

Rappel : d'interpolation

* Soit f une fonction définie en $(n+1)$ pts distincts $x_i, i=0:n$ tq $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Un polynôme $P(x)$ est dit polynôme d'interpolation de f aux pts $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ si $\begin{cases} \text{d}^\circ P \leq n \\ P(x_i) = f(x_i), \forall i=0,1,\dots,n \end{cases}$.

* Si les pts $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sont distincts, alors le polynôme d'interpolation de f aux pts x_i existe et unique. Pour construire ce polynôme on a 2 méthodes.

1) Méthode de Lagrange:

$P_n(x)$, le polynôme d'interpolation de Lagrange est:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

$$\text{où } l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$\text{tq d}^\circ l_i \leq n \text{ et } l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \forall i=0,1,\dots,n.$$

Inconvénient: les polynômes d'interpolation de Lagrange s'adaptent mal aux changements de pts, par exemple si on ajoute un pt aux $\{x_0, \dots, x_n\}$ on doit refaire tous les calculs.

2) Méthode de Newton:

le polynôme d'interpolation de Newton pour f est de la forme: $P_n(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \lambda_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$.

où λ_i est la différence divisée d'ordre i de f aux pts $x_0, x_1, \dots, x_i$ calculée comme suit:

$$\begin{cases}
 \lambda_0 = f[x_0] = f(x_0) \\
 \lambda_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
 \lambda_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
 \vdots \\
 \lambda_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}
 \end{cases}$$

Comme on peut calculer les D.D de f selon le Tab suivant

pts	DD d'ordre 0, D.D. 1	DD. 2	D.D. 3	...
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$			
x_2	$f(x_2)$			
x_3	$f(x_3)$			
$\vdots$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$			
x_n	$f(x_n)$			

Diagram illustrating the calculation of divided differences (D.D.) from the table above:

- $\lambda_0 = f(x_0)$
- $\lambda_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
- $\lambda_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1) - \lambda_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_0}$
- $\lambda_3 = \frac{f(x_3) - f(x_2) - \lambda_1(x_3 - x_1) - \lambda_2(x_3 - x_0)}{x_3 - x_0}$

3) d'erreur: On a, $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi \in [a, b]$

$$E(x) = |f(x) - P_n(x)| = |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}|$$

On a ξ est en général inconnu, alors on donne un majorant de l'erreur comme suit:

$$E(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} |(x - x_0) \dots (x - x_n)| \cdot \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

* Si f est connue, on calcule $M = \max_{[a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$, et

$$\text{on a } E(\bar{x}) \leq \frac{M}{(n+1)!} |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n)|$$

* Si f est inconnue, sauf aux pts x_i , on peut approcher l'erreur

$$E(\bar{x}) = |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n) \cdot f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}]|$$

Exo 1 Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.

On a P_2 existe et unique car les pts x_0, x_1 et x_2 sont distincts

x_i	0	1	3
$f(x_i)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

On a d'après Lagrange

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) l_i(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x) + f(x_2) \cdot l_2(x)$$

$$\text{où } l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \quad i = 0, 1, 2.$$

$$* l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 3)} \Rightarrow l_0(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$$

$$* l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 3)} \Rightarrow l_1(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x)$$

$$* l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(3 - 0)(3 - 1)} \Rightarrow l_2(x) = \frac{1}{6}(x^2 - x)$$

$$\text{Donc } P_2(x) = 1 \cdot l_0(x) + \frac{1}{2} l_1(x) + \frac{1}{10} l_2(x).$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{10}x^2 - \frac{6}{10}x + 1 = 0,1x^2 - 0,6x + 1$$

2) Déterminer $P_2(\frac{1}{2})$ et évaluer le résultat.

On a $\frac{1}{2} \in [x_0, x_2] = [0, 3]$.

$$P_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0,1\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0,6\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0,725$$

$$\text{D'autre part, on a } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0,8$$

Alors, l'erreur est :

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P_2\left(\frac{1}{2}\right) \right| = |0,8 - 0,725| \Rightarrow$$

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = 0,075 = 7,5 \times 10^{-2}$$

On remarque que l'erreur est petite, donc $P_2(\frac{1}{2})$ est une bonne approximation de $f(\frac{1}{2})$.

Exo 2: Soit $f(x) = x + \ln(x)$ / $x > 0$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine (solution) dans $[0,1,1]$

* On a :
$$\begin{cases} f(0,1) = 0,1 + \ln(0,1) \approx -2,2 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{cases}$$

On a $f(0,1) \cdot f(1) < 0$ et f continue sur $[0,1,1]$, alors, d'après le Th. des valeurs intermédiaires, f admet au moins une racine $\xi \in [0,1,1]$ (i.e $f(\xi) = 0$).

* Pour l'unicité de ξ on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in [0,1,1].$$

$\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[0,1,1]$

$\Rightarrow$ la racine ξ est unique

2) Déterminer le polynôme de Lagrange $P_2(x)$ qui interpole la fonction f aux pts $x_0 = 0,4$, $x_1 = 0,5$ et $x_2 = 0,7$

On a :

x_i	0,4	0,5	0,7
$f(x_i)$	-0,516291	-0,193147	0,343325

On a x_0, x_1 et x_2 sont distincts, alors P_2 existe et unique le polynôme d'interpolation de Lagrange est

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) l_i(x) = f(x_0) l_0(x) + f(x_1) l_1(x) + f(x_2) l_2(x)$$

où $l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^2 \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), i = 0, 1, 2.$

* $l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0,5)(x - 0,7)}{(0,4 - 0,5)(0,4 - 0,7)}$

$\Rightarrow l_0(x) = \frac{1}{0,03} (x^2 - 1,2x + 0,35)$

$$* l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0,4)(x-0,7)}{(0,5-0,4)(0,5-0,7)}$$

$$\Rightarrow l_1(x) = \frac{1}{0,02} (x^2 - 1,1x + 0,28)$$

$$* l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0,4)(x-0,5)}{(0,7-0,4)(0,7-0,5)}$$

$$\Rightarrow l_2(x) = \frac{1}{0,06} (x^2 - 0,9x + 0,2)$$

$$\text{Donc: } P_2(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) l_1(x) + f(x_2) l_2(x)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = -1,830267 x^2 + 4,878756 x - 2,17492$$

3) Déduire une valeur approchée de ξ
On a $f(\xi) = 0$ et $\xi \in [0,5, 0,7]$ (car $f(0,5) \cdot f(0,7) < 0$)

$\Rightarrow P(\xi) = 0$ (i.e ξ racine de $P(x) = 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (P(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$= 7,8795230 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2,807049$$

$P(x) = 0$, admet 2 solutions:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2,099640 \notin [0,5, 0,7]$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0,565956 \in [0,5, 0,7]$$

$$\text{Donc } \xi \approx x_2 = 0,565956$$

Exo 3: Montrer que:

$$\frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j} = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}, \quad \forall i, j, k = 0, \dots, n, \quad i \neq j \neq k.$$

où $f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$ (D.D. d'ordre 1 de f en x_i et x_j)

D'une part on a:

$$\begin{aligned} \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j} &= \frac{\frac{f(x_k) - f(x_i)}{x_k - x_i} - \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}}{x_k - x_j} \\ &= \frac{(x_j - x_i)(f(x_k) - f(x_i)) - (x_k - x_i)(f(x_j) - f(x_i))}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)(x_j - x_i)} \\ &= \frac{(x_j - x_i)f(x_k) - (x_k - x_i)f(x_j) + (x_k - x_j)f(x_i)}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)(x_j - x_i)} \quad \text{①} \end{aligned}$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i} &= \frac{\frac{f(x_k) - f(x_j)}{x_k - x_j} - \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}}{x_k - x_i} \\ &= \frac{(x_j - x_i)(f(x_k) - f(x_j)) - (x_k - x_j)(f(x_j) - f(x_i))}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)(x_j - x_i)} \\ &= \frac{(x_j - x_i)f(x_k) - (x_k - x_i)f(x_j) + (x_k - x_j)f(x_i)}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)(x_j - x_i)} \quad \text{②} \end{aligned}$$

① après ① et ② on remarque que

$$\frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j} = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

Finalement on a:

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j} = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

Exo 4

1) Soient les fonctions f, h et k définies aux pts distincts x_0 et x_1 tq $f(x) = h(x) \cdot k(x)$

Montrons que $f[x_0, x_1] = h(x_0)k[x_0, x_1] + h(x_1)k(x_0)$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{h(x_1)k(x_1) - h(x_0)k(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{h(x_1)k(x_1) + (h(x_0)k(x_1) - h(x_0)k(x_1)) - h(x_0)k(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{h(x_0)(k(x_1) - k(x_0))}{x_1 - x_0} + \frac{k(x_1)(h(x_1) - h(x_0))}{x_1 - x_0} \\ &= h(x_0)k[x_0, x_1] + k(x_1)h[x_0, x_1]. \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) Soit $g(x) = \frac{1}{x}$ définie en $(n+1)$ pts distincts $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
 Déterminons la D.D d'ordre n de g ie $g[x_0, x_1, \dots, x_n] = ?$
 Soit le tableau des différences divisées (D.D):

x_i	D.D.0 $g(x_i)$	D.D d'ordre 1	D.D d'ordre 2	...	D.D d'ordre n
x_0	$\frac{1}{x_0}$	$-\frac{1}{x_1 x_0}$	$\frac{1}{x_0 x_1 x_2}$		
x_1	$\frac{1}{x_1}$	$-\frac{1}{x_1 x_2}$			
x_2	$\frac{1}{x_2}$	$-\frac{1}{x_2 x_3}$			
x_3	$\frac{1}{x_3}$				
$\vdots$					
x_{n-1}	$\frac{1}{x_{n-1}}$	$-\frac{1}{x_{n-1} x_n}$	$\frac{1}{x_{n-2} x_{n-1} x_n}$		
x_n	$\frac{1}{x_n}$				$\frac{(-1)^n}{x_0 x_1 x_2 \dots x_n}$

$g[x_0, x_1, \dots, x_n]$

On montre par récurrence que

$$g[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \dots x_n} \quad \text{tq} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad g[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \dots x_n}.$$

* Pour $n=0$, on a :

$$g[x_0] = g(x_0) = \frac{(-1)^0}{x_0} = \frac{1}{x_0} \quad (\text{vraie}).$$

* On suppose que la propriété est vraie pour $n-1$

$$\text{i.e. } g[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \frac{(-1)^{n-1}}{x_0 x_1 \dots x_{n-1}}$$

et on montre que

$$g[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \dots x_n}.$$

$$\text{On a : } g[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{g[x_1, x_2, \dots, x_n] - g[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_n} - \frac{(-1)^{n-1}}{x_0 x_1 \dots x_{n-1}}}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} \cdot x_0 - (-1)^{n-1} \cdot x_n}{x_0 x_1 \dots x_{n-1} x_n \cdot (x_n - x_0)}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} (x_0 - x_n)}{x_0 x_1 \dots x_{n-1} x_n (x_n - x_0)} = -1.$$

$$= \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \dots x_{n-1} x_n}$$

Donc :

$$\text{Si } g(x) = \frac{1}{x}, \text{ alors } g[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \dots x_n}$$