

Exo 8: Soit La matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

A admet 3 colonnes donc A admet 3 sommets

S_i = Sommet d'ordre i . $i = 1, 2, 3$.

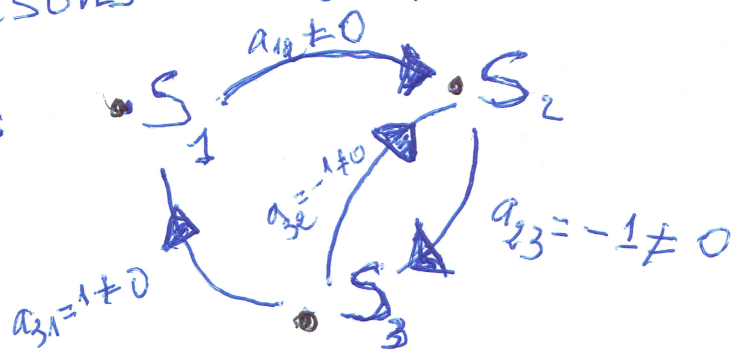
- Un arc (row) relie S_i à S_j si $a_{ij} \neq 0$.
- Un graphe est formé de l'ensemble des sommets et des arcs.

$$A = (a_{ij}) : 1 \leq i, j \leq 3.$$

- $a_{11} = 0 \Rightarrow S_1 \not\rightarrow S_1$ (S_1 ne relie pas S_1 car $a_{11} = 0$).
- $a_{12} \neq 0 \Rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ ($\exists$ arc de S_1 vers S_2 car $a_{12} = 1 \neq 0$).
- $a_{13} = 0 \Rightarrow S_1 \not\rightarrow S_3$ ($\nexists$ arc de $S_1 \rightarrow S_3$ car $a_{13} = 0$).
- $a_{21} = 0 \Rightarrow S_2 \not\rightarrow S_1$ ($\nexists$ arc de $S_2 \rightarrow S_1$ car $a_{21} = 0$).
- $a_{22} = 1 \neq 0 \Rightarrow S_2 \rightarrow S_2$ ($\exists$ arc $S_2 \rightarrow S_2$ car $a_{22} = 1 \neq 0$).
- $a_{23} = -1 \neq 0 \Rightarrow S_2 \rightarrow S_3$ ($\exists$ arc $S_2 \rightarrow S_3$ car $a_{23} = -1 \neq 0$).
- $a_{31} = 1 \neq 0 \Rightarrow S_3 \rightarrow S_1$ (S_3 relie S_1).
- $a_{32} = -1 \neq 0 \Rightarrow S_3 \rightarrow S_2$ (S_3 relie S_2).
- $a_{33} = 0 \Rightarrow S_3 \not\rightarrow S_3$.

En conclusion :
Construisons le graphe de A . (A admet 3 sommets).

On a :



Graphes de A .

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \Rightarrow A$ admet 3 sommets S_1, S_2, S_3 .

On a :

$$a_{11} = 1 \neq 0 \Rightarrow S_1 \rightarrow S_1$$

$$a_{12} = 2 \neq 0 \Rightarrow S_1 \rightarrow S_2$$

$$a_{13} = 3 \neq 0 \Rightarrow S_1 \rightarrow S_3$$

$$a_{21} = 0 \Rightarrow S_2 \nrightarrow S_1$$

$$a_{22} = 4 \neq 0 \Rightarrow S_2 \rightarrow S_2$$

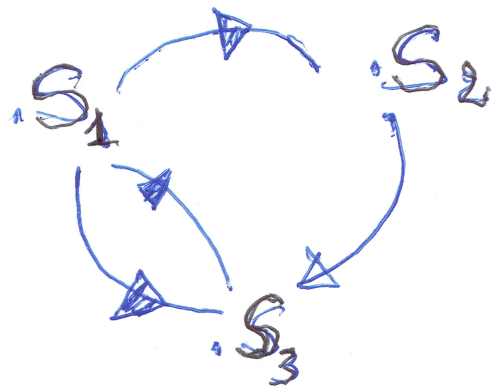
$$a_{23} = 5 \neq 0 \Rightarrow S_2 \rightarrow S_3$$

$$a_{31} = 1 \neq 0 \Rightarrow S_3 \rightarrow S_1$$

$$a_{32} = 0 \Rightarrow S_3 \nrightarrow S_2$$

$$a_{33} = 0 \Rightarrow S_3 \nrightarrow S_3$$

Le graphe de A est donné par:



"  " arc "

$\text{Gr}(A)$.

Pour $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, S_1, S_2, S_3, S_4 .

Donc B admet 4 sommets $S_i \rightarrow S_j \iff a_{ij} \neq 0$.

- $a_{11} = 0 \Rightarrow S_1 \not\rightarrow S_1$ (S_1 n'est pas lié à S_1).
- $a_{12} = 1 \neq 0 \Rightarrow S_1 \rightarrow S_2$
- $a_{22} = 2 \neq 0 \Rightarrow S_2 \rightarrow S_2$
- $a_{31} = 3 \neq 0 \Rightarrow S_3 \rightarrow S_1$
- $a_{32} = 2 \neq 0 \Rightarrow S_3 \rightarrow S_2$
- $a_{43} = 4 \neq 0 \Rightarrow S_4 \rightarrow S_3$

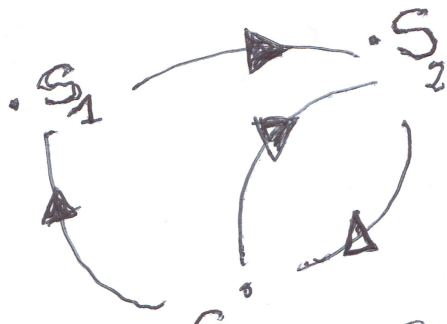
• Ensemble des voisins (مجموعة الجيران).

$$V(s_i) = \{ s_j, j \neq i, s_i s_j \text{ est en arc} \}.$$

; مثال

Ex :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On va que son graphe est donné par:



• $V(s_1)$ voisins s_3 de s_1 .
Comme $s_1 s_2$ est un arc alors:

$$V(s_1) = \{ s_2 \}.$$

• $V(s_2) = \{ s_3 : s_2 s_3 \text{ arc} \}.$

• $V(s_3) = \{ s_1, s_2 \}$ car $s_3 s_1$ et $s_3 s_2$ sont des arcs.

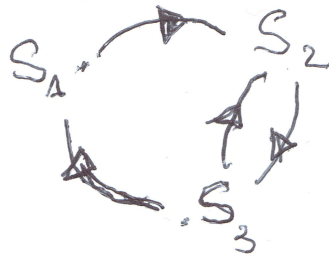
- Chemin $(\text{ })_{\text{Lus}}$.

Un chemin allant du sommet S_i au
sommet S_j s'il existe une suite d'arcs

telle que :

$(S_i, S_{i1}), (S_{i1}, S_{i2}), \dots, (S_{ip}, S_j)$ soient des
arcs du Graphe de A .

Voir l'exemple précédent :



$G(A)$

- (S_1, S_2) est un chemin par ce que $S_1 S_2$ est un arc.
- (S_1, S_3) est un chemin $(\text{ })_{\text{Lus}}$ car $S_1 S_2$ et $S_2 S_3$ sont des arcs.

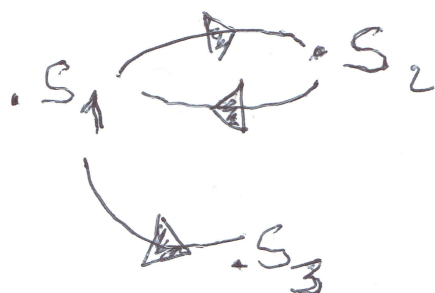
- (S_3, S_2) est un chemin car il $\exists$ un arc $S_3 S_2$.
- (S_2, S_1) n'existe pas un chemin car $S_2 S_1$ n'est pas un arc.

Théorème : Un graphe est fortement connexe
 s'il existe au moins un chemin allant
 de tout sommet S_i à tout sommet S_j .

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le graphe de A :



• A n'est pas fortement connexe car il
 n'existe aucun entre S_3 et S_2 .