

Solution de l'exo 6

11

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x=0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & ; x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[. \end{cases}$$

$$1/ D_f =]-1, +\infty[.$$

• Sur l'intervalle $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$: f est définie et continue comme une composition des fonctions continues... (1)

$$\bullet \text{ En } x_0 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{\text{e'hopi}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue en $x_0 = 0$... (2)

D'après (1) et (2) f est continue sur $]-1, +\infty[$.

2/ La dérivabilité de f en $x_0 = 0$, et calcul de $f'(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x) - x}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \stackrel{\text{e'hopi}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(1+x)2x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, et on a:

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)' & ; x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ -\frac{1}{2} & ; x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} & , x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ -\frac{1}{2} & ; x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} & , x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ -\frac{1}{2} & ; x=0 \end{cases}$$

Suite de l'exo 6 = (solution) [2]

3/ Soit $g(u) = \ln(1+u)$, En utilisant le théorème des accroissements finis, montrons que:

$$\forall u > 0, f(u) > \frac{1}{1+u}$$

$$\text{Soit: } g(u) = \ln(1+u) \Rightarrow g'(u) = \frac{1}{1+u}.$$

$\forall u \geq 0$. On a: g est continue sur $[0, u]$ et dérivable sur $]0, u[$.

$\Rightarrow$ Selon le théorème de a.f.:

$$\exists c \in]0, u[: g(u) - g(0) = (u - 0)g'(c).$$

$$\Leftrightarrow g(u) - g(0) = ug'(c).$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+u) = ug'(c).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+u)}{u} = g'(c) \Rightarrow f(u) = g'(c) = \frac{1}{1+c}.$$

$$\text{Alors: } f(u) = \frac{1}{1+c} \text{ et on a: } 0 < c < u$$

$$\Rightarrow 1 < 1+c < u+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+u} < \frac{1}{1+c} < 1$$

$$\text{Donc } f(u) = g'(c) = \frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+u}.$$

$$\text{D'où } f(u) > \frac{1}{1+u}.$$

Rapelle 1] classe C^n

f est définie sur un ouvert I .

1/ Si f est dérivable en tout point de I .

$\Rightarrow f'$ existe sur I et définie par: $x \mapsto f'(x)$.

• Si f' est continue $\Rightarrow f$ est continûment différentiable sur $I \Leftrightarrow f$ est de classe C^1 .

2/ Si f' est dérivable $\Rightarrow f''$ existe $\Leftrightarrow f$ est 2 fois dérivable

$\vdots$ Si f'' est continue $\Rightarrow f$ est de classe C^2 .

$\vdots$
n/ Si f est $C^n \Leftrightarrow f$ est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue

2] Théorème de Rolle: f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $\exists \theta: f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$.

3] Théorème des accroissements finis

f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
 $\Rightarrow \exists c \in]a, b[: f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

ou: $\forall h: a + h \in [a, b], \exists \theta: 0 < \theta < 1$.

$f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$.

$\Rightarrow$ Conséquences: f' existe et $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ croissant
 f' existe et $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ décroissant