Département de mathématiques | 2020/2021
Faculté des Sciences | Analyse numérique 1
Université Ferhat Abbas-Sétif 1 | **Série d'exercices N° 2**

Exercice 1 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1. Déterminer le polynôme de Lagrange $p_2(x)$ qui interpole la fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.
2. Déterminer $p_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et évaluer le résultat.

Exercice 2 :

1. Montrer que l'équation $f(x) = x + \ln(x) = 0$ possède une seule racine ξ dans l'intervalle $[0.1,\ 1]$.
2. Déterminer le polynôme de Lagrange $P_2(x)$ qui interpole la fonction f aux points $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.7$.
3. Déduire une valeur approchée de ξ.

Exercice 3 :

Montrer que $\frac{f[x_i,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_j} = \frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$ $\forall\, i,\ j,\ k = 0,1,\dots,n$ et $i \neq j \neq k$.

Où $f[x_i, x_j]$ désigne la différence divisée d'ordre 1 de la fonction f en $x_i,\ x_j$.

Exercice 4 : On considère les fonctions $f,\ g,\ h,$ et k telles que : $f(x) = h(x)k(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

1. Montrer que $f[x_0,\ x_1] = h(x_0)k[x_0,\ x_1] + h[x_0,\ x_1]k(x_1)$
2. Déterminer la différence divisée d'ordre n pour la fonction g.

Exercice 5 :

On donne les notes d'examens d'un étudiant en 2ème année mathématiques, comme suit :

Examen : x	1	2	3	4
Note : $f(x)$	13	8	$\propto$	15

En utilisant une interpolation quadratique de Newton, déterminer la note maximale de l'examen 3 de cet étudiant.

Exercice 6 :

1. En utilisant une interpolation quadratique convenable, déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{47}$.
2. Est-il préférable d'utiliser une interpolation linéaire ?

Exercice 7 :

1. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$. En utilisant une interpolation de Newton aux points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ et $x_3 = 1$, donner une valeur approchée de $\sin(\frac{\pi}{10})$.
2. Évaluer le résultat.

Exercice 8 : Démontrer le théorème (théorème 2.3 du cours) suivant :

Soient $f \in C^{(n+1)}([a,b])$ et P_n le polynôme de degré n interpolant f en $x_i \in [a,b]$, $i = 0,1,\dots,n$, alors :

$$\forall x \in [a,b],\ \exists \xi \in [a,b] \text{ tel que : } \varepsilon(x) = f(x) - P_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$