

Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont des espaces normés particuliers de telle sorte que les espaces de Hilbert de dimensions infinies sont ~~les espaces~~ les plus proches de ceux de dimensions finies du moment que leurs normes sont définies au moyen de produits scalaires permettant ainsi de conserver beaucoup de propriétés géométriques vérifiées en dimension finie (propriétés dépendant du produit scalaire).

Produit scalaire

Définition : Soit H un e.v. sur K et l'application qu'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie de $H \times H$ dans K est dite produit scalaire ssi :

- 1) $\forall x \neq 0, \langle x, x \rangle > 0$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénérée)
- 2) Pour $y \in H$ fixe, l'application :
 $x \longrightarrow \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire
- 3) L'application : $\langle \cdot, y \rangle : x \longrightarrow \langle y, x \rangle$
est une forme anti-linéaire i.e. :
 $x \longrightarrow \langle y, x \rangle$ est additive.

$$(i) \langle y, x_1 + x_2 \rangle = \langle y, x_1 \rangle + \langle y, x_2 \rangle$$

$$(ii) \forall a \in K, \forall x \in H: \langle y, ax \rangle = \bar{a} \langle y, x \rangle$$

$$(i) \text{ et } (ii) \Leftrightarrow \langle y, x_1 + ax_2 \rangle =$$

$$\langle y, x_1 \rangle + \bar{a} \langle y, x_2 \rangle$$

(33)

$$4) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

On peut résumer les 4 conditions comme suit :

$\langle , \rangle$ est un produit scalairessi

1) $K = \mathbb{C}$, c'est une ~~app~~ forme linéaire par rapport à la première variable.

vérifiant la condition: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ et qui soit non dégénérée: (Anti-symétrique)
 $\forall x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0 \rightarrow$ positive

ou ce qui équivaut à: $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

2) $K = \mathbb{R}$, c'est une forme linéaire par rapport à la première variable qui soit symétrique ($\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$) et non dégénérée.
 $\rightarrow$ positive

~~$K = \mathbb{C}$, $\langle , \rangle$ est une forme~~

si $K = \mathbb{C}$, H est dit espace préhilbertien complexe (~~ou espace de~~)

si $K = \mathbb{R}$ il est dit espace préhilbertien réel.

Propriétés du produit scalaire

Pour $x, y \in H$; nous avons :

(34)

$$\begin{aligned}\langle x+y, x+y \rangle &= \\ \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle &= \\ \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \langle y, x \rangle &= \\ \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle\end{aligned}$$

$$\text{car } \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

$$\begin{aligned}\text{et } \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle &= \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} \\ &= 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

$$\text{et donc : } \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

ceci est valable dans les deux cas

$$K = \mathbb{C} \text{ ou } K = \mathbb{R}$$

$$\text{si } K = \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\text{et donc } \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle$$

$$\langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

On sait que $\langle, \rangle$ est non dégénérée.

$$\text{i.e. } \forall x \in H : \langle x, x \rangle > 0$$

Il en résulte pour $\lambda \in K$ et $x, y \in H$ nous avons :

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0$$

$$\text{On } \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, \lambda y \rangle$$

(35)

si $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lambda^2 \langle y, y \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \cdot \lambda + \langle x, x \rangle \geq 0$$

cette expression est un trinôme (de degré 2) qui ne change pas de signe quand λ parcourt $\mathbb{R}$. D'où son discriminant

$$\Delta \text{ est } \leq 0$$

$$\text{or } \Delta = 4 \operatorname{Re}^2 \langle x, y \rangle - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \geq \operatorname{Re}^2 \langle x, y \rangle$$

$$\operatorname{Re}^2 \langle x, y \rangle \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

remplaçant y par $\langle x, y \rangle y$ on obtient

$$(\operatorname{Re} \langle x, \langle x, y \rangle y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle \langle x, y \rangle y, \langle x, y \rangle y \rangle$$

$$(\operatorname{Re} \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \langle y, y \rangle$$

$$|\langle x, y \rangle|^4 \leq |\langle x, y \rangle|^2 \cdot \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

$$\text{si } |\langle x, y \rangle| \neq 0 \Rightarrow \underline{|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}$$

cette dernière inégalité est appelée
« Inégalité de Cauchy-Schwarz »

⑩ Théorème : L'application de H dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur H .

Preuve : (i) $\|x\| = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) $\lambda \in \mathbb{K}$; $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle}$

$$= \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle}$$

$$= |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

(iii) Inégalité triangulaire : Pour $x, y \in H$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Comme nous avons vu que

$$\operatorname{Re}^2 \langle x, y \rangle = |\operatorname{Re} \langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

$$\text{alors } |\operatorname{Re} \langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\text{donc } \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\text{d'où } \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ainsi donc $(H, \|\cdot\|)$ est un espace normé sur $\mathbb{K}$.

Lorsque $(H, \|\cdot\|)$ est un espace métrique complet, on dit que $(H, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert.

Exemples :

$$H = \mathbb{R}^n, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur H .

car c'est une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée.

$$\text{car } \langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

$$\text{et si } X \neq 0 \Rightarrow \exists i \mid 1 \leq i \leq n \mid x_i \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \Rightarrow \langle X, X \rangle > 0$$

$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ est ce qu'on appelle d'habitude la norme euclidienne.

$$H = \mathbb{C}^n, \quad X = (s_1, s_2, \dots, s_n), \quad Y = (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^n s_j \bar{t}_j$$

Il est facile de vérifier que $\langle X, Y \rangle$ est un produit scalaire sur H .

38) ~~Théorème~~ Egalité du parallélogramme.

Pour $x, y \in E$, nous avons

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \quad (1)$$

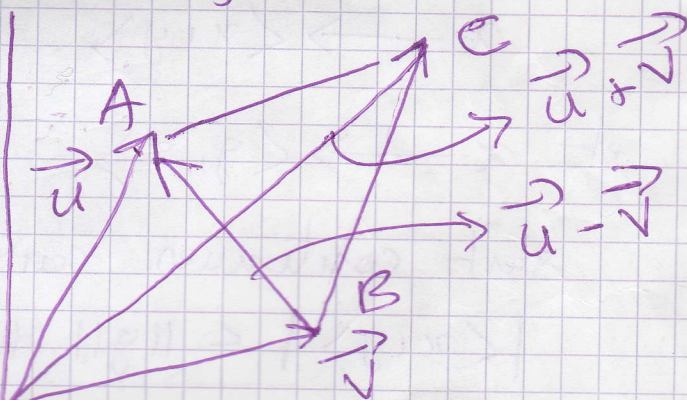
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \quad (2)$$

Alors (1) + (2) donne :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2) : (P)$$

c'est l'égalité du parallélogramme.

Exemple : $H = \mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$.



$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{OA} + \vec{OB} \\ &= \vec{OA} + \vec{BC} = \vec{OC} \\ \vec{u} - \vec{v} &= \vec{OA} - \vec{OB} \\ &= \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BA} \end{aligned}$$

Dans le parallélogramme $OACB$

Nous avons :

$$OC^2 + AB^2 = 2(OA^2 + OB^2)$$

et c'est pour cette raison que l'égalité (P) est appelée «Egalité du parallélogramme»

Réciproquement si $(H, \|\cdot\|)$ est un espace normé tel que la norme vérifie l'égalité du parallélogramme.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Alors l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \text{ est un produit scalaire réel sur } H.$$

- R l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que les 2 formes linéaires :

$$x \longrightarrow \langle x, y \rangle \quad \text{où } y \text{ est fixé}$$

$$\text{et } x \longrightarrow \langle y, x \rangle \quad \text{où } y \text{ est fixé}$$

sont continues car

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\|$$

$$|\langle y, x \rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\|$$

$$\text{De plus } \|\langle \cdot, y \rangle\| \leq \|y\|$$

$$\text{et comme } \|\langle y, y \rangle\| = \|y\|^2 = \|y\| \cdot \|y\|$$

$$\text{donc } \|\langle \cdot, y \rangle\| = \|y\|.$$

$$\text{de même } \|\langle y, \cdot \rangle\| = \|y\|.$$



Orthogonalité

Page 40

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux

ssi $\langle x, y \rangle = 0$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

ou, écrit : $x \perp y$.

Pour x, y_1, y_2 on a $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle = 0$

et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle &= \langle x, \lambda y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

- Soit $\{x\}^\perp = \{y \in H \mid \langle x, y \rangle = 0\}$

$\{x\}^\perp$ est un sous-espace vec de H .

$$\{x\}^\perp = \text{Ker } \langle x, \cdot \rangle = \text{Ker } \langle \cdot, x \rangle$$

$\{x\}^\perp$ est fermé, $\{0\}^\perp = H$, $H^\perp = \{0\}$.

l'orthogonal d'une partie A de H .

Soit $A \subset H$ une partie non vide de H

$$A^\perp = \{y \in H \mid \forall x \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$$

$$= \bigcap_{x \in A} \{x\}^\perp, \quad A^\perp \text{ est un sous-espace}$$

vectoriel car intersection de sous-espace
vec $\{x\}^\perp$ où x parcourt A .

$A^\perp$ est fermé car intersection de fermés.

Page 40

Théorème de la projection orthogonale de Hilbert.

Page 41

Soit C un convexe fermé et non vide d'un espace de Hilbert H et soit $x \notin C$.

Comme C est fermé alors $d(x, C) > 0$

Théorème de Hilbert : Il existe un ~~seul~~ vecteur x_C de l'ensemble C et un seul tel que $d(x, C) = d(x, x_C)$.
ou $d(x, C) = \|x - x_C\|$

ou bien $\inf_{y \in C} d(x, y) = \|x - x_C\|$.

ou en d'autres termes, la borne inférieure est atteinte en un point unique de C .

Démonstration : pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$F_n = C \cap B[x, \delta + \frac{1}{n}] \quad \text{ou}$$

$$\delta = d(x, C)$$

Comme $d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$, alors

$$\forall n \geq 1 \Rightarrow \exists y \in C \quad \text{t.q.} \quad d(x, y) \leq \delta + \frac{1}{n}$$

Ceci montre que $\forall n \geq 1, F_n \neq \emptyset$



42

Les F_n sont fermés car intersection du fermé C et de la boule fermée $B[x, \delta + \frac{1}{n}]$.

Comme $\delta + \frac{1}{n+1} \leq \delta + \frac{1}{n}$

alors $B[x, \frac{1}{n+1}] \subset B[x, \frac{1}{n}]$

et donc $F_{n+1} \subset F_n$.

La suite de fermés $\{F_n\}_n$ est une suite emboîtée.

~~Montrons que $\delta(F_n) =$~~

soit pour $n \geq 1$, $\delta(F_n)$ le diamètre de F_n . Par définition nous avons:

$$\delta(F_n) = \sup_{y, z \in F_n} d(y, z).$$

Montrons que $\delta(F_n) \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow \infty$.

Soient $y, z \in F_n$. L'égalité du

Parallélogramme donne:

$$\|y - z\|^2 = \|(y - x) - (z - x)\|^2$$

et on a:

$$\|(y - x) - (z - x)\|^2 + \|(y - x) + (z - x)\|^2$$

$$= 2(\|y - x\|^2 + \|z - x\|^2)$$

$$\text{d'où } \|y - z\|^2 = 2(\|y - x\|^2 + \|z - x\|^2) - \|y + z - 2x\|^2$$

Page 42

(43)

et donc comme $\|y-x\|^2 \leq (\delta + \frac{1}{n})^2$

~~$\|y-z\|^2 \leq$~~

et $\|z-x\|^2 \leq (\delta + \frac{1}{n})^2$

alors :

$$\|y-z\|^2 \leq 4(\delta + \frac{1}{n})^2 - \|y+z-2x\|^2$$

or $\|y+z-2x\| = 2 \cdot \|\frac{y+z}{2} - x\|$

$$\Rightarrow \|y+z-2x\|^2 = 4 \|\frac{y+z}{2} - x\|^2$$

mais $y, z \in F_n$

et F_n est convexe car intersection
du convexe C et de la boule fermée
 $B[x, \delta + \frac{1}{n}]$ elle aussi convexe.

$$\text{d'où } \frac{y+z}{2} \in F_n \Rightarrow \|\frac{y+z}{2} - x\| = d(x, \frac{y+z}{2}) \geq \delta = \inf_{y \in C} d(x, y)$$

Donc $\|\frac{y+z}{2} - x\|^2 \geq \delta^2$

D'où $\|y-z\|^2 \leq 4(\delta + \frac{1}{n})^2 - 4\delta^2$

$$\|y-z\|^2 \leq \frac{4}{n^2} + \frac{8}{n}$$

et donc $(\sup_{y, z \in F_n} \|y-z\|)^2 \leq \frac{4}{n^2} + \frac{8}{n}$

$$\Rightarrow \delta(F_n)^2 \leq \frac{4}{n^2} + \frac{8}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0$$

(43)



Page 44

On suppose que C est complète c'est-à-dire C est un espace métrique complet.

Si H est un espace de Hilbert, il est donc complet et comme C est fermée alors C est complète.

i.e. toute suite de Cauchy dans C est convergente dans C .

Comme $(F_n)_n$ est une suite emboîtée de fermés dans C dont les diamètres $d(F_n)$ tendent vers zéro qd $n \rightarrow \infty$. et C est supposée être un espace métrique complet alors l'intersection

$\bigcap F_n$ est réduite à un seul point.

soit $x_c \in C$ $\bigcap_{n \geq 1} F_n = \{x_c\}$.

$$\forall n \geq 1 \Rightarrow x \in F_n \Rightarrow \|x - x_c\| \leq \delta + \frac{1}{n}.$$

et comme $x_c \in C \Rightarrow \|x - x_c\| \geq \delta$
d'où par passage à la limite sur n

on en déduit que $\|x - x_c\| = \delta$

$$\Rightarrow d(x, C) = \|x - x_c\| = d(x, x_c)$$

Page 44

On pose $x_c = p(x)$ (p : projection)

p est une application de H dans C

p est définie par:

$x \in H \Rightarrow p(x)$ est tel que:

$$d(x, C) = \|x - p(x)\|$$

Caractérisation de la projection orthogonale

Théorème: Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert H et soit $x \in H$. Alors $p(x)$ est l'unique point de C vérifiant:

$$\forall z \in C : \operatorname{Re} \langle x - p(x), z - p(x) \rangle \leq 0$$

Preuve: Si $p(x)$ est la projection orthogonale

de x sur C alors, $\forall z \in C : \|x - z\| \geq \|x - p(x)\|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x - z\|^2 &= \|(x - p(x)) - (z - p(x))\|^2 \\ &= \|x - p(x)\|^2 + \|z - p(x)\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - p(x), z - p(x) \rangle \\ &\geq \|x - p(x)\|^2 \end{aligned}$$

1) si $p(x) \in C$ vérifie: $\forall z \in C$:

$$\operatorname{Re} \langle x - p(x), z - p(x) \rangle \leq 0 \text{ alors,}$$

$$\|x - z\|^2 = \|(x - p(x)) - (z - p(x))\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \|x - p(x)\|^2 + \|z - p(x)\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - p(x), z - p(x) \rangle \\ &\geq \|x - p(x)\|^2 \end{aligned}$$

unicité de $p(x)$: Supposons que $p_1(x) \in C$ et $p_2(x) \in C$ vérifient les deux inégalités:

$$\forall z \in C, \operatorname{Re} \langle x - p_1(x), z - p_1(x) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{et } \operatorname{Re} \langle x - p_2(x), z - p_2(x) \rangle \leq 0 \quad (2)$$



dans (1) on pose $z = p_2(m)$
 et dans (2) $z = p_1(m)$
 on obtient;

Page 46

$$\operatorname{Re} \langle x - p_1(m), p_2(m) - p_1(m) \rangle \leq 0$$

$$\text{et } \operatorname{Re} \langle x - p_2(m), p_1(m) - p_2(m) \rangle \leq 0$$

$$\text{on } \operatorname{Re} \langle x - p_1(m), p_2(m) - p_1(m) \rangle =$$

$$\operatorname{Re} \langle p_1(m) - x, p_1(m) - p_2(m) \rangle \leq 0 \quad (3)$$

$$\text{et } \operatorname{Re} \langle x - p_2(m), p_1(m) - p_2(m) \rangle \leq 0 \quad (2)$$

$$(2) + (3) \Rightarrow \operatorname{Re} \langle p_1(m) - p_2(m), p_1(m) - p_2(m) \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \|p_1(m) - p_2(m)\|^2 = 0 \Rightarrow p_1(m) = p_2(m)$$

Réciproquement si $\forall z \in C, \|x - z\| \geq \|x - p(m)\|$
 ceci est vraie pour $z = (1-\lambda)p(m) + \lambda z$, $\forall \lambda \in [0, 1]$;

$$\|x - \lambda z - (1-\lambda)p(m)\|^2 \geq \|x - p(m)\|^2$$

$$\|(x - p(m)) - \lambda(z - p(m))\|^2 \geq \|x - p(m)\|^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda \langle x - p(m), z - p(m) \rangle \geq \lambda \|z - p(m)\|^2$$

$$\text{alors si } \lambda \neq 0 \text{ on a } \langle x - p(m), z - p(m) \rangle \leq \frac{\lambda}{\lambda} \|z - p(m)\|^2$$

$$\Rightarrow \langle x - p(m), z - p(m) \rangle \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\lambda} \|z - p(m)\|^2 = 0$$

Rq) 1) En général, il n'est pas du tout facile de
 calculer $p(m)$ car le calcul d'une borne
 inférieure n'est pas toujours faisable.

Cependant le théorème caractérisatif est une
 méthode pratique pour le calcul de $p(m)$ car
 elle nous fait éviter le calcul de la borne
 inférieure.

Page 46

47) ~~Alors~~ si C est un convexe fermé d'un Hilbert, nous avons alors : Page 47

$$x \notin C \Rightarrow d(x, C) = d(x, F_C)$$

et donc pour calculer $p(x)$, il suffit de supposer que $p(x) \in F_C$

Exemple 1) Considérons le ~~cas~~ d'équation, définie par $D = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$ convexe fermé

soit $(x, y) \notin D$,

$$d((x, y), D) = d((x, y), F_D)$$

$$F_D = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

Il s'agit de calculer : $(x_0, y_0) \in F_D$

$$\min d((x, y), F_D)^2 = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2$$

$$\min \{ \|(x, y) - (x, y)\|^2 \mid (x, y) \in F_D \}$$

La existence et l'unicité du point (x_0, y_0) est assurée par le théorème de la projection de Hilbert. Nous avons $x = a + r \cos t$

$$y = b + r \sin t$$

$$\|(x, y) - (x, y)\|^2 = \|(x-a-r \cos t, y-b-r \sin t)\|^2$$

$$= (x-a-r \cos t)^2 + (y-b-r \sin t)^2 = F(t)$$

Il s'agit donc de trouver le minimum de F . Si

$$F'(t) = 2r \sin t (x-a-r \cos t) - 2r \cos t (y-b-r \sin t)$$

$$F'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t (x-a) - \cos t (y-b) = 0$$

$$\text{si } x \neq a \Rightarrow \cos t \neq 0 \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{y-b}{x-a}$$

2.12

$$t_0 = \operatorname{Arctg} \left(\frac{Y-b}{X-a} \right)$$

Page 48

d'où

~~de~~

$$p(X, Y) = \left(\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right)$$

$$p(X, Y) = \left(a + r \cos \left(\operatorname{Arctg} \left(\frac{Y-b}{X-a} \right) \right), b + r \sin \left(\operatorname{Arctg} \left(\frac{Y-b}{X-a} \right) \right) \right)$$

$$\begin{cases} x_0 = a + r \cos \left(\operatorname{Arctg} \left(\frac{Y-b}{X-a} \right) \right) \\ y_0 = b + r \sin \left(\operatorname{Arctg} \left(\frac{Y-b}{X-a} \right) \right) \end{cases}$$

on

$$\cos^2 t = \frac{1}{1 + \tan^2 t}$$

$$\Rightarrow \cos^2 (\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\text{et } \operatorname{arctg} x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\Rightarrow \cos (\operatorname{arctg} x) \geq 0$$

$$\text{d'où } \cos (\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\text{et } \sin (\operatorname{arctg} x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \end{cases}$$

$$x_0 = a + r \frac{X-a}{\sqrt{(X-a)^2 + (Y-b)^2}}$$

$$y_0 = b + r \frac{(Y-b)}{\sqrt{(X-a)^2 + (Y-b)^2}}$$

Page 48

Théorème de F. Riesz

Page 49

Soit H un esp de Hilbert sur $\mathbb{K}$
et φ une forme linéaire continue sur H .
alors $\exists$ un unique élément $a \in H$ tel
 $\forall x \in H: \varphi(x) = \langle x, a \rangle$.

Preuve: Comme φ est continue alors
 $\ker \varphi$ est un hyperplan fermé.
d'où si $\varphi(b) = 1$ alors $b \notin \ker \varphi$.

$$H = \ker \varphi \oplus \mathbb{K} \cdot b$$

et de plus on sait que: $H = \ker \varphi \oplus \ker \varphi^\perp$

Soit alors $x \in H$. D'une part $\exists \lambda \in \mathbb{K}$
 $\exists! \bar{x}_1 \in \ker \varphi / x = \bar{x}_1 + \lambda \cdot b$ et d'autre part

$$\exists! \bar{x}_1 \in \ker \varphi \text{ et } \exists! \bar{x}_2 \in \ker \varphi^\perp$$

$$x = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

$$\text{d'où } \varphi(x) = \varphi(\bar{x}_1) + \varphi(\bar{x}_2) = \varphi(\bar{x}_1) + \lambda \varphi(b)$$

$$\text{et donc } \lambda = \varphi(x) - \varphi(\bar{x}_1)$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \lambda \cdot b \Rightarrow \bar{x}_2 = \lambda b - \bar{x}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda b - \bar{x}_1 \in \ker \varphi \\ \bar{x}_2 \in \ker \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \cdot b \in \ker \varphi$$

$$\text{et comme } \dim \ker \varphi^\perp = 1$$

$$\text{alors } \ker \varphi^\perp = \mathbb{K} \cdot b$$



$$\text{or } \varphi(x) = \varphi(x_1) + \lambda \varphi(b)$$

$$\Rightarrow \lambda = \varphi(x).$$

$$\text{or } \langle x, b \rangle = \langle \overline{x_1} + \overline{x_2}, b \rangle$$

Page 50

$$\langle x, b \rangle = \langle x_1 + \lambda \cdot b, b \rangle$$

$$= \langle x_1, b \rangle + \lambda \langle b, b \rangle.$$

$$b \in \ker \varphi^\perp \text{ et } x_1 \in \ker \varphi \Rightarrow \langle x_1, b \rangle = 0$$

$$\text{d'où } \langle x, b \rangle = \lambda \|b\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \left\langle x, \frac{b}{\|b\|^2} \right\rangle = \varphi(x)$$

$$\text{en posant } a = \frac{b}{\|b\|^2} \text{ on aura :}$$

$$\varphi(x) = \langle x, a \rangle.$$

Application du Th. de Riesz

Soit u un opérateur ~~borné~~ continu

(application linéaire continue) de H dans H

Pour $x \in H$ soit φ_y la forme linéaire définie par :

$\varphi_y(x) = \langle u(x), y \rangle$ où $y \in H$

(c'est clair que φ_y est une forme linéaire)

et de plus $|\varphi_y(x)| = |\langle u(x), y \rangle| \leq \|u(x)\| \cdot \|y\|$

$\leq (\|u\| \cdot \|y\|) \cdot \|x\| \Rightarrow \varphi_y$ est continue.

Par application du théorème de Riesz $\exists!$

un unique élément qu'on note $u^*(y)$ tel

$$\forall x \in H : \varphi_y(x) = \langle x, u^*(y) \rangle$$

d'où u^* est donc une application

de H dans H .

Page 51

Montrons qu'elle est linéaire:

soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $y_1, y_2 \in H$.

$$\forall x \in H: \langle u(x), y_1 \rangle = \langle x, u^*(y_1) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \lambda u(x), y_1 \rangle = \langle x, u^*(\lambda y_1) \rangle$$

$$\langle \lambda u(x), y_1 \rangle$$

$$\langle u(\lambda x), y_1 \rangle = \langle \lambda x, u^*(y_1) \rangle$$

$$\langle x, \lambda u^*(y_1) \rangle$$

$$\Rightarrow \forall x \in H: \langle x, u^*(\lambda y_1) \rangle = \langle x, \lambda u^*(y_1) \rangle$$

$$\Rightarrow u^*(\lambda y_1) = \lambda u^*(y_1).$$

$$\text{et } \forall x \in H: \langle u(x), y_2 \rangle = \langle x, u^*(y_2) \rangle$$

$$\text{et } \langle u(x), y_1 + y_2 \rangle = \langle x, u^*(y_1 + y_2) \rangle$$

$$\text{et ou } \langle x, u^*(y_1 + y_2) \rangle = \langle u(x), y_1 + y_2 \rangle$$

$$= \langle u(x), y_1 \rangle + \langle u(x), y_2 \rangle$$

$$= \langle x, u^*(y_1) \rangle + \langle x, u^*(y_2) \rangle = \langle x, u^*(y_1 + y_2) \rangle$$

et donc: $\forall x \in H$:

$$u^*(y_1 + y_2) = u^*(y_1) + u^*(y_2).$$

ce qui montre que u^* est un

opérateur linéaire de H dans H .

u^* est appelé « opérateur adjoint de l'opérateur u »

(52)

Continuité de u^*

Page 52

52

Nous avons vu que la forme linéaire

$\varphi_y: x \rightarrow \langle x, y \rangle$ est continue
et que $\|\varphi_y\| = \|y\|$.

Pour $y \in H$,

$$\|u^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|u^*(y)\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|\varphi_{u^*(y)}\|$$

$$\text{or } \|\varphi_{u^*(y)}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi_{u^*(y)}(x)|$$

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, u^*(y) \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|x\| \cdot \|u^*(y)\|)$$

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle u(x), y \rangle| \leq \|u\| \cdot \|y\|$$

$$\leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|u(x)\| \cdot \|y\|) \leq \|y\| \cdot \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$$

$$\|y\| \cdot \|u\|$$

$$\text{donc } \|u^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|\varphi_{u^*(y)}\| \leq \sup_{\|y\| \leq 1} (\|u\| \cdot \|y\|)$$

$$\Rightarrow \|u^*\| \leq \|u\|$$

donc u^* est continue.

$$- (u^*)^* = u$$

$$\text{Preuve: } \langle u(x), y \rangle = \langle x, (u^*)^*(y) \rangle$$

$$\langle y, u^*(x) \rangle = \langle u(y), x \rangle$$

$$= \langle x, u(y) \rangle \text{ et ce } \forall x \in H$$

$$\Rightarrow (u^*)^*(y) = u(y)$$

52

$$- \|u^*\| \leq \|u\|.$$

$$\|u\| = \|(u^*)^*\| \leq \|u^*\|$$

$$\text{d'où } \|u^*\| = \|u\|$$

53

- $\forall x, y \in H$, nous avons :

$$\langle u^*(x), u^*(y) \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$$

$$\langle \overline{u(x)}, \overline{u(y)} \rangle =$$

- u^* commute avec u
 $u \circ u^* = u^* \circ u$

Pour $x, y \in H$ on a :

$$\langle (u \circ u^*)(x), y \rangle = \langle u(u^*(x)), y \rangle$$

$$= \langle u^*(x), u^*(y) \rangle = \langle u^*(y), u^*(x) \rangle$$

$$= \langle \overline{y}, \overline{u^*(u^*(x))} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{u(u^*(x))} \rangle$$

$$= \langle u(u^*(x)), y \rangle$$

$$- (u+v)^* = u^* + v^*$$

$$\langle (u+v)(x), y \rangle = \langle x, (u+v)^*(y) \rangle$$

$$\stackrel{||}{=} \langle u(x), y \rangle + \langle v(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle + \langle x, v^*(y) \rangle$$

$$= \langle x, u^*(y) + v^*(y) \rangle.$$

$$- (\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*, \quad \langle \overline{(\lambda u)}(x),$$

$$\langle x, (\lambda u)^*(y) \rangle = \langle (\lambda u)(x), y \rangle = \lambda \langle u(x), y \rangle$$

$$= \langle \overline{u(x)}, \overline{\lambda y} \rangle = \langle \overline{x},$$

$$= \lambda \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, \overline{\lambda} u^*(y) \rangle$$



$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

Page 54

$$\begin{aligned} \langle x, (u \circ v)^*(y) \rangle &= \langle (u \circ v)(x), y \rangle \\ &= \langle u(v(x)), y \rangle = \langle v(x), u^*(y) \rangle \\ &= \langle x, v^*(u^*(y)) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{ellou } (u \circ v)^*(y) = v^*(u^*(y)) \\ = (v^* \circ u^*)(y).$$

- L'opérateur $*$ de $\mathcal{L}(H)$ ds $\mathcal{L}(H)$ est anti-linéaire. isométrique.

- $I^* = I$ où $\overline{I(x)} = x$.

- si u est inversible alors u^* est inv et $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

$$u^{-1} \circ u = I \Rightarrow (\bar{u}^{-1} \circ u)^* = I$$

$$\Rightarrow u^* \circ (\bar{u}^{-1})^* = I \Rightarrow u^* \text{ est inversible}$$

$$\text{à droite et } u \circ \bar{u}^* = I \Rightarrow (\bar{u})^* \circ u^* = I$$

$$\Rightarrow u^* \text{ est inversible à gauche}$$

$$\text{et } (u^*)^{-1} = (u^{-1})^*.$$

~~Opérateurs~~

- Un opérateur u est dit normal si

$$u^* \circ u = u \circ u^*$$

- u est normal ssi $\forall x, y \in H$:

$$\langle u^*(x), u^*(y) \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$$

Un opérateur est dit auto-adjoint
 s'il est l'adjoint de lui-même.
 c'est à dire que si $u^* = u$.
 si $K = \mathbb{R}$, u est dit symétrique.
 et si $K = \mathbb{C}$, u est dit hermitien.

i.e : si $\forall x, y : \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

- ~~u est~~ si $K = \mathbb{C}$ alors
 u est auto-adjoint ssi
 $\forall x \in H : \langle u(x), x \rangle \in \mathbb{R}$.

- si ~~est~~ $K = \mathbb{C}$ et si $u \in \mathcal{L}(H)$
 alors :

$$\frac{1}{2} \|u\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle u(x), x \rangle| \leq \|u\|$$

- Et si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si u est auto-adjoint
 on a : $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle u(x), x \rangle|$

On appelle opérateur ~~unitaire~~ tout opérateur
 u ~~auto-adjoint inversible~~ linéaire
 u qui conserve la norme : $\|u(x)\| = \|x\|$.
 (u est une isométrie)

Si u est unitaire $\Rightarrow \|u\| = 1$.

- u unitaire $\Leftrightarrow \forall x, y \in H : \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
 $(\Rightarrow) \|u(x) - u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle u(x), u(y) \rangle$
 $= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$
 $\Rightarrow \operatorname{Re} \langle u(x), u(y) \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$
 $\Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

Page 56

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(u(x)), y \rangle = \langle x, y \rangle$$
$$\forall x, y \in H$$

alors $u^* \circ u = \text{Id}_H$

$\Rightarrow u$ est inversible à gauche.

Réciproquement si $u^* \circ u = \text{Id}_H$

alors $\forall x, y : \langle u^*(u(x)), y \rangle = \langle x, y \rangle$

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$\Rightarrow u$ conserve la norme.

Th: u conserve la norme si

$$u^* \circ u = \text{Id}_H$$

si u conserve la norme, il est injectif
On dit que u est un opérateur unitaire
si de plus u est surjectif.

i.e si u est inversible et $u^{-1} = u^*$

Rq) si $\dim H < \infty$, on sait que tout
opérateur injectif u de H dans lui-même
est surjectif et vice versa.

Mais si $\dim H = \infty$, un opérateur injectif
peut ne pas être surjectif et vice versa.
et de plus si H est un Hilbert et u
inversible à gauche, u peut ne pas être
inversible à droite. c'est à dire il peut
ne pas être surjectif.

- u est unitaire $\Leftrightarrow u$ surjectif conservant
la norme $\Leftrightarrow u^{-1} = u^*$

◀ III ▶ Système orthonormé dans un espace de Hilbert.

Page 57

Soit H un esp. de Hilbert.

Un système de vecteurs $\{x_i\}_{i \in I}$ est dit système orthogonalssi $\forall i \neq j$

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0$$

$\{x_i\}_{i \in I}$ est alors linéairement indépendant.

Soit $E = \overline{\text{Vect} \{x_i\}_{i \in I}}$: le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant les x_i .

si $E = H$, le système est dit complet ou total ou encore « une base hilbertienne »

si H est séparable : il existe une partie D dénombrable et dense dans H ou ce qui équivaut à dire que H possède une suite dense. Dans ce cas on démontre par le procédé d'orthonormalisation de

Gramm-Schmitt que H possède un système orthogonal (orthonormé) $\{x_i\}_{i \in I}$ $\|x_i\| = 1$ complet et dénombrable.

Supposons H séparable et soit $\{x_n\}_{n \geq 1}$ un système orthonormé complet.

Soit $F_n = \text{Vect} \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, F_n est fermé.

$m \geq n \Rightarrow F_n \subset F_m$, $F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$ est un sous

espace vectoriel de H et comme $\{x_n\}_{n \geq 1}$ est un système complet alors $\overline{F} = H$



Pour $n \geq 1$, soit P_n la projection de H sur F_n . Pour $x \in H$, $P_n(x) \in F_n$.

i.e. $P_n(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

or $x = P_n(x) + P_{F_n^\perp}(x)$, ($P_{F_n^\perp}(x) = x - P_n(x)$)

$\langle x, x_j \rangle = \langle P_n(x), x_j \rangle + \underbrace{\langle P_{F_n^\perp}(x), x_j \rangle}_{=0}$

$\Rightarrow \langle x, x_j \rangle = \langle P_n(x), x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_j \right\rangle$
 $= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 = \alpha_j$

Donc $\alpha_j = \langle x, x_j \rangle$

Donc $P_n(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i$

or $\|x\|^2 = \|P_n(x)\|^2 + \|P_{F_n^\perp}(x)\|^2$

donc $\|P_n(x)\|^2 \leq \|x\|^2$

or $\|P_n(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2$
 $= \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

cela montre que la série $\sum_{n \geq 1} |\langle x, x_n \rangle|^2$ est convergente

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \langle x, x_n \rangle x_n$ converge normalement

et de plus : $\sum_{n \geq 1} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (I)

Page 58

l'inégalité (I) s'appelle Inégalité de Bessel.

Page 59

Montrons que la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est
convergente. Pour cela, il suffit de montrer
que $\|P_n(x) - P_m(x)\|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$

or si $m \geq n+1$

$$\begin{aligned} \|P_m(x) - P_n(x)\|^2 &= \left\| \sum_{j=n+1}^m \langle x, x_j \rangle x_j \right\|^2 \\ &= \sum_{j=n+1}^m |\langle x, x_j \rangle|^2 = \left(\sum_{j=1}^m |\langle x, x_j \rangle|^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^n |\langle x, x_j \rangle|^2 \right) \end{aligned}$$

or le deuxième membre tend vers 0 car
la série $\sum_{n \geq 1} |\langle x, x_n \rangle|^2$ converge.

Soit alors $l = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$

pour $m \geq n$ on a $F_m^\perp \subset F_n^\perp$ car $F_n \subset F_m$

$$P_{F_m^\perp}(x) = x - P_m(x) \in F_m^\perp \subset F_n^\perp \Rightarrow x - P_m(x) \in F_n^\perp$$

d'où comme $F_n^\perp$ est fermé et $x - P_m(x) \in F_n^\perp$

alors $\lim_{m \rightarrow \infty} (x - P_m(x)) \in F_n^\perp$

$$\Rightarrow x - \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(x) \in F_n^\perp \Rightarrow x - l \in F_n^\perp$$

$$\text{d'où } x - l \in \bigcap_{n \geq 1} F_n^\perp = \left(\bigcup_{n \geq 1} F_n \right)^\perp = F^\perp$$

et comme F est dense ds $H \Rightarrow F^\perp = \{0\}$

$$\Rightarrow x = l \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x$$



Ainsi donc la suite $\sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i$ est convergente i.e la série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$ est convergente et on a:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \cdot x_n \quad \text{--- (II)}$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \quad (\text{Egalité de Parseval}) \quad \text{--- (III)}$$

Ces coefficients $\langle x, x_n \rangle$ s'appellent coefficients de Fourier de l'élément x .

L'égalité (II) est la raison pour laquelle le système complet $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est appelé « Base hilbertienne ».

Rq) Une base hilbertienne n'est pas une base algébrique de H .

Exemple de systèmes complets

1) $H = \ell^2$, $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$

$$\|e_n\| = 1, \quad \langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

comme $x = (x_n)_n \in \ell^2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$

$$\text{soit } y_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

$$\|x - y_n\|^2 = \sum_{m=n+1}^{\infty} |x_m|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$