

EX1) E un e.v.n, H un hyperplan de E et F un s.e.v de E .

- (i) Montrer que $F \cap H$ est un hyperplan de F .
(ii) E, F et G , 3 e.v.n, u et v , 2 applications linéaires continues. Montrer que si $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$, alors $v \circ u$ est continue et $\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$. Si $E \xrightarrow{u} E, \forall n \geq 1, \|u^n\| \leq \|u\|^n$.

EX2) H un espace de Hilbert, F un s.e.v fermé de H .

- (i) Montrer que : $x \in H, x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$; $\|p_F\| = 1$.
(ii) Résoudre l'équation : $X = X^\perp$ où $X \subseteq H$.
(iii) Montrer que $\forall A \subseteq H$ on a : $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$.

EX3) E, F et G , 3 e.v.n. $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(F, G)$, les e.v.n des applications linéaires et continues de E dans F et de F dans G . On définit sur $\mathcal{L}(F, G)$, la fonction N par : $u \in \mathcal{L}(F, G)$, $N(u) = \|u \circ v\|$ où $v \in \mathcal{L}(E, F)$. Trouver une condition suffisante sur v pour que N soit une norme sur $\mathcal{L}(F, G)$.

- Montrer que $\|\cdot\|$ est plus forte que N .

EX4) H un espace préhilbertien et $(x_i)_{i=1, n}$ une famille d'éléments de H à 2 orthogonaux dans H .

- Montrer que le système $(x_i)_{i=1, n}$ est linéairement indépendant.

EX5) H un Hilbert, F un s.e.v fermé de H .

1) Montrer que $\text{Ker } p = \{x \in H / p(x) = 0\} = F^\perp$ (p est le projecteur sur F).

2) Si G est s.e.v de H , montrer que G est dense dans H si,

$G^\perp = \{0\}$. 3) Montrer que : $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F : \|x - y\| \geq \|x\|$.

EX6) H un Hilbert, $u \in \mathcal{L}(H, H)$, F un s.e.v fermé tel que $u(F) \subseteq F$ (on dit que F est invariant par u).

- Montrer que $F^\perp$ est invariant par u^* .

- u conserve la norme si : $\forall x, y : \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

- Montrer que $\|u^*\| = \|u\|, (u \circ v)^* = v^* \circ u^*, (\bar{u}^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

- u unitaire $\Leftrightarrow u^* = \bar{u}^{-1} \Leftrightarrow \forall x \in H, \langle u(x), x \rangle \in \mathbb{R} (K = \mathbb{C})$.

- u unitaire $\Rightarrow \|u\| = 1$.

- u normal $\Leftrightarrow \forall x, y \in H : \langle u^*(x), u^*(y) \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$.

بالتوفيق