Correction 5. TD Analyse Matricielle.

Exercice 10.

1- Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est définie positive (DP) c.à.d $x^* Ax = \langle Ax, x\rangle > 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, alors A est réguliere. En effet, supposons le contraire que A n'est pas régulière c.à.d $0 \in$Sp(A) ce qui implique que $Ay = 0$ pour $y \neq 0$. Mais $0 < \langle Ay, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$, (impossible). Donc si A est DP alors il est toujours inversible. Le contraire est fausse, si A est inversible, alors A n'est pas nécessairement DP. On prend l'exemple suivant:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2- (Voirs le cours).

3- Soit A une matrice hermitienne ($A = A^*$) définie positive, alors les matrices de puissance A^2 et A^3 sont aussi hermitiennes et définies positives. Pour la matrice A^2, on a :

$$\langle A^2 x, x\rangle = \langle Ax, A^* x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 > 0,\ \forall x \neq 0, \text{car } Ax \neq 0.$$

Remarque : Si A est inversible et $x \neq 0 \Longrightarrow Ax \neq 0$.

Pour la matrice A^3, on a :

$$\langle A^3 x, x\rangle = \langle AAx, Ax\rangle = \langle Ay, y\rangle > 0,\ \forall y = Ax \neq 0,$$

car A est DP et de plus $x \neq 0 \Longrightarrow y = Ax \neq 0$.

4- Si A et B sont deux matrices réelles définies positives alors leurs somme $(A + B)$ est toujours définie positive car :

$$x^T(A + B)x = x^T Ax + x^T Bx > 0,\ (\, x^T Ax > 0 \text{ et } x^T Bx > 0).$$

Pour la différence $(A - B)$, ce résultat n'est pas toujours vraie, on peut trouver un exemple qui montre le contraire. Soient $A, B \in R^{n\times n}$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\Downarrow \\ A - B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A et B sont symétriques définies positives mais la matrice $(A-B)$ est symétrique mais non définie positive car $a_{22} = -1 < 0$.

Exercice 11. Soit $u \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ et $y^*x = \langle y, x\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ (produit scalaire hermitien).

1- Soit la matrice $P = uu^*(u^* = \bar{u}^T)$. La matrice P est hermitienne car $P = P^*$. On déduit que la matrice P est normale donc diagonalisable et son spectre $Sp(P) \subseteq \mathbb{R}$.

2- P est semi-définie positive car :

$$\begin{aligned} x^*Px &= \langle Px, x\rangle = \langle\ uu^*x, x\rangle \\ &= \langle\ \ u^*x, u^*x\rangle \\ &= (u^*x)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Résultats :

- De (2), on a vu que : $x^*Px = (u^*x)^2$, donc on peut trouver un x tel que $u^*x = 0$, ceci indique que $x^*Px = 0$ ce qui confirme que P est semi-définie mais non définie positive.

- Comme P est hermitienne semi-définie positive $\Longrightarrow Sp(P) \subseteq [0, +\infty[$ c.à.d les valeurs propres de P, $\lambda_i(P) \geq 0$ et de plus on déduit que P n'est pas inversible car $0 \in Sp(P)$.

b) $rg(P) = 1$? on a par définition :

$$rg(P) = \dim ImP.$$

ImP, l'image de P. Mais comme

$$\dim ImP + \dim \ker P = n$$

donc il suffit de montrer que

$$\dim \ker P = n - 1.$$

Calculons le noyau $\ker P$, on a :

$$\begin{aligned} \ker P &= \{x \in \mathbb{C}^n : p(x) = 0_{\mathbb{C}^n}\} \\ &= \{x \in \mathbb{C}^n : uu^*x = 0_{\mathbb{C}^n}\} \\ &= \{x \in \mathbb{C}^n :\ u^*x = 0_{\mathbb{C}^n}\}. \end{aligned}$$

Soit

$$F = \mathbf{Span}\{u\},$$

c'est à dire le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par le vecteur $u \Longrightarrow$

$$\dim F = 1.$$

Calculons l'orthogonal de F, $F^{\perp}$. On a :

$$F^{\perp} = \{x \in \mathbb{C}^n : \ u^* x = 0_{\mathbb{C}^n}\} = \ker P.$$

Or

$$\begin{array}{rcl} \dim F + \dim F^{\perp} & = & n \\ & \Downarrow & \\ \dim F^{\perp} & = & n-1 \\ & \Downarrow & \\ \dim \ker P & = & n-1. \end{array}$$

C'est à dire $rg(P) = 1$, et on déduit aussi que P n'est pas inversible et la matrice P est dite une matrice de rang 1.
c) Si $u(u^* u = 1)$, alors P, est une matrice de projection si $P^2 = P$. On a :

$$\begin{array}{rcl} P^2 & = & (uu^*)(uu^*) \\ & = & u(u^* u)u \\ & = & uu^* = P. \end{array}$$

Ce qui montre que P est une matrice de projection.
2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et considérons la matrice $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par :

$$H = I - \alpha P : P = uu^T, \ \alpha > 0.$$

On va déterminer les $\alpha > 0$, tels que H soit une matrice orthogonale c'est à dire $HH^T = I$ $(H^T = H^{-1})$. Comme $P = P^T$ est symétrique alors H est symétrique, et on montre uniquement que $H^2 = I$. On a :

$$\begin{array}{rcl} H^2 & = & (I - \alpha P)^2 \\ & = & I - 2\alpha P + \alpha^2 P^2. \end{array}$$

Or $P = uu^T$, alors

$$H^2 = I - 2\alpha uu^T + \alpha^2 u^T u (uu^T).$$

Donc H est orthogonale que si :

$$\begin{array}{rcl} -2\alpha uu^T + \alpha^2 u^T u(uu^T) & = & 0 \\ & \Updownarrow & \\ -2\alpha + \alpha^2 u^T u & = & 0 \\ & \Updownarrow & \\ \alpha & = & \dfrac{2}{u^T u} > 0. \end{array}$$

Finalement, H prend de la forme suivante :

$$H = I - \frac{2}{u^T u} uu^T.$$

H s'appelle une matrice élémentaire (ou bien de Householder). Il est donc claire que $H^{-1} = H,$ et $\det H^2 = (\det H)^2 = \det I = 1 \Longrightarrow \det H = \pm 1.$ Déduisons maintenant $Sp(H)$. Pour $u \neq 0$, on a :

$$Hu = (u - \frac{2}{u^T u} uu^T u) = -u$$

ce qui implique que $\lambda = -1$, est une valeur propre de H et u son vecteur propre.
Maintenant, considérons le vecteur $v \neq 0$ tel que $u^T v = 0 (v \perp u)$, on a :

$$Hv = (v - \frac{2}{u^T u} uu^T v) = v.$$

Ceci montre que $\lambda = 1$, est aussi une valeur propore de H associe au vecteur propre v. Alors,

$$Sp(H) = \{-1, 1\}.$$

On déduit de $Sp(H)$ que $\det H = -1$ et $tr(H) = 0$.