

Solutions

Série N° 1

Page 1

Ex 1) pour a, b ($a > 0$ et $b > 0$) et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $N_2(x, y) = \sqrt{ax^2 + by^2}$. Montrons que N_2
est une norme sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

(i) $N_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{ax^2 + by^2} = 0 \Leftrightarrow$

$ax^2 + by^2 = 0$. Comme $ax^2 \geq 0$ et $by^2 \geq 0$
alors $ax^2 + by^2 = 0 \Rightarrow ax^2 = by^2 = 0$.
 $\Rightarrow x^2 = y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$
(car $a \neq 0$ et $b \neq 0$).

(ii) pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$N_2(\lambda \cdot (x, y)) = N_2(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{a(\lambda x)^2 + b(\lambda y)^2}$$

$$= |\lambda| \sqrt{ax^2 + by^2} = |\lambda| N_2(x, y).$$

(iii) Inégalité triangulaire.

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $\mathbb{R}^2$.

$$N_2((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = N_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$= \sqrt{a(x_1 + x_2)^2 + b(y_1 + y_2)^2}$$

Pour montrer que :

$$N_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq N_2(x_1, y_1) + N_2(x_2, y_2)$$

Il est équivalent à montrer que

$$N_2^2(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq (N_2(x_1, y_1) + N_2(x_2, y_2))^2$$

car les deux membres de l'inégalité à prouver sont positifs.

$$\text{Or } N_2(x_1+x_2, y_1+y_2) = a(x_1+x_2)^2 + b(y_1+y_2)^2$$

$$\text{mais } (N_2(x_1, y_1) + N_2(x_2, y_2))^2 =$$

$$(ax_1^2 + by_1^2) + (ax_2^2 + by_2^2) + 2N_2(x_1, y_1)N_2(x_2, y_2).$$

$$a(x_1+x_2)^2 + b(y_1+y_2)^2 = \cancel{ax_1^2} + \cancel{ax_2^2} + 2ax_1x_2 + \cancel{by_1^2} + \cancel{by_2^2} + 2by_1y_2 \leq \cancel{ax_1^2} + \cancel{by_1^2} + \cancel{ax_2^2} + \cancel{by_2^2} + 2N_2(x_1, y_1)N_2(x_2, y_2)$$

C'est équivalent à montrer que:

$$2ax_1x_2 + 2by_1y_2 \leq N_2(x_1, y_1)N_2(x_2, y_2).$$

supposons $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0$ et $y_2 \geq 0$.

Pour prouver la dernière inégalité, il suffit de passer au carrés.

$$\Leftrightarrow (2ax_1x_2 + 2by_1y_2)^2 \leq N_2(x_1, y_1)^2 \cdot N_2(x_2, y_2)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a^2x_1^2x_2^2} + \cancel{b^2y_1^2y_2^2} + 2abx_1x_2y_1y_2 \leq (ax_1^2 + by_1^2)(ax_2^2 + by_2^2) = \cancel{a^2x_1^2x_2^2} + \cancel{b^2y_1^2y_2^2} + ab(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x_1x_2y_1y_2 \leq (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1y_2) \cdot (x_2y_1) \leq (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2$$



$$\Leftrightarrow \underbrace{(x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 - 2(x_1 y_2)(x_2 y_1)}_{=0} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ((x_1 y_2) - (x_2 y_1))^2 \geq 0.$$

si x_1, x_2, y_1 et y_2 sont quelconques.
Il suffit de remarquer que:

$$a x_1 x_2 + b y_1 y_2 \leq |a x_1 x_2 + b y_1 y_2| \leq$$

$$\leq |a x_1 x_2| + |b y_1 y_2| = a |x_1| \cdot |x_2| + b |y_1| \cdot |y_2|.$$

et que $N_2(x_1, y_1) = \sqrt{a |x_1|^2 + b |y_1|^2} = N_2(|x_1|, |y_1|)$
et $N_2(x_2, y_2) = \sqrt{a |x_2|^2 + b |y_2|^2} = N_2(|x_2|, |y_2|)$

Comme $|x_1|, |x_2|, |y_1|$ et $|y_2|$ sont
tous positifs, nous avons alors d'après
le premier cas:

$$a |x_1| \cdot |x_2| + b |y_1| \cdot |y_2| \leq N_2(|x_1|, |y_1|) N_2(|x_2|, |y_2|)$$

$$\Rightarrow a |x_1| \cdot |x_2| + b |y_1| \cdot |y_2| \leq N_2(x_1, y_1) \cdot N_2(x_2, y_2).$$

$$\Rightarrow a x_1 x_2 + b y_1 y_2 \leq N_2(x_1, y_1) N_2(x_2, y_2).$$

$$\underline{c \cdot e \cdot f = d}.$$

Remarque : N_2 est notée aussi $\|\cdot\|_2$.
 $\|\cdot\|_2$ est appelée « Norme euclidienne »
plus généralement, il est facile de voir que pour $p > 0$, l'application
 $N_p(x, y) = (a|x|^p + b|y|^p)^{\frac{1}{p}}$ vérifie la deuxième et la troisième condition d'une norme. La troisième condition qui est à savoir, l'inégalité triangulaire, ne peut être vérifiée que si $p \geq 1$ et dans ce cas elle est appelée « Inégalité de Minkowski ».
Pour $p \in \mathbb{R}$ et $p \geq 1$, N_p est aussi notée $\|\cdot\|_p$ et N_∞ est notée $\|\cdot\|_\infty$.
- Montrons que $\lim_{p \rightarrow \infty} N_p(x, y) = N_\infty(x, y)$
ou $\lim_{p \rightarrow \infty} \|(x, y)\|_p = \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

Page 5

supposons $|x| \leq |y|$, $y \neq 0$.

$$\|(x, y)\|_p = (a|x|^p + b|y|^p)^{\frac{1}{p}} = (|y|^p (a \frac{|x|^p}{|y|^p} + b))^{\frac{1}{p}}$$

$$= |y| \cdot (a (\frac{|x|}{|y|})^p + b)^{\frac{1}{p}}$$

Calculons $\lim_{p \rightarrow \infty} (a (\frac{|x|}{|y|})^p + b)^{\frac{1}{p}}$.

Pour cela, il suffit de passer au logarithme.

Calculons donc $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log (a (\frac{|x|}{|y|})^p + b)$

Nous avons $\frac{\log b}{p} \leq \frac{1}{p} \log (a (\frac{|x|}{|y|})^p + b) \leq$

$$\leq \frac{1}{p} \log (a+b) \text{ car } 0 \leq \frac{|x|}{|y|} \leq 1.$$

D'où $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\log b}{p} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log (a (\frac{|x|}{|y|})^p + b) \leq$

$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\log(a+b)}{b} \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log (a (\frac{|x|}{|y|})^p + b) = 0.$

Donc $\lim_{p \rightarrow \infty} (a (\frac{|x|}{|y|})^p + b)^{\frac{1}{p}} = 1.$

D'où $\lim_{p \rightarrow \infty} \|(x, y)\|_p = |y| = \text{Max}(|x|, |y|).$

et si $|y| \leq |x| \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} \|(x, y)\|_p = |x| = \text{Max}(|x|, |y|).$

Donc $\lim_{p \rightarrow \infty} \|(x, y)\|_p = \text{Max}(|x|, |y|).$

Remarque : Comme $\lim_{p \rightarrow \infty} \|(x, y)\|_p = \max(|x|, |y|)$, ceci explique bien pourquoi $\max(|x|, |y|)$ est notée $\|(x, y)\|_\infty$.

EX2) La solution de l'ex2 se trouve dans les polycopies du Cours.

EX3) $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ qu'on note $\mathcal{C}([0, 1])$ tout court.

$E = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ soit continue}\}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in E$, les opérations,

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ et $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

font de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes sur E .

Avant de commencer par prouver qu'elles sont des normes, vérifions tout d'abord si elles sont définies sur E .

soit alors $f \in E$, c'est à dire que f est une fonction définie et continue sur l'intervalle compact $[0, 1]$.

Page 7

f continue sur $[0, 1]$ implique que $|f|$ est aussi continue sur $[0, 1]$.

Il est bien connu que toute fonction continue sur un compact est majorée. Il existe donc $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1] : |f(x)| \leq M.$$

D'où le sous-ensemble $\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$ est un sous-ensemble majoré contenu dans $\mathbb{R}$. D'où sa borne supérieure est finie. On pose donc :

$$\|f\|_{\infty} = \sup \{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

C'est à dire que $\|\cdot\|_{\infty}$ est une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

De même, il est bien connu que toute fonction continue sur $[0, 1]$ possède une intégrale de Riemann finie sur $[0, 1]$.

$$\text{D'où } \forall f \in E : \int_0^1 |f(x)| dx \in \mathbb{R}^+.$$

Ceci montre bien que $\|\cdot\|_1$ est une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ existe et est positive.

Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .

$$(i) \|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = 0.$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, 1] : |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

$$\Rightarrow f \text{ est nulle sur } [0, 1] \Rightarrow f = 0.$$

$$(ii) \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } f \in E.$$

$$\|\lambda \cdot f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |(\lambda f)(x)| = \sup_{0 \leq x \leq 1} (|\lambda| \cdot |f(x)|)$$

$$= |\lambda| \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

$$(iii) f, g \in E \Rightarrow \|f+g\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |(f+g)(x)|$$

or pour $0 \leq x \leq 1$, nous avons,

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

$$\text{Mais } |f(x)| \leq \sup_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| = \|f\|_\infty$$

$$\text{et } |g(x)| \leq \sup_{0 \leq y \leq 1} |g(y)| = \|g\|_\infty.$$

Page 9

D'où $\forall x \in [0, 1]$, nous avons,

$$|(f+g)(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}.$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq x \leq 1} |(f+g)(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}.$$

car $\|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ est un majorant du sous-ensemble $\{|(f+g)(x)| / 0 \leq x \leq 1\}$.

$$\text{Donc } \|f+g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}.$$

D'où $\|\cdot\|_{\infty}$ est une norme sur E .

Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme.

$$(i) \|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)| dx = 0.$$

Comme f est continue alors $\int_0^1 |f(x)| dx$ représente l'aire du domaine limité par le graphe de f et les droites $y=0$, $x=0$ et $x=1$. $\|f\|_1 = 0$ veut dire que cette aire est nulle.

Donc le graphe de f doit s'appliquer sur la droite $y=0$ (l'axe des x). Ceci signifie que $\forall x \in [0, 1] : f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$.

$$(ii) \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } f \in E : \|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |(\lambda f)(x)| dx = \int_0^1 |\lambda| |f(x)| dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)| dx = |\lambda| \cdot \|f\|_1.$$

$$(iii) f, g \in E : \|f+g\|_1 = \int_0^1 |(f+g)(x)| dx$$

$$\text{or } \forall x \in [0, 1]: |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\text{Donc } |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\text{D'où } \int_0^1 |(f+g)(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx.$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Donc $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

Il en est de même pour $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

où $p \geq 1$.

Dans ce cas l'inégalité triangulaire s'appelle, « Inégalité de Minkowski ».

c'est à dire que $\forall p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur E et de plus comme, $\forall x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow |f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^p$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x)|^p dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^p dx = \|f\|_\infty^p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\|f\|_\infty^p \right)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

$$\text{Donc } \forall p \geq 1: \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

Ceci signifie que $\forall p \geq 1$, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est plus forte (ou plus fine) que la norme $\|\cdot\|_p$.

On se demande donc si les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_p$ sont équivalentes ou pas.

La réponse est négative, c'est à dire que,

$\forall p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ n'est pas plus forte que $\|\cdot\|_\infty$.

La preuve se fait par l'absurde en considérant la suite de fonctions $f_n \in E$ définies par,

$$0 \leq x \leq 1 : f_n(x) = x^n.$$

Il est clair que $\|f_n\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |x^n| = 1$.

$$\|f_n\|_p = \left(\int_0^1 |x^n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 x^{np} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(np+1)^{\frac{1}{p}}}$$

Supposons que $\|\cdot\|_p$ est plus forte que $\|\cdot\|_\infty$ ce qui est équivalent à dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall f \in E : \|f\|_\infty \leq c \cdot \|f\|_p.$$

$$\Rightarrow 1 \leq c \cdot \frac{1}{(np+1)^{\frac{1}{p}}} \Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(np+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\Rightarrow 1 \leq 0. \text{ Contradiction.}$$

Donc $\|\cdot\|_p$ ne peut pas être plus forte que $\|\cdot\|_\infty$.