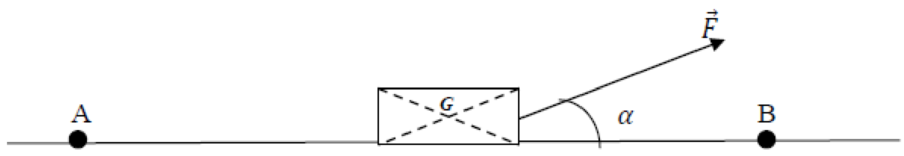
Travail et énergie du point matériel

Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne

Considérons un objet assimilé à un point matériel G se déplaçant sur une portion de droite, d'un point A à un point B, et soumis à une force $\vec{F}$ constante au cours du déplacement.



Par définition, le travail d'une force $\vec{F}$ constante sur un déplacement rectiligne AB est égal au produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement :

$$W_{A\to B} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.\cos\alpha$$

Avec $\boldsymbol{\alpha}$ l'angle que fait $\vec{F}$ avec $\overrightarrow{AB}$.

Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force $\vec{F}$ par rapport au déplacement.

- Si $\vec{F}$ est perpendiculaire à AB le travail est nul, la force F ne contribuant pas à déplacer l'objet.
- Lorsque la *force s'oppose au déplacement, elle est **résistante** et le travail est négatif.*
- *Lorsque la force est **motrice** le travail est positif.*

Le travail s'exprime en joules J.

Le travail élémentaire

Dans le cas où la force $\vec{F}$ varie au cours du déplacement (elle change constamment d'orientation et d'intensité i.e. $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$).

Pour calculer le travail, on décompose alors le trajet AB en une succession de *déplacements élémentaires* $\overrightarrow{dl}$ infiniment petits (rectilignes) et sur lesquels le vecteur force $\vec{F}$ peut être considéré comme constant.

L'expression du *travail élémentaire* sur un tel déplacement élémentaire s'écrit :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Avec $\overrightarrow{dl}$ donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

Travail d'une force variable sur un déplacement quelconque

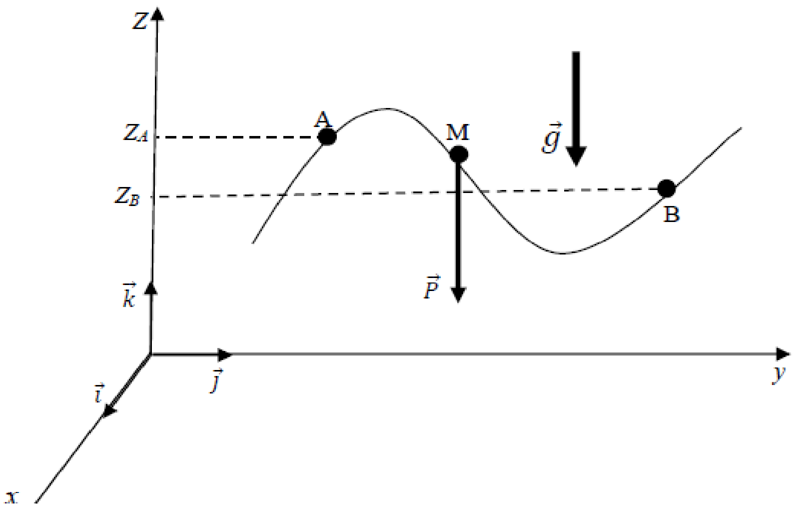
Pour obtenir le travail total de la force sur le déplacement total AB, il suffit d'additionner les travaux élémentaires quand on passe du point A au point B. La sommation est continue, ce qui conduit à :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Exemples de calcul du travail

Travail d'une force constante : poids d'un corps.

Considérons une masse m se déplaçant d'un point A d'altitude z_A à un point B d'altitude z_B et calculons le travail du poids de ce corps au cours de ce déplacement.



$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{P}.\overrightarrow{dl}$$

On sait que

$$\vec{P} = -mg\vec{k} = \overrightarrow{cte}$$

Donc

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \vec{P}\int_A^B \overrightarrow{dl} = \vec{P}.\overrightarrow{AB}$$

Avec

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\imath} + (z_B - z_A)\vec{\imath}$$

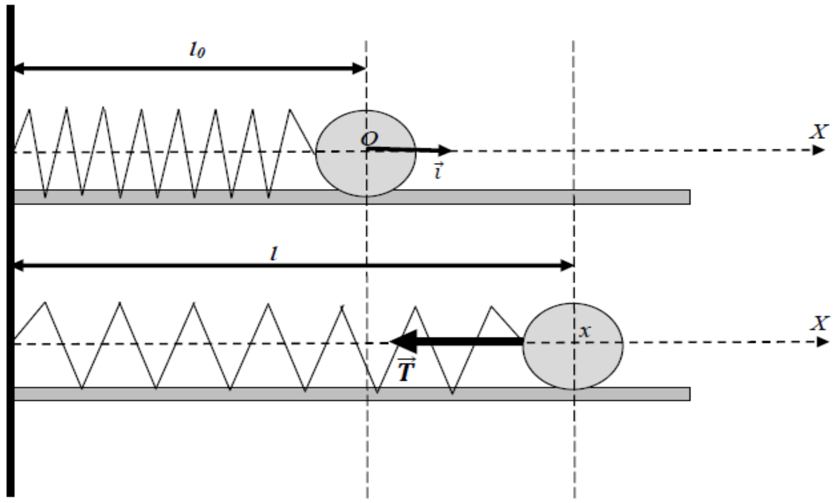
$$\Rightarrow \quad W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$$

Remarque

Il est clair que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale A et finale B.

Travail d'une force variable : force de tension (élastique).

Considérons un ressort de raideur k, de longueur au repos l_0, au bout duquel est accrochée une masse m comme l'indique la figure ci-dessous. Le ressort et la masse sont sur un plan horizontal et nous nous intéressons uniquement à la tension $\vec{T}$ du ressort qui s'écrit sous la forme :



$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{i} = -kx\vec{i}$$

Le travail élémentaire de la force élastique $\vec{T}$ est donné par

$$dW = \vec{T}.\vec{dl}$$

$$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad dW = -kxdx$$

Lorsque le point d'application passe d'une position x_1 à une position x_2 , le travail de la force élastique est donc :

$$W_{x1\rightarrow x2}(\vec{T}) = \int_{x_1}^{x_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = \frac{1}{2}k(x_1{}^2 - x_2{}^2)$$

Remarque

Le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale du ressort.

Puissance d'une force

La Puissance instantanée d'une force est donnée par :

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

On peu écrire :

$$dW = P(t).dt \quad \Rightarrow \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P(t).dt$$

Energie

Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m , de vitesse instantanée v est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

On peut exprimer l'énergie cinétique en fonction de la quantité de mouvement du point matériel. En effet, on a

$$p = mv \quad \Rightarrow \quad E_c = \frac{p^2}{2m}$$

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

Soit

$$\Delta E_c|_A^B = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

Forces conservatives

- *Les forces conservatives* sont les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

Exemples : travail du poids, travail de la tension du ressort, travail d'une force constante.

- *Les forces non conservatives* dont le travail dépend du chemin suivi, comme par exemple les forces de frottement.

Energie potentielle

L'énergie potentielle *Ep* est la fonction d'état de coordonnées dont l'intégration entre ses deux valeurs prises au départ et à l'arrivée soit égale au travail des forces conservatives.

Théorème de l'énergie potentielle

Enoncé : la variation d'énergie potentielle est représentée par l'opposé du travail des forces conservatives soit :

$$\Delta E_P|_A^B = E_P(B) - E_P(A) = -\sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}^C)$$

En explicitant la définition du travail, on obtient la forme intégrale de l'énergie potentielle donnée par :

$$\Rightarrow \quad E_P(B) - E_P(A) = -\int_A^B \vec{F}_{ext}^C . \overrightarrow{dl}$$

La forme différentielle alors s'écrit sous la forme :

$$dE_p = -\vec{F}_{ext}^C . \overrightarrow{dl}$$

La définition locale de l'énergie potentielle peut se déduire de la forme différentielle. En effet :

$$dE_p = \overrightarrow{grad}E_p . \overrightarrow{dl} = -\vec{F}_{ext}^C . \overrightarrow{dl}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}E_p = -\vec{F}_{ext}^C$$

Exemples d'énergie potentielle

Énergie potentielle de pesanteur

$$dE_{Pp} = -\vec{P} . \overrightarrow{dl} = mgdz$$

$$\Rightarrow \quad E_{Pp} = \int mgdz = mgz + c$$

L'énergie potentielle de pesanteur est définie à une constante près qui déterminée en choisissant généralement $E_{Pp}(z = 0) = 0$ (à la surface de la terre). Donc on peut écrire :

$$E_{Pp} = mgz = mgh$$

Où *h* est l'altitude du corps considéré.

Énergie potentielle élastique

De la même façon que l'énergie de pesanteur, on peut utiliser la forme différentielle de l'énergie potentielle pour écrire l'expression de l'énergie potentielle élastique

$$dE_{Pe} = -\vec{T}.\vec{dl} = kxdx$$

$$\Rightarrow \quad E_{Pe} = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + c$$

Il clair que l'énergie potentielle élastique s'annule en absence de tout déformation

$$E_{Pe}(x = 0) = 0$$

Alors la constante c est nulle et on peut écrire :

$$\Rightarrow \quad E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

Remarque

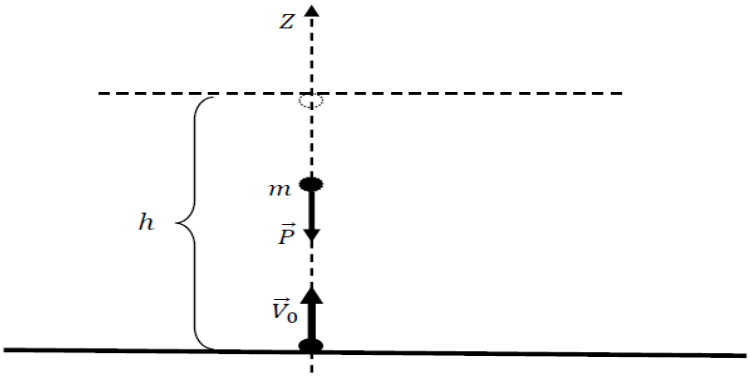
x dans l'expression de E_{Pe} peut être un allongement ou une compression.

Exercice 01 :

Quelle est la vitesse initiale V_0 orientée verticalement vers le haut, communiquée à un corps pour qu'il atteigne une hauteur h à partir de la surface de la terre ? (On néglige tous les frottements).

Réponse :

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre la surface de la terre et le point atteint par le projectile



$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

Le corps est soumis uniquement à la force du poids

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum W(\vec{P}) = -mgh$$

Le corps atteint sa hauteur maximale lorsque $v=0$, d'où

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh}$$