

Exo 5 Soient les notes d'examens d'un étudiant données par:

	x_0	x_1	x_2	x_3
Exam: x	1	2	3	4
Note: $f(x)$	13	8	α	15

En utilisant une interpolation quadratique ($P_2(x)$) ($n=2$) de Newton, déterminer la note maximale de l'examen 3. i.e. Trouver $\alpha \approx P_2(3)$.

On a 1, 2 et 4 sont 3 pts distincts, donc le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ existe et unique

D'après Newton: $P_2(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-x_0) + \lambda_2(x-x_0)(x-x_1)$
 $= \lambda_0 + \lambda_1(x-1) + \lambda_2(x-1)(x-2)$.

Calculons les λ_i en utilisant le Tab. des D.D.

x_i	D.D. 0 $f(x_i)$	D.D. 1	D.D. 2	D.D. 3
1	13	$\frac{8-13}{2-1} = -5$	$\frac{3,5 - (-5)}{4-1} = 2,83$	
2	08	$\frac{15-8}{4-2} = 3,5$	$\frac{6,34-3,5}{3-2} = 2,84$	$\frac{2,84-2,83}{3-1} = 0,005$
4	15	$\frac{8,66-15}{3-4} = 6,34$		
$\bar{x}=3$	$P_2(3) = 8,66$			$f[1,2,4,3]$

Donc: $P_2(x) = 13 - 5(x-1) + 2,83(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow P_2(x) = 2,83x^2 - 13,49x + 23,66$

On a $\alpha = f(3) \approx P_2(3) = 13 - 5(3-1) + 2,83(3-1)(3-2)$

$\Rightarrow \alpha \approx P_2(3) = 8,66$

Avoir une note maximale i.e. $\alpha_{\max} = P_2(3) + \varepsilon(3)$

On a: $\varepsilon(\bar{x}) = |(\bar{x}-1)(\bar{x}-2)(\bar{x}-4)| \cdot f[1,2,4,3]$

$\Rightarrow \varepsilon(3) = |(3-1)(3-2)(3-4)| \cdot 0,005 = 0,01$

Donc, la note maximale est: $\alpha_{\max} = 8,66 + 0,01 = 8,67$

Exo 6:

1) En utilisant une interpolation quadratique ($n=2$) convenable, déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{47}$

On considère la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ et $\bar{x} = 47$.
Pour faire une interpolation quadratique convenable i.e. calculer $P_2(x)$, il faut choisir 3 pts distincts $x_0 < x_1 < x_2$ tels que:

- 1) $\bar{x} = 47 \in [x_0, x_2]$.
- 2) le calcul des $f(x_i) = \sqrt[3]{x_i}$ soit facile (exact).
- 3) l'erreur $E(x)$ soit la plus petite possible.

On a 2 choix de pts distincts ($x_0 < x_1 < \bar{x} < x_2$ ✓ $x_1 < \bar{x} < x_2 < x_0$)

1^{er} choix

x_i	$x_0 = 8$	$x_1 = 27$	$x_2 = 64$
$f(x_i)$	2	3	4

$\bar{x} = 47 \in [x_0, x_2] = [8, 64]$

2^{ème} choix

x_i	$x_0 = 27$	$x_1 = 64$	$x_2 = 125$
$f(x_i)$	3	4	5

$\bar{x} = 47 \in [x_0, x_2] = [27, 125]$

On va prendre le choix qui nous donne la plus petite erreur.

On a: $E(x) = |f(x) - P_2(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \cdot \left| \frac{f^{(3)}(\xi)}{(2+1)!} \right|$ $\forall \xi \in [x_0, x_2]$

$$\Rightarrow E(x) \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \cdot \frac{M}{(2+1)!}$$

tg $M = \max_{[x_0, x_2]} |f^{(3)}(x)|$

On a: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$
 $\Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} \Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3} > 0 \forall x \in [x_0, x_2]$

et on a $f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81} x^{-11/3} < 0 \forall x \in [x_0, x_2] ([8, 64] \text{ ou } [27, 125])$

$\Rightarrow f^{(3)}(x)$ est décroissante sur $[x_0, x_2]$

$\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_2], 0 < f^{(3)}(x_2) \leq f^{(3)}(x) \leq f^{(3)}(x_0)$

$\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_2], f^{(3)}(x_2) \leq |f^{(3)}(x)| = f^{(3)}(x) \leq f^{(3)}(x_0)$

$\Rightarrow M = \max_{[x_0, x_2]} |f^{(3)}(x)| = f^{(3)}(x_0)$

ANN 1.

Série N°2

2020/2021

* Pour le 1^{er} choix : $x_0 = 8 \Rightarrow M = f^{(3)}(8) = \frac{10}{27} \cdot 8^{-\frac{8}{3}} = 1,45 \times 10^{-3}$
 $\Rightarrow E_1(47) \leq \frac{M}{3!} |(47-x_0)(47-x_1)(47-x_2)| = \frac{M}{6} |(47-8)(47-27)(47-64)|$
 $\Rightarrow E_1(47) \approx 3,20$

* Pour le 2^{ème} choix : $x_0 = 27 \Rightarrow M = f^{(3)}(27) = \frac{10}{27} \cdot (27)^{-\frac{8}{3}} = 5,65 \times 10^{-5}$
 $\Rightarrow E_2(47) \leq \frac{M}{3!} |(47-x_0)(47-x_1)(47-x_2)| = \frac{M}{6} |(47-27)(47-64)(47-125)|$
 $\Rightarrow E_2(47) \approx 0,25 = 2,5 \times 10^{-1}$

On remarque que $E_2(47) < E_1(47)$, donc le 2^{ème} choix est meilleur que le 1^{er} choix.

D'après Newton le polynôme d'interpolation est :

x_i	27	64	125
$f(x_i)$	3	4	5

$$P_2(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-x_0) + \lambda_2(x-x_0)(x-x_1).$$

Calculons les D.D. λ_i

x_i	D.D. 0 $f(x_i)$	D.D. 1	D.D. 2
27	3 λ_0		
64	4	$\frac{4-3}{64-27} = \frac{1}{37} \lambda_1$	
125	5	$\frac{5-4}{125-64} = \frac{1}{61}$	$\frac{\frac{1}{61} - \frac{1}{37}}{125-27} = -1,09 \times 10^{-4} \lambda_2$

Donc : $P_2(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-27) + \lambda_2(x-27)(x-64)$

$$\Rightarrow P_2(x) = 3 + 2,7 \times 10^{-2}(x-27) - 1,09 \times 10^{-4}(x-27)(x-64)$$

On a : $\forall x \in [x_0, x_2] = [27, 125], f(x) \approx P_2(x)$

Ainsi $\sqrt[3]{47} = f(47) \approx P_2(47) = 3 + 2,7 \times 10^{-2}(47-27) - 1,09 \times 10^{-4} \frac{(47-27)(47-64)}{(47-64)}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{47} \approx P_2(47) = 3,57756$$

2) Est-il préférable d'utiliser une interpolation linéaire?

i.e. $n=1$ et $P_1(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-x_0)$

On prend 2 pts distincts x_0 et x_1 tq $x_0 < \bar{x} < x_1$ ($\bar{x}=47$)

$\Rightarrow x_0 = 27$ et $x_1 = 64$ ($47 \in [27, 64]$)

Calculons l'erreur dans le cas d'interpolation linéaire :

$$E(x) = |(x-x_0)(x-x_1)| \cdot \frac{|f''(\xi)|}{2!} \quad \forall \xi \in [x_0, x_1]$$

$$\Rightarrow E(x) \leq |(x-27)(x-64)| \cdot \frac{M}{2}$$

$$\text{ou } M = \max_{[x_0, x_1]} |f''(x)| = \max_{[27, 64]} |f''(x)|$$

$$\text{On a : } f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} < 0 \quad \forall x \in [27, 64]$$

$$\text{et } f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3} > 0 \quad \forall x \in [27, 64]$$

$\Rightarrow f''(x)$ est croissante sur $[27, 64]$.

$$\text{Alors, } \forall x \in [x_0, x_1], \quad f''(x_0) \leq f''(x) \leq f''(x_1)$$

$$\Rightarrow -f''(x_0) \geq |f''(x)| = -f''(x) \geq -f''(x_1)$$

car $f''(x) < 0$

$$\Rightarrow M = \max_{[x_0, x_1]} |f''(x)| = -f''(x_0) = -f''(27) = \frac{2}{9} \cdot (27)^{-5/3}$$

$$\Rightarrow M = 9,14 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow E_1(47) \simeq \frac{M}{2} |(47-27)(47-64)|$$

$$\Rightarrow E_1(47) \simeq 0,16 = 1,6 \times 10^{-1}$$

On remarque que $E_1(47) \simeq 0,16 < E_2(47) \simeq 0,25$

Donc, il est préférable d'utiliser une interpolation linéaire pour calculer une valeur approchée de $\sqrt[3]{47}$

Exo 7 Soit $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$

1) Donner une valeur approchée de $\sin(\frac{\pi}{10})$, en utilisant une interpolation de Newton aux pts $x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{3}$ et $x_3=1$

On a 4 pts distincts, donc

$P_3(x)$ existe et unique

D'après Newton:

x_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
$f(x_i)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$P_3(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-x_0) + \lambda_2(x-x_0)(x-x_1) + \lambda_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Calculons les λ_i en utilisant le Tab. des D.D.

x_i	D.D. 0 $f(x_i)$	D.D. 1	D.D. 2	D.D. 3	D.D. 4
0	0	$\sqrt{2}$	$-9+6\sqrt{2}$	$\frac{33}{2}-12\sqrt{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-3+3\sqrt{2}$	$\frac{15}{2}-6\sqrt{2}$	$-0,4706$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-0,9833$	$-0,4717$	$-0,0055$
1	1	$0,8625$	$-0,8438$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, \bar{x}]$
$\bar{x} = \frac{1}{5}$	0,31				

Donc, $P_3(x) = 0 + \sqrt{2}(x-0) + (-9+6\sqrt{2})(x-0)(x-\frac{1}{2}) + (\frac{33}{2}-12\sqrt{2})(x-0)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})$

$$\Rightarrow P_3(x) = \sqrt{2}x + (-9+6\sqrt{2})x(x-\frac{1}{2}) + (\frac{33}{2}-12\sqrt{2})x(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow P_3(x) = -0,4706x^3 - 0,1225x^2 + 1,5931x$$

On a $f(x) \simeq P_3(x) \quad \forall x \in [0, 1]$

On a: $\sin(\frac{\pi}{10}) = \sin(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{5}) = f(\frac{1}{5}) \simeq P_3(\frac{1}{5})$ (car $\frac{1}{5} \in [0, 1]$)

On a $P_3(\frac{1}{5}) = 0,30995 \simeq 0,31$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{10}) \simeq P_3(\frac{1}{5}) = 0,31$$

2) Évaluer le résultat.

Pour évaluer le résultat, il faut calculer l'erreur.
Pour calculer l'erreur on a le choix, ou bien on utilise la formule avec la dérivée d'ordre $(n+1)$

$$\text{i.e. : } E(\bar{x}) = |f(\bar{x}) - P_3(\bar{x})| \leq \frac{M}{4!} |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3)|$$

$$\text{ou } M = \max_{[0,1]} |f^{(4)}(x)|$$

Ou bien, on utilise la formule avec les D.D d'ordre $(n+1)$

$$E(\bar{x}) = |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3)| \cdot |f[x_0, x_1, x_2, x_3, \bar{x}]|.$$

On revient au Tab. des D.D, on ajoute $\bar{x}$ et on continue les calculs.

$$\text{On a : } f[x_0, x_1, x_2, x_3, \bar{x}] = -5,5 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow E(\bar{x}) = |(\bar{x} - 0)(\bar{x} - \frac{1}{2})(\bar{x} - \frac{1}{3})(\bar{x} - 1)| \cdot |f[x_0, x_1, x_2, x_3, \bar{x}]|$$

$$\Rightarrow E(\frac{1}{5}) = |(\frac{1}{5} - 0)(\frac{1}{5} - \frac{1}{2})(\frac{1}{5} - \frac{1}{3})(\frac{1}{5} - 1)| \cdot 5,5 \times 10^{-3}.$$

$$\Rightarrow \boxed{E(\frac{1}{5}) \approx 3,5 \times 10^{-5}}$$

On remarque que l'erreur $E(\frac{1}{5})$ est très petite
donc, $P_2(\frac{1}{5})$ est une très bonne approximation
de $\sin(\frac{\pi}{10}) = f(\frac{1}{5})$.