Erreur d'interpolation

Lemme *Soit f une fonction k fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose qu'il existe $(k+1)$ points : $c_0 < c_1 < \cdots < c_k$ de $[a,b]$ tel que $f(c_i) = 0$. Alors*

$$\exists \xi \in]c_0, c_k[\ / \ f^{(k)}(\xi) = 0.$$

Preuve. *Le lemme se démontre par recurrence sur k.*
Pour $k = 1$, en utilisant le théorème de Rolle.
$c_0 < c_1 < \ldots < c_k / \ f(c_i) = 0$ *pour* $i = 0, \ldots, k$. *Maintenant, supposons que le lemme est vrai pour* $k-1$, *alors*

$\exists \xi_0 \in [c_0, c_1]$ *tel que* $f^{(k-1)}(\xi_0) = 0$,
$\exists \xi_1 \in [c_1, c_2]$ *tel que* $f^{(k-1)}(\xi_1) = 0$,

$\vdots$
$\exists \xi_{k-1} \in [c_{k-1}, c_k]$ *tel que* $f^{(k-1)}(\xi_{k-1}) = 0$.
Alors d'après le théorème de Rolle $\exists \xi \in [c_0, c_k]$ *tel que* $f^{(k)}(\xi) = 0$.

Théorème *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $(n+1)$ fois dérivable sur $[a, b]$ si $P_n(x)$ est un polynôme de degré inferieur ou égale à n tel que*

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n; \quad x_i \in [a, b],$$

alors

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b] / E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (1)$$

avec $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

Preuve. *On remarque que si $x = x_i$ alors $E(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0$, pour $i = 0, \ldots, n$.*
Maintenant, si $x \neq x_i$, on pose

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

et

$$\Phi(t) = f(t) - P_n(t) - \lambda(x) \prod_{i=0}^{n} (t - x_i). \qquad (2)$$

$\Phi(t)$ est une fonction de classe C^{n+1} et s'annule en $n+2$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$. D'où d'aprés le lemme

$$\exists \xi \in [a,b]/ \quad \Phi^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

D'autre part, le polynôme $\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$ est de degré $n+1$ avec le coefficient de t^{n+1} égale $= 1$ donc sa dérivé $n+1$ fois égale à $(n+1)!$. Donc

$$\Phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda(x)(n+1)!.$$

Alors, $\Phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \lambda(x)(n+1)! = 0 \Rightarrow \lambda(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

D'où le résultat.