

et où la suite y_n converge vers x | Page 61
 $\Rightarrow$ ~~$x \in F$~~ et comme $y_n \in F_n = \text{vect} \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$
 alors $x \in \overline{\bigcup_{n \geq 1} F_n} = \overline{F}$.

i.e que le système $\{e_n\}_n$ est complet.

~~cela montre aussi que~~

donc
$$x = \sum_{n \geq 1} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n = \sum_{n \geq 1} x_n \cdot e_n$$

2) Le système $\{\cos(nx)\}_{n \geq 0}$ de l'espace de Hilbert $L^2([0, \pi])$ est un système orthogonal complet.
 toute fonction f de $L^2([0, \pi])$ se laisse développer en une série de Fourier

$H = L^2([-a, a])$ (muni de la mesure de Lebesgue)

Le système $1, \cos(nx), \sin(nx) \ (n=1, 2, \dots)$ est un système orthogonal complet.

$$\int_{-a}^a \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos\left(\frac{n+m}{2} \cdot x\right) + \cos\left(\frac{n-m}{2} \cdot x\right) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La complétude du système résulte du théorème de Weierstrass sur l'approximation d'une fonction périodique continue par des polynômes trigonométriques.

Le système : $\frac{1}{\sqrt{2a}}, \cos nx$