



Les coefficients de Fourier [page 69]

sont : $\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{a}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \cos(nx) dx$

et $\langle f, \frac{\sin nx}{\sqrt{a}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \sin(nx) dx$

et $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2a}} \langle f, \frac{1}{\sqrt{2a}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) dx.$

⑧ Les polynômes de Legendre.

$H = L^2([-1, 1])$

$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$

$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m. \end{cases}$

La complétude résulte du théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme d'une fonction continue sur un intervalle fermé par des polynômes.

$f \in H, \quad f = \sum_{n \geq 0} c_n P_n(x)$

où $c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$

La série $\sum_{n \geq 0} c_n P_n$ converge en moyenne

quadratique vers f .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=0}^n c_k P_k\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (f(x) - \sum_{k=0}^n c_k P_k(x))^2 dx = 0$