = 0$.
 et si $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \notin A \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow (gf)(x) = 0$. Donc $\forall x \in [0, 1]$, $(gf)(x) = 0 \Rightarrow N_g(f) = 0$. Si la condition (i) est vérifiée alors $f = 0$.

D'où $\forall x \in [0, 1] : f(x) = 0$.

Mais $f(x) = 0$ si $x \in \bar{A} \neq [0, 1]$.

Ceci est une contradiction.

Donc pour que N_g vérifie la condition (i), il faut et il suffit que A soit dense ou ce qui est équivalent à dire que N_g est une norme si A est dense dans $[0, 1]$.

EX 5) $E = \mathcal{C}([0, 1])$, $(x_n)_n \subset [0, 1]$ et $(c_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels où $\forall n \geq 1, c_n > 0$.

(i) Pour $f \in E$, montrons que la série $\sum_{n \geq 1} c_n |f(x_n)|$ est convergente.

Comme $f \in E \Rightarrow \forall x \in [0, 1] : |f(x)| \leq \|f\|_\infty$.

$\Rightarrow \forall n \geq 1, |f(x_n)| \leq \|f\|_\infty$. Comme les c_n

sont ≥ 0 alors, $\sum_{n=1}^n c_n |f(x_n)| \leq \left(\sum_{n=1}^n c_n \right) \cdot \|f\|_\infty$

Comme $\sum_{n \geq 1} c_n |f(x_n)|$ est une série à termes positifs alors, pour quelle soit convergente, il faut et il suffit que ses sommes partielles soient majorées par une constante ne dépendant pas de n .

Comme les c_n sont positifs et la série $\sum_n c_n$ est convergente alors,

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^n c_i \leq \sum_{n \geq 1} c_n.$$

$$\text{D'où } \forall n \geq 1, \sum_{i=1}^n c_i |f(x_i)| \leq \left(\sum_{n \geq 1} c_n \right) \cdot \|f\|_{\infty}.$$

Ceci montre bien que la série $\sum_{n \geq 1} c_n |f(x_n)|$ est convergente.

$$(ii) \quad N(f) = \sum_{n \geq 1} c_n |f(x_n)|, \quad N: E \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Montrons que N vérifie la condition (i) et la condition (ii) d'une norme.

$$(ii) \quad \lambda \in \mathbb{R}, f \in E \Rightarrow N(\lambda f) = \sum_{n \geq 1} c_n |(\lambda f)(x_n)| \\ = |\lambda| \left(\sum_{n \geq 1} c_n |f(x_n)| \right) = |\lambda| N(f).$$

$$(iii) \quad f, g \in E, N(f+g) = \sum_{n \geq 1} c_n |(f+g)(x_n)|.$$

$$\text{Or } |(f+g)(x_n)| = |f(x_n) + g(x_n)| \leq |f(x_n)| + |g(x_n)|$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} c_n |(f+g)(x_n)| \leq \sum_{n \geq 1} c_n |f(x_n)| + \sum_{n \geq 1} c_n |g(x_n)|.$$

$$\Rightarrow N(f+g) \leq N(f) + N(g).$$

Reste à voir si la condition (i) est vérifiée ou non.

$$(i) \quad N(f) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} C_n |f(x_n)| = 0$$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 1 : C_n |f(x_n)| = 0$ car les termes $C_n |f(x_n)|$ sont positifs.

$$C_n |f(x_n)| = 0 \Rightarrow |f(x_n)| = 0 \text{ car } C_n > 0.$$

D'où $\forall n \geq 1 : |f(x_n)| = 0$.

soit $A = \{x_n \mid n \geq 1\} \subset [0, 1]$.

$\Rightarrow f$ est nulle sur A . Comme f est continue alors, f s'annule sur $\bar{A}$.

Pour que f soit partout nulle sur $[0, 1]$, il suffit que $\bar{A} = [0, 1]$.

Donc une condition suffisante pour que N soit une norme est que A soit dense dans $[0, 1]$. C'est à dire qu'il suffit que la suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ soit dense dans $[0, 1]$.

Montrons que la densité de A est nécessaire pour que N soit une norme sur E .

Supposons donc que N vérifie la condition (i) d'une norme et que A ne soit pas dense dans $[0, 1]$. Ceci veut dire que $\bar{A} \neq [0, 1]$.

Soit f définie par: $f(x) = d(x, \bar{A})$.
 f est continue et de plus $f(x) = 0$ ssi
 $x \in \bar{A}$. f n'est pas identiquement nulle
sur $[0, 1]$ car $\bar{A} \neq [0, 1]$ et donc,
si $x \notin \bar{A}$ alors $f(x) \neq 0$.

Mais $\forall n \geq 1 \Rightarrow x_n \in A \Rightarrow f(x_n) = 0$.

$$\Rightarrow N(f) = 0.$$

Donc $N(f) = 0$ avec $f \neq 0$. Ceci
est une contradiction avec le fait que N
vérifie la condition (i) par hypothèse.

(iii) Comme nous avons vu que:

$$N(f) \leq \left(\sum_{n \geq 1} c_n \right) \cdot \|f\|_{\infty} \text{ alors en posant}$$

$$C = \sum_{n \geq 1} c_n, \text{ nous avons, } C > 0 \text{ et } \forall f \in E$$

$$N(f) \leq C \|f\|_{\infty}. \text{ Ceci montre que}$$

$\|\cdot\|_{\infty}$ est plus forte que N .

Remarque: Les normes N et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne
sont pas équivalentes.

Ex 6) $E = \mathcal{C}([0, 1])$, $x_0 \in [0, 1]$

$e_{x_0} : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$f \in E$, $e_{x_0}(f) = f(x_0)$ (Evaluation au point x_0)

si on fait munir E de la norme $\|\cdot\|_\infty$

alors, $\forall f \in E$ nous avons : $|e_{x_0}(f)| \leq \|f\|_\infty$

D'où $e_{x_0} : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

est continue.

Par contre on va montrer que en munissant

E de la norme intégrale $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$

que $e_{x_0} : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

est discontinue. La preuve se fait par l'absurde en supposant que e_{x_0} soit

continue. $\exists c > 0$ tq $\forall f \in E : |e_{x_0}(f)| \leq c \|f\|_1$

i.e $\forall f \in E : |f(x_0)| \leq c \|f\|_1$

On va montrer qu'une inégalité de ce type ne peut être vraie. Pour cela, on

va construire (f_n) une suite de fonctions continues f_n telles que $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$ alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_0)| > 0$

Comme on remarque que $\|f\|_1$ représente l'aire de la surface limitée par l'axe des x , le graphe de f et les droites

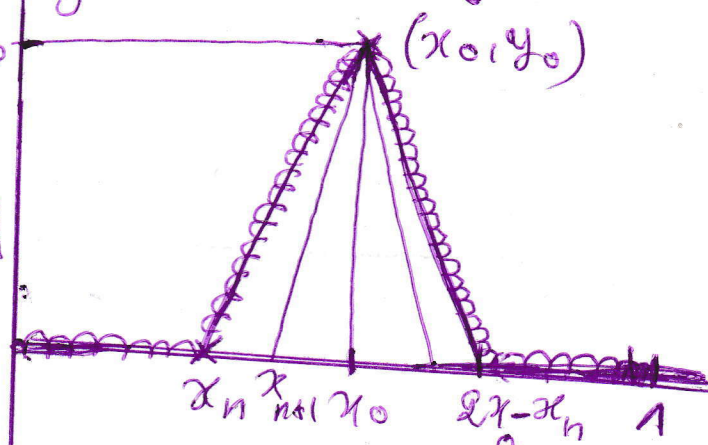
$x=0$ et $x=1$.

Nous allons profiter de cette propriété géométrique pour construire notre suite $\{f_n\}_n$ telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x)| dx = 0$

soit alors $x_0 \in]0, 1[$ et soit $\{x_n\}_n$ une suite croissante en convergeant vers x_0 .

y_0 est fixé.

$$f_n(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x \in [0, x_n] \\ y_0 \frac{(x - x_n)}{x_0 - x_n} & \text{si } x \in [x_n, x_0] \\ y_0 \frac{(2x_0 - x_n - x)}{x_0 - x_n} & \text{si } x \in [x_0, 2x_0 - x_n] \\ 0 & \text{si } x \in [2x_0 - x_n, 1] \end{cases}$$



Il est clair que la fonction f_n est continue.

Le graphe de f_n est représenté par la ligne serpentée.

Posons $A_0 = (x_0, y_0)$, $B_n = (x_n, 0)$, $C_n = (2x_0 - x_n, 0)$.

Il est clair que $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx =$
 $= \text{Aire du triangle } A_0 B_n C_n$

($A_0 B_n C_n =$ المساحة المثلثية)

Géométriquement, il est clair que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Aire}(A_0 B_n C_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x)| dx = 0$$

Mais ceci doit être prouvé analytiquement.

$$\text{Or } \text{Aire}(A_0 B_n C_n) = 2 \text{ Aire } (x_0, 0) A_0 B_n$$

où $(x_0, 0) A_0 B_n$ est un triangle rectangle (المثلث القائم)

$$\begin{aligned} \text{Aire } (x_0, 0) A_0 B_n &= \frac{((x_0, 0) B_n) \times (x_0, 0) A_0}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (x_0 - x_n) \cdot y_0. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \text{Aire } (A_0 B_n C_n) = (x_0 - x_n) \cdot y_0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Aire } (A_0 B_n C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 - x_n) \cdot y_0 = 0.$$

$$\text{Mais } \forall n \geq 1, f_n(x_0) = y_0.$$

$$\Rightarrow e_{x_0}(f_n) = y_0.$$

Comme nous avons supposé que e_{x_0} soit continue alors, $\exists c > 0$ telle que :

$$\forall f \in E : |e_{x_0}(f)| \leq c \|f\|_1.$$

En particulier, $\forall n \geq 1,$

$$|e_{x_0}(f_n)| \leq c \|f_n\|_1 \Rightarrow y_0 \leq c \|f_n\|_1$$

Par passage à la limite sur n , on trouve $y_0 \leq 0$ et ceci contredit le fait que $y_0 > 0$.