Table des Matières

Introduction

Ce cours regroupe le contenue du module d'analyse 1 dans le programme de LMD. Il destiné aux étudiants de $1^{ère}$ année Mathématiques et Informatique. Il comporte six chapitres : les nombres réels, les nombres complexes, puis les suites. Les chapitres suivants sont consacrés aux fonctions : limite et continuité, dérivabilité, et les fonctions élémentaires.

En faisant recours aux différents ouvrages traitant les différents sujets abordés ici.

Chaque chapitre commence par un exposé clair des définitions, principes et théorèmes par de nombreux exemples. Ceci est suivi d'un ensemble gradué d'exercices avec solutions sont proposés aux lecteurs. Les exercices résolus développent la théorie et aident l'étudiant à contrôler l'acquis de ses connaissances.

Dans ce cours, j'ai essayé de simplifier au maximum le module d'analyse 1 pour les étudiants.

Chapitre 1

Fonctions dérivables

La notion de dérivée est une notion fondamentale en analyse. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction, de construire des tangentes à une courbe et de résoudre des problèmes d'optimisation. En physique, lorsqu'une grandeur est fonction du temps, la dérivée de cette grandeur donne la vitesse instantanée de variation de cette grandeur, et la dérivée seconde donne l'accélération.

1.1 Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 1.1.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in I$. On dit que f ***est dérivable en*** x_0 si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe, et est finie. Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0, on la note $f'(x_0)$. Bien sûr, il revient au même de regarder la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 1.1.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in I$.

(1) On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe, et est finie. Cette limite s'appelle la dérivée de f à gauche en x_0, on la note $f'_g(x_0)$.

(2) On définit de même la dérivée à droite, que l'on note $f'_d(x_0)$.

(3) f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point x_0. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la ***fonction dérivée*** de f , elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Proposition 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

(1) Soit $x_0 \in]a,b[$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

(2) f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a.

(3) f est dérivable en b si et seulement si f est dérivable à gauche en b.

Les notions de dérivée à droite et à gauche ne sont pas trés importantes. Elles permettent cependant de vérifier qu'une fonction est (ou n'est pas) dérivable en un point.
Exemple 1. La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.
En effet

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 2\,x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.
Exemple 2. Montrons que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ est $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$.

On doit calculer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.
On aboutit (logiquement) à une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on passe à la quantité conjuguée. On a :

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

On a donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Pour $x = 0$, il n'y a pas de limite. La fonction racine carrée est dérivable pour tout nombre x strictement positif et l'on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$. Elle n'est pas dérivable en 0.

Proposition 2. f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon(x) \to 0$ avec

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\ell + (x - x_0)\,\epsilon(x).$$

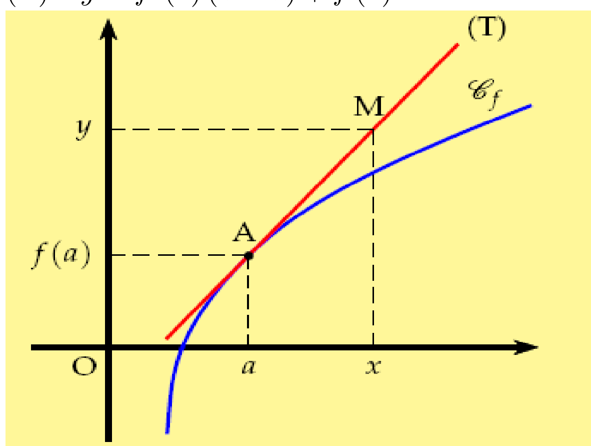
Démonstration. Il s'agit juste de reformuler la définition de $f'(x_0)$. Par exemple, après division par $x - x_0$, la deuxième écriture devient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell + \epsilon(x).$$

1.2 Interprétation géométrique de la dérivée

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$



- Si la fonction n'est pas dérivable en a, mais est dérivable à droite et/ou à gauche, on a des demi-tangentes. Quand il y a deux demi-tangentes, on dit que le point est anguleux.

Propriétés de la dérivation

Proposition 3.
Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Démonstration. Supposons f dérivable en x_0 et montrons qu'elle est aussi continue en ce point. Voici une démonstration concise : partant de l'écriture alternative donnée dans la proposition 2, nous écrivons

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}\ell + \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}\epsilon(x).$$

Donc $f(x) \longrightarrow f(x_0)$ lorsque $x \longrightarrow x_0$ et ainsi f est continue en x_0.

Remarque. La réciproque est fausse : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. En effet, $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$. Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 1.3.3. *Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:*

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$).

Démonstration. Prouvons par exemple $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$. Fixons $x_0 \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $f(x)g(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \\ &\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$. La fonction $f \times g$ est dérivable sur I de dérivée $f'g + fg'$.

Théorème 1.3.4. *(Dérivée des fonctions composées). Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$, et soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0)).$$

Théorème 1.3.5. *(Dérivation des fonctions réciproques). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors :*

(1) L'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I. La fonction f réalise une bijection entre I et J.

(2) La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue strictement monotone, de même sens de variations que f.

(3) Si f est dérivable en un point $x_0 \in I$, et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

Démonstration. (1) et (2) : c'est le théorème de la bijection.

(3) Supposons f dérivable en x_0. Soit $y_0 = f(x_0)$ et soit $y \in J$, on s'intéresse à la quantité

$$\frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Posons $x = f^{-1}(y)$, alors cette quantité s'écrit

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Comme f^{-1} est continue en y_0, nous avons :

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Par composition des limites, on en déduit que

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

d'où le résultat.

Signe de la dérivée, sens de variation

Théorème 1.3.6. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- Si la fonction dérivée f' est *nulle*, alors la fonction est *constante*.
- Si la fonction dérivée est *strictement positive* (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est *strictement croissante* sur I.
- Si la fonction dérivée est *strictement négative* (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est *strictement décroissante* sur I.

Dérivées successives

- Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Sa fonction dérivée f' s'appelle la fonction dérivée première (ou d'ordre 1) de f .
- Lorsque f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est notée f'' ; f'' est appelée dérivée seconde (ou dérivée d'ordre 2) de f.
- De manière récurrente, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la fonction dérivée $n-i\grave{e}me$ (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$, $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)} = f^{(n-1)\prime}$.
- Si la **dérivée n-ième** $f^{(n)}$ existe on dit que f est **n fois dérivable.**

Exemple 3. $f : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos(x)$ et ainsi de suite...

Remarque. Par convention $f^{(0)} = f$.

Théorème 1.3.7. *(Formule de Leibniz). Soient f et g deux fonctions dérivables n fois sur un intervalle ouvert I. Alors fg est dérivable n fois sur I et :*

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}.g^{(n-k)} \quad \left(où\ C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \in \mathbb{N}^* \right).$$

C'est-à-dire que : $(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)\,.g^{(n-k)}(x)$ pour tout $x \in I$.

- La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme de Newton et les coefficients que l'on obtient sont les mêmes.

Rappel: On a : $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, et

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n.$

Fonction de classe C^n, fonction de classe C^∞

Définition 1.3.8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est de classe C^n sur I pour signifier que sa dérivée $\boldsymbol{n-ieme}$ existe et est continue sur I.
- On dit que f est de classe C^∞ sur I pour signifier que sa dérivée $\boldsymbol{n-ieme}$ existe quel que soit l'entier n.
- Une fonction de classe C^1 est une fonction continue, dérivable et à dérivée continue.
- Une fonction de classe C^2 est une fonction deux fois dérivables et dont la dérivée seconde est continue.
- Les fonctions polynômes, les fractions rationnelles sur leur ensemble de définition, l'exponentielle et le logarithme népérien sont des fonctions de classe C^∞
- Une fonction continue est de classe C^0. Une fonction continue et dérivable, mais dont la dérivée n'est pas continue est de classe D^1.
- Pour tout entier n ou pour ∞, l'ensemble des fonctions de classe C^n (ou C^∞) est stable pour les opérations habituelles (addition, multiplication, puissance, division, composition).

Dérivée et extremum local

Proposition 4. (Maximum et minimum d'une fonction)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. On dit que :

1. la fonction f admet un *maximum* en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.

2. la fonction f admet un *minimum* en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

3. la fonction f admet un *extremum* en a si elle admet un maximum ou un minimum en a.

Proposition 5. (Maximum et minimum locaux)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. On dit que :

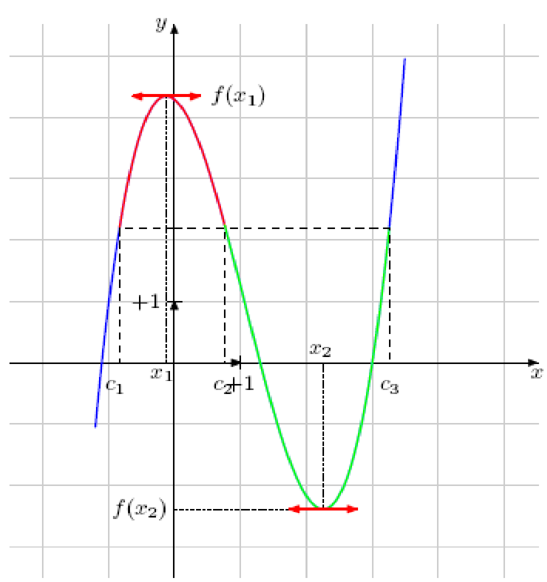
1. la fonction f admet un *maximum local* en a s'il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'intervalle $[a-\eta, a+\eta]$ soit inclus dans I et la restriction de f à cet intervalle admette un maximum en a, soit encore : il existe $\eta > 0$ tel que si pour tout $x \in I$, $|x - a \leq \eta\ |$alors $f(x) \leq f(a)$.

2. la fonction f admet un *minimum local* en a s'il existe un nombre $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - a\ | \leq \eta$ alors $f(x) \geq f(a)$.

3. la fonction f admet un *extremum local* en a si elle admet un maximum ou un minimum local en a.

Remarque. L'extremum locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si $f'(a) = 0$, a n'est pas nécessairement un extremum local (contre-exemple $f(x) = x^3$ en $a = 0$).

Exemple 4. f admet un **maximum local** en x_1 sur l'intervalle $[c_1, c_2]$ et un **minimum local** en x_2 sur $[c_2, c_3]$.



1.4 Théorèmes fondamentaux sur les dérivées

Théorème 1.4.9. (**Théorème de Fermat**). *Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I . Si f est dérivable en a et admet un extremum local en ce point alors $f'(c) = 0$.*

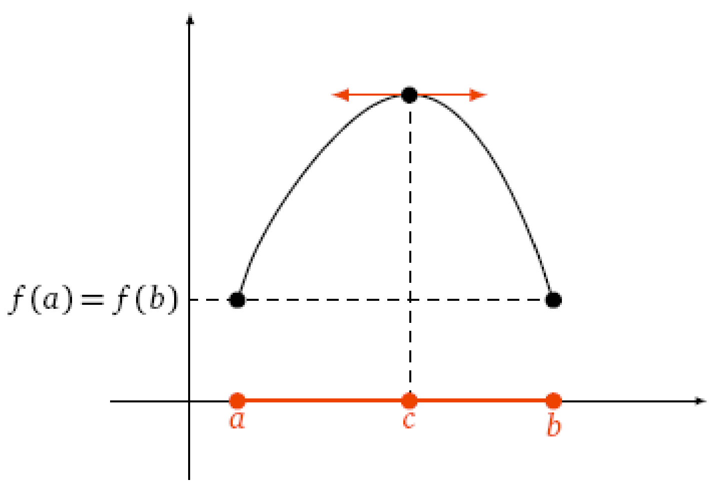
1. Attention cela ne marche dans le cadre général que si I est un ouvert (autrement on ne prend pas les bords de l'intervalle I en compte) !

2. La réciproque de cette proposition est fausse en général.

Théorème 1.4.10. (**Théorème de Rolle**). *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $[a,b]$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Démonstration. Tout d'abord, si f est constante sur $[a,b]$ alors n'importe quel $c \in]a,b[$convient.

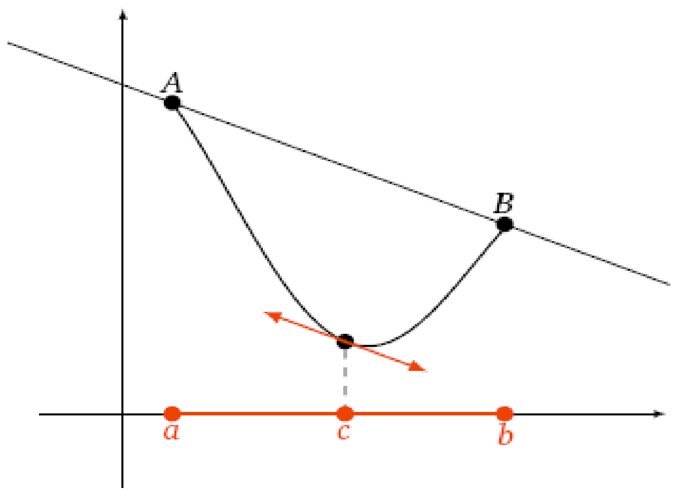
Sinon il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$.

Alors f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$, donc elle admet un maximum en un point $c \in]a,b[$.

Mais $f(c) > f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De même comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a,b[$. En c, f est donc dérivable et admet un maximum (local) donc $f'(c) = 0$.

Théorème 1.4.11. (**Théorème des accroissements finis**). *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$. *Il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite $((AB))$ où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Démonstration. Posons $\ell = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $g(x) = f(x) - \ell.(x - a)$. Alors

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(b - a) = f(a).$$

Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. Ce qui donne $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Corollaire 1.4.12. ***(Inégalité des accroissements finis)****.Soit f : $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors*

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|.$$

Démonstration. Fixons $x, y \in I$, il existe alors $c \in]x, y[$ ou $]y, x[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ et comme $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$.

Exemple 5. Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|\sin(x) - \sin y| \leq |x - y|$.

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient $|\sin(x)| \leq |x|$.

1.4.1 Formules de Taylor

Le théorème de Taylor-Young permet d'approcher des fonctions quelconques par des fonctions polynômiales et de "contrôler" le terme d'erreur.

Théorème 1.4.13. ***(formule de Taylor-Lagrange)*** *Soient $f \in C^{n+1}(I)$ et $a, b \in I$ avec $a < b$ et $[a, b] \subset I$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Remarque. Si $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis.
Démonstration. On définit A par l'égalité

$$f(b) - f(a) - (b-a) f'(a) - ... - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

Comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis, on introduit une fonction φ:

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x) f'(x) - ... - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

Comme $f \in C^{n+1}(I)$, on a $f^{(n)} \in C^1(I)$, donc $\varphi \in C^1(I)$. Le choix de A donne $\varphi(a) = 0$ et on a aussi $\varphi(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Calculons la dérivée deφ.

$$\begin{array}{c|c}
\text{termes de } \varphi & \text{dérivée} \\
 & \\
f(b) & 0 \\
-f(x) & -f'(x) \\
-(b-x)f'(x) & +f'(x) - (b-x)f''(x) \\
\vdots & \vdots \\
-\dfrac{(b-x)^p}{p!} f^{(p)}(x) & +\dfrac{(b-x)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x) - \dfrac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) \\
-\dfrac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x) & +\dfrac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) - \dfrac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(x) \\
\vdots & \vdots \\
-\dfrac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) & +\dfrac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \dfrac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \\
-\dfrac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A & +\dfrac{(b-x)^n}{n!} A
\end{array}$$

Dans la colonne de droite tous les termes sauf deux se simplifient, il reste

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x) \right).$$

Comme $c \neq b$, l'égalité $\varphi'(c) = 0$ donne $f^{(n+1)}(c) = A$. On a donc obtenu la formule de Taylor.

Application.

Prenons $f(x) = \cos x$. Alors f est dans $C^{\infty}(\mathbb{R})$, donc dans $\mathrm{C}^7(\mathbb{R})$.
Ecrivons la formule de Taylor au point $a = 0$ pour $n = 6$. On pose $b = x > 0$.
Les dérivées de f sont :

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= -\sin x = f^{(5)}(x), \\
f^{(2)}(x) &= -\cos x = f^{(6)}(x), \\
f^{(3)}(x) &= +\sin x = f^{(7)}(x), \\
f^{(4)}(x) &= +\cos x.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + f^{(7)}(c)\frac{x^7}{7!}.$$

Si on suppose que $x \in [0, \pi]$ on a $f^{(7)} = \sin t \geq 0$ pour tout $t \in [0, \pi]$. On en déduit que pour tout $x \in [0, \pi]$

$$\cos x \geq 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6.$$

Théorème 1.4.14. ***(formule de Taylor-Young)*** *Soient $f \in C^n(A)$ et $a \in A$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par*

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ... - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n).$$

Démonstration. On a $f \in C^n(A) = C^{(n-1)+1}(A)$. On peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ à f avec x à la place de b. On suppose ici que $x > a$.

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c),$$

avec $c \in]a, x[$. Ecrivons le dernier terme sous la forme

$$\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \left(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\frac{(x-a)^n}{n!} \left(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right) = o((x-a)^n)$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{x \to a} \left(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right) = 0.$$

Cela résulte de la continuité de $f^{(n)}$ au point a.

Application.

1. Pour $x_0 = 0$, on obtient la forme de Taylor d'ordre n de $f(x) = e^x$.

Fonction	$\mathscr{D}_f$	Dérivée	$\mathscr{D}'_f$
$f(x)=k$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n \quad n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n} \quad n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin x$	$\mathbb{R}$

Pour tout $k \in N$ on a $f^{(k)}(x) = e^x$, donc $f^{(k)}(0) = 1$. Donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right).$$

Dérivées des fonctions usuelles
Règle de l'Hospital

Corollaire 1.4.15. *(**Règle de l'Hospital**). Soient $f, g : I \to R$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que*

- $f\left(x_0\right) = g\left(x_0\right) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\}\ g'\left(x\right) \neq 0$.

$$\text{Si} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \ \text{ alors } \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Démonstration. On se sert du théorème des accroissements finis généralisé (que nous ne démontrons pas ici) : si f et g sont continues sur $[x, y]$, dérivables sur $]x, y[$, et si g' ne s'annule pas sur $]x, y[$, alors il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Appliquons ce théorème à la situation présente : étant donné $x \in]a, b[$, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Quand on fait tendre x vers a, le réel c_x tend également vers a. Sachant que $\lim\limits_{c \to a_+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ existe, on en déduit (par composition des limites) que

$$\lim_{c \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a_+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ce qu'on voulait.

- Cette règle permet de lever certaines indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$. Notons qu'on peut appliquer la recette plusieurs fois de suite !

Exemple 5. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0^+} : \frac{\sin x}{x^2 + 3x}$ qui est de la forme $\frac{0}{0}$.
En appliquant la règle de l'Hospital, il vient

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{2x + 3} = \frac{1}{3}.$$

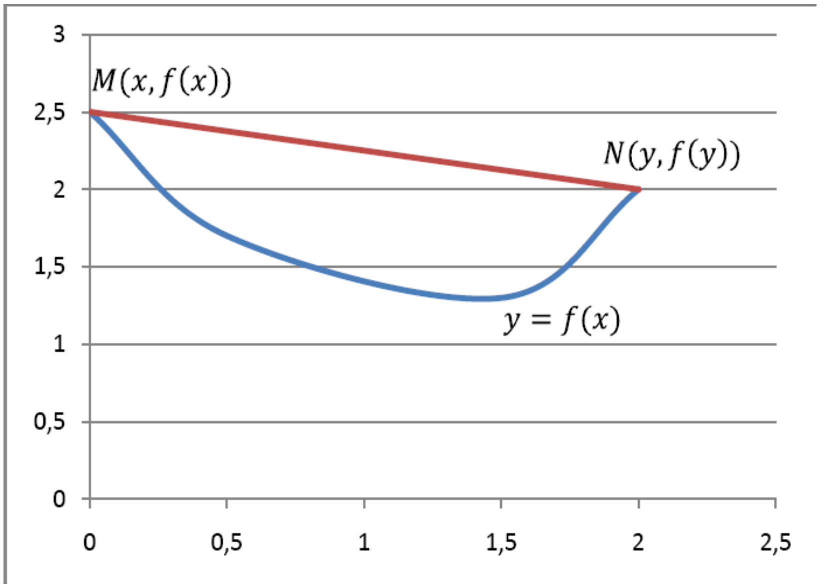
1.5 Fonctions convexes

Fonctions convexes, fonctions concaves

Définition 1.5.16. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que est convexe sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall t \in [0, 1],\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

On dit qu'une fonction $\boldsymbol{f}$ est **concave** si la fonction $-f$ est convexe.
Que signifie la définition ?
On a donc pour tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in [x, y]$.
De la même façon, $tf(x) + (1-t)f(y)$ est un point du segment $[f(x), f(y)]$ ou du segment $[f(y), f(x)]$.
L'image d'un point du segment $[x, y]$ est donc au-dessous du point correspondant sur le segment $[f(x), f(y)]$ ou le segment $[f(y), f(x)]$.
Ce qui signifie que le segment reliant les points de coordonnées $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$ est au-dessus de la courbe...



Fonctions convexes dérivables

Théorème 1.5.17. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. $\boldsymbol{f}$ est **convexe** sur I si et seulement si sa fonction **dérivée $\boldsymbol{f'}$** est une fonction **croissante** sur I.*

Interprétation géométrique. La courbe est au-dessus de toutes les tangentes

Théorème 1.5.18. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.*

- f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I.

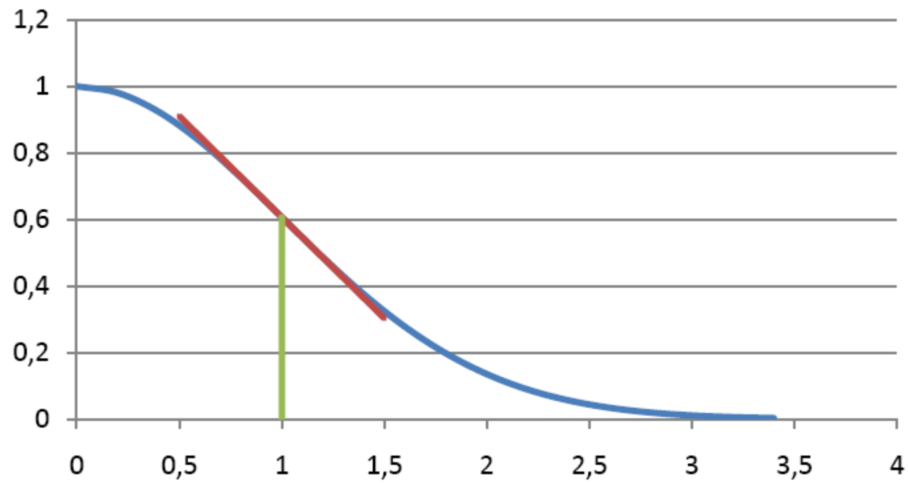
- f est concave sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est négative sur I.

Points d'inflexion pour une fonction

Définition 1.5.19. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On dit qu'un point de coordonnées $(c, f(c))$ avec $\boldsymbol{c} \in]a, b[$ est un **point d'inflexion** si la fonction f' admet un extremum local en c.

Si la fonction f est deux fois dérivable sur $]a, b[$ alors on a un point d'inflexion au point d'abscisse c si f'' s'annule en c en changeant de signe.

Interprétation géométrique. La tangente en c est donc d'un côté de la courbe avant c (côté qui correspond à la concavité dans cette partie) et de l'autre côté après c. En c, la tangente **traverse** la courbe.



1.5.1 Branches infinies (Asymptotes d'une courbe)

$a)$ Asymptotes horizontales et verticales.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x_0} f = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f = \pm\infty$ alors la droite d'´equation $x = x_0$ est une **asymptote** de la courbe représentative de f.
- Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = b \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote** de la courbe représentative de f.

$b)$ Cas où $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$.

Méthode générale :

- **étape 1 :** Vérifier que $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$.
- **étape 2 :** Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction (Ox). L'´etude de la branche infinie est alors terminée.

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction (Oy). L'étude de la branche infinie est alors terminée.

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ il faut passer à l'étape 3.

- **étape 3** : Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b\in\mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une **asymptote** de la courbe représentative de f.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$ alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$.

Exemple 6. Etudions la branche infinie en $+\infty$ de la fonction définie par

$$f(x)=\frac{xe^x+1}{e^x+1}.$$

- **étape 1 :** Vérifier que $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x(1+1/(xe^x))}{e^x(1+e^{-x})}=\lim_{x\to+\infty} x\times\frac{1+1/(xe^x)}{1+e^{-x}}=+\infty.$$

- **étape 2 :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

D'après les calculs précédents $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+1/(xe^x)}{1+e^{-x}}=1.$

- **étape 3** : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1\times x)$

On $(f(x)-x)=\dfrac{xe^x+1-x(e^x+1)}{e^x+1}=\dfrac{1-x}{e^x+1}=\dfrac{x(1/x-1)}{e^x(1+e^{-x})}=\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{1/x-1}{1+e^{-x}}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1\times x)=0.$

- Conclusion : La courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y=x$.

1.6 Exercices Corrigés

Exercice 1. Répondre par **oui** ou **non** aux questions avec des justifications rigoureuses :

(1) La fonction $x\mapsto -\dfrac{1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

(2) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle symétrique (et contenant zéro). Alors f paire$\Leftrightarrow$ f' impaire.

(3) Toute fonction continue est dérivable.

(4) Soit f une fonction dérivable. Si $f'(x)=0$, alors f est constante.

(5) Soit f et g deux fonctions dérivables au voisinage d'un point a. Alors :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell.$$

(6) Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Alors $f'(0) = 1' = 0$.
Réponses.

(1) **Faux !** La fonction donnée n'est ni croissante ni décroissante. Elle n'est pas croissante, car

$$1 > -2 \text{ mais, } f(1) = -\frac{1}{1} = -1 \not> f(-2) = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2},$$

Elle n'est pas décroissante, car

$$-1 > -2 \text{ mais, } f(-1) = -\frac{1}{-1} = 1 \not< f(-2) = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Le résultat qu'on connait est le suivant

$$f \text{ est strictement croissante sur } I \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) > 0, \quad \forall x \in I.$$

(pour une fonction dérivable, bien sûr) . Il est vrai si l'ensemble I est un <u>*intervalle*</u>. Dans notre cas on a bien $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ mais $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. Montrons ceci, mais d'abord rappelons la féfinition d'un intervalle.

Définition 1.6.20. On dit qu'un ensemble I est un intervalle (*ouvert*) si $\forall x, y \in I$, on a $]x, y[\subset I$.

Si $\mathbb{R}^*$ un intervalle, et puisque $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ alors normalement on aurait $]-1, 1[\subset \mathbb{R}^*$, ce qui impossible car $0 \in]-1, 1[$ mais $0 \notin \mathbb{R}^*$. Pour finir, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée est positive et $\mathbb{R}_+^*$ était un intervalle et elle est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ car sa dérivée est positive et $\mathbb{R}_-^*$ était un intervale. Mais elle n'est pas croissante sur la réunion $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^*$.

(2) **Vrai.** Montrons ceci. On considère $g(x) = f(x) - f(-x)$. Alors g est définie sur le même intervalle que f. On voit bien que $g(0) = 0$ et donc on a

$$\begin{aligned} f \text{ paire } &\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \Leftrightarrow g = 0 \Leftrightarrow g \text{ est constante} \Leftrightarrow g' = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(x) + f'(-x) = 0 \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f' \text{ impaire.} \end{aligned}$$

(3) **Faux !** Par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en ce point. Aussi $x \mapsto |x+1|$ est continue en -1 mais non dérivable en ce point (et il y une infinité d'exemples) . Mais la réciproque est vraie.

Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en x_0.
Cette propriété est souvent utilisée sous la forme de sa contraposée, i.e.
Si une fonction f n'est pas continue en un point x_0, alors ellen'est pas dérivable en ce point.

(4) **Faux !** Par exemple, soit

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 2, & x>0.\end{cases}$$

Alors f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=0$. Cependant, f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ (car elle n'a pas la même valeurs sur son domaine de définition). Comme dans la question 1), le résultat qu'on connait est le suivant :

$$f'(x)=0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ constante sur } I, \text{ (si } I \text{ est un intervalle)}.$$

(5) **Faux !** Soit $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ et $g(x)=\sin x$. Alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\sin x}=0\times 1=0,$$

alors que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x} \text{ n'existe pas.}$$

Ce qui est vrai est l'implication réciproque, i.e.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell,$$

(avec des hypothèses "La règle de L'Hospital").

(6) **Faux !** Tout d'abord f est continue en 0 (*pourquoi* ?) Pour trouver la dérivée de f en 0 on doit utiliser la définition d'une dérivée en un point. On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1=f'(0).$$

Donc $f'(0)\neq 0$. On fait toujours ça aux points où f change de valeurs. Mais, si on nous a demandé de donner $f'(2)$ (pour la même fonction), alors on dit : puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car elle vaut e^x laquelle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}^* : f'(x)=(e^x)'=e^x$.

D'où $f'(2)=e^2$ (et on fait ceci avec tous les points de $\mathbb{R}^*$).

Exercice 2. Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable en a. Trouver

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}.$$

Solution. On

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h} &= \frac{f(a+h^2)-f(a)+f(a)-f(a+h)}{h}\\ &= \frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}+\frac{f(a)-f(a+h)}{h}\\ &= h\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.\end{aligned}$$

Donc
$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+h^2\right)-f\left(a+h\right)}{h}=0\times f'\left(a\right)-f'\left(a\right)=-f'\left(a\right).$$

Exercice 3. En utilisant la définition de la dérivabilité, étudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point x_0
$$1)\ f\left(x\right)=\sqrt{x},\ x_0=0^+;\quad 2)\ f\left(x\right)=\left|x-1\right|,\ x_0=1;\quad 3)\ f\left(x\right)=x\left|x\right|,\ x_0=0.$$

Solution.
On a
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$
Donc f n'est pas dérivable en $x_0=0$ (à droite).
On a
$$\left|x-1\right|=\begin{cases}x-1, & x\geq 1\\ 1-x, & x<1.\end{cases}$$
On a donc
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-0}{x-1}=1,$$
et
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x-0}{x-1}=-1\neq 1=f'_d\left(1\right),$$
et donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$.

3) On a
$$x\left|x\right|=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ -x^2, & x<0.\end{cases}$$
On a donc
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x=0,$$
et
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-x\right)=0,$$
et donc f est dérivable en $x_0=0$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes (en utilisant la dérivabilité de fonctions) :
$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x},\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad 3)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}.$$

Solution. On va utiliser la définition de dérivabilité de quelques fonctions qui sont déjà connues d'être dérivables.

1) On a
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\left(\sin x\right)'\left(0\right)=\cos 0=1.$$

2) On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=(\ln(1+x))'(0)=\frac{1}{1+0}=1.$$

3) De même,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=(e^x)'(0)=e^0=1.$$

4) On a

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x-\sin\pi}{x-\pi}=\cos\pi=-1.$$

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0\\ ax^2+bx+c & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Déterminer a,b et c dans $\mathbb{R}$ tels que f soit C^2.
Solution.
f est C^2 sur $\mathbb{R}^-$, car $x\mapsto e^x$ est de C^∞, de même unpolynôme est de C^∞, donc f est C^2 sur $\mathbb{R}^+$.
Rest à étudier f en 0.
f doit être continue en 0
C'est le cas si

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)\,;\ \text{or}\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=c\ \text{ et }\lim_{x\to 0^-}f(x)=1.$$

Donc on doit avoir $\boxed{c=1}$.
f doit être dérivable sur $\mathbb{R}$
avec le même raisonnement que pour la continuité, il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi elle est dérivable en 0. C'est le cas si

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

$$\text{Or}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b\ \text{ et }\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=1.$$

Donc on doit avoir : $\boxed{b=1}$.
f doit être C^1 sur $\mathbb{R}$
C'est le cas si f' est continue sur $\mathbb{R}$; Or f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$: ainsi f' continue $\Leftrightarrow$ f' continue en 0.
C'est le cas si : $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)$.

$$\text{Or}\ \lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2ax+b)=b=1\ \text{et}\ \lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}e^x=1.$$

Donc f est C^1.

<u>f doit être C^2 en 0</u>
f est C^2 ssi f'' est continue sur $\mathbb{R}$, ce qui revient à prouver que f'' est continue en 0.
On a

$$\lim_{x\to0^+} f''(x) = \lim_{x\to0^+} 2a = a \text{ et } \lim_{x\to0^-} f''(x) = \lim_{x\to0^-} e^x = 1.$$

Donc on doit avoir : $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

<u>Conclusion :</u> Ainsi, pour que f soit C^2 sur $\mathbb{R}$, il faut avoir : $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une fonction g, prolongeant f par continuité, et étudier la dérivabilité de g.

Solution.

On a

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (1 - e^x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0.$$

La fonction f admet donc pour prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il est immédiat que g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.
De plus,

$$\lim_{x\to0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^-} \frac{1 - e^x}{x} = -1$$

et

$$\lim_{x\to0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x - 1}{x} . \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, la fonction g n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7. Peut-on appliquer le théorème de *Rolle* aux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = |x + 1|, \ x \in [-2, 0]; \\ h(x) &= \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in [-2, 2]; \quad k(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in [0, 2\pi] \ ? \end{aligned}$$

Solution.

1) Non, car f n'est pas continue en $x = 1$ (les autres conditions sont toutes satisfaites). De toute façon il n'existe aucun $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$ (car pour tout $x \in]0, 1[$: $f'(x) = 1 \neq 0$).

2) Non car f n'est pas dérivable en $-1 \in]-2,0[$.

3) Oui, car $h(2) = h(-2) = 0$, h est continue sur $[-2,2]$ et elle est dérivable sur $]-2,2[$,on remarque que h n'est pas dérivable en 2 et -2 mais ce n'est pas un problème car la fonction considérée dans le théorème de Rolle doit être continue sur un intervalle fermé et borné et dérivable sur l'intervalle ouvert. On peut trouver le c explicitement dans ce cas. On a pour tout $x \in]-2,2[$, $h'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ et le c est 0.

4) On admet que k est bien continue et dérivable sur $[0,2\pi]$ et que les notions de bases sur ce type de fonctions sont connus.

On a aussi $k(0) = k(2\pi) = 1$. Donc les hypothèses du théoréème de Rolle sont satisfaites et normalement il existe un $c \in]0,2\pi[$ tel que $k'(c) = 0$, mais si on calcule la dérivée de k, on trouve $k'(x) = -\sin x + i\cos x$. D'ou

$$\left|k'(x)\right| = |-\sin x + i\cos x| = 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ceci veut dire que le théorème de Rolle ne s'applique pas dans le cas d'une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8. Montrer que

1) $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \ \ \forall x > -1.$

2) $e^x \geq 1 + x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$

3) $\sin x \leq x$, $\forall x \geq 0$.

4) $\cos x \geq 1 - x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solution.

1) On traite deux cas $-1 < x < 0$ et $x \geq 0$.

(a) Soit $x \geq 0$. Soit la fonction f définie sur $[0,x]$ par $f(x) = \ln(1+t)$. Alors f est continue sur $[0,x]$ et est dérivable sur $]0,x[$. Par le théorème des accroissements finis $(T.A.F)$.

$$\exists c \in]0,x[\ : \ \ln(1+x) = f(x) - f(0) = (x-0)\, f'(c) = x\frac{1}{1+c}.$$

D'autre part,

$$0 < c < x \Rightarrow 1 < c+1 < x+1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{c+1} < 1.$$

Puisque $x \geq 0$, alors

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{c+1} < x$$

et donc pour tout $x \geq 0$, on a

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

(b) Soit $x < 0$. On considère la même fonction f mais sur l'intervalle $[x, 0]$. Il existe un $c \in]x, 0[$ tel que

$$f(0) - f(x) = (0 - x) f'(c) \Rightarrow \ln(1 + x) = x f'(c) = \frac{x}{1 + c}.$$

car $f(0) = 0$.

On a $x < c < 0$, et donc $1 < \dfrac{1}{c+1} < \dfrac{1}{1+x}$, mai x est négatif et donc

$$\frac{x}{1 + x} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

Ainsi, on a montré notre inégalité pour tout $x > -1$ (avec égalité si et seulement si $x = 0$).

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité est triviale pour $x \leq -1$. Si $x > -1$ et donc $1 + x > 0$, alors

$$e^x \geq 1 + x \Leftrightarrow \ln(e^x) = x \geq \ln(1 + x),$$

et on a déjà montré cette inégalité dans la question précédente.

3) Soit $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto \sin t$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Donc par le T.A.F. on a

$$\exists c \in]0, x[\ : \ \sin x = f(x) - f(0) = x f'(c) = x \cos c$$

car $f(0) = 0$. De plus,

$$\cos c \leq 1 \text{ et donc } x \cos c \leq x \cos x \geq 0.$$

Ainsi pour tout $x \geq 0$, on a $\sin x \leq x$.

4) Soit $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto \cos t$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Donc par le T.A.F. on a

$$\exists c \in]0, x[\ : \ \cos x - \cos 0 = (x - 0)(-\sin c)$$

ou bien

$$\exists c \in]0, x[\ : \ \cos x - 1 = -x \sin c.$$

Puisque c est positif, alors d'après la question précédente, $\sin c \leq c$ et donc $\sin c < x$ (*car* $c < x$) ou encore $-\sin c > -x$, mais $x \geq 0$ et donc $-x \sin c \geq -x^2$. Donc, on a montré que

$$\forall x \geq 0 : \ \cos x - 1 \geq -x^2, \text{ i.e; } \forall x \geq 0 : \ \cos x \geq 1 - x^2.$$

Puisque les deux membres de l'inégalité précédente sont des fonctions paires, alors l'inégalité est aussi vraie pour $x \leq 0$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \cos x \geq 1 - x^2.$$

Exercice 9.

(1) En utilisant le théorème des valeurs intermédiares, montrer que l'équation $xe^{\sin x} = \cos x$ admet au moins une solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(2) Par le théorème de Rolle, montrer que cette solution est unique.

Solution.

(1) Soit la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x) = xe^{\sin x} - \cos x$$

Alors f est bien continue car c'est la somme, le produit et la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

D'autre part, on a

$$f(0) = -1 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}e. \text{ D'où } f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}e < 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiares, l'équation $xe^{\sin x} = \cos x$ admet au moins une solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(2) Supposons que notre équation admet deux solutions a et b, donc on aura $f(a) = f(b) = 0$, où $a, b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue et dérivable sur $]a, b[$. Puisque $f(a) = f(b)$, alors d'après le théorème de Rolle, il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. mais

$$f'(x) = e^{\sin x} + x(\cos x)e^{\sin x} + \sin x > 0$$

car tous les termes sont strictement positifs car $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. D'où $f'(x) \neq 0$. Ceci contredit le théorème de Rolle et donc il existe une et une seul solution de l'équation $f(x) = 0$.

Remarque. Puisque $f'(x) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seul solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 10.

En utilisant la règle de L'Hospital (lorsque ceci est possible), calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x}, \quad 2) \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad 3) \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p},\ p \in \mathbb{N},$$

$$4) \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}, \quad 5) \lim_{x \to 0} \frac{\sin(px)}{\sin(qx)},\ q \neq 0, \quad 6) \lim_{x \to +\infty} x\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right)$$

Solution.

(1) Non, on ne peut pasappliquer la règle de L'Hospital dans ce cas car nous n'avons pas une des formes indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

La limite est facile à calculer, elle est égale à 0.

(2) C'est la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Les fonctions sont dérivables et donc peut appliquer la règle de L'Hospital. On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}.$$

C'est encors la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On applique encore une fois a règle de L'Hospital, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

(3) C'est la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Si on dérive le nominateur une fois et le dénominateur une fois, ça va aussi nous donner la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On fait la même chose une deuxième fois, on obtient la même chose. On fait ce travail p fois et on trouvera à la fin

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty.$$

(4) Puisque $\lim_{x\to+\infty}(x-\sin x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(2x+\sin x)=+\infty$, alors la limite considérée est la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On applique encore une fois a règle de L'Hospital une fois, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(2x+\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{2+\cos x},$$

on ne continue pas ! car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{2+\cos x}$ n'existe pas. Donc on ne peut pas appliquer la règle de L'Hospital. Pour calculer cette limite , on peut, cependant la calculer facilement comme suit :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}.$$

(5) Soit p un réel et q un réel non-nul. On a

$$5)\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(px))'}{(\sin(qx))'}=5)\lim_{x\to 0}\frac{p\cos(px)}{q\cos(qx)}=\frac{p}{q}.$$

D'où

$$5)\lim_{x\to 0}\frac{\sin(px)}{\sin(qx)}=\frac{p}{q}.$$

(6) En posant $y = \dfrac{1}{x}$, alors $x \to +\infty \Leftrightarrow y \to 0^+$ et on aura

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{(1+y)^{1/y} - e}{y},$$

mais

$$\left((1+y)^{1/y} - e\right)' = \left(e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)} - e\right)' = \left(-\frac{1}{y^2}\ln(1+y) + \frac{1}{y(y+1)}\right)e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)} + 0.$$

et

$$\lim_{y\to 0^+}\left(-\frac{1}{y^2}\ln(1+y) + \frac{1}{y(y+1)}\right) = \lim_{y\to 0^+}\frac{-(y+1)\ln(1+y)+y}{y^2(y+1)} = -\frac{1}{2}$$

On applique encore une fois a règle de L'Hospital deux fois. Puisque

$$\frac{1}{y}\ln(1+y) \to 1 \;\; \text{lorsque } y \to 0, \;\text{alors}$$

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{(1+y)^{1/y} - e}{y} = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right).$$

Exercice 11. Calculer la dérivée de la fonction inverse des fonctions suivantes au point y_0 indiqué

$$1)\; f(x) = x^2, \quad y_0 = 4; \qquad 2)\; f(x) = \ln x, \quad y_0 = 2.$$

Solution.

(1) f est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$ car elle est strictement croissante et continue sur cet intervalle.

On a $f^{-1}(4) = x$ nous donne $f(x) = x^2 = 4$ et donc $x = 2$ car $x > 0$.

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0 = 4) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(4)\right)} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{(2)(2)} = \frac{1}{4}.$$

Maintenant pour vérifier nos calculs, on sait que la fonction réciproque de f est $x \mapsto \sqrt{x}$ qui a pour dérivée $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et au point 4 elle vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

(2) f est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$ car elle est strictement croissante et continue sur cet intervalle. On a $f^{-1}(2) = x$ nous donne $\ln x = 2$ et donc $x = e^2$.

D'autre part

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0=2)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}=\frac{1}{f'\left(e^2\right)}=\frac{1}{\frac{1}{e^2}}=e^2.$$

Maintenant pour vérifier nos calculs, on sait que la fonction réciproque de f est $x\mapsto e^x$ qui a pour dérivée e^x, et au point 2 elle vaut $e^2=e^2$.

Exercice 12. Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$. Donner un intervalle sur lequel elle admet une fonction réciproque f^{-1}. Exprimer $D_{f^{-1}}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'$.

Solution. On peut définir f, par exemple, sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Sur cet intervalle f est continue et strictement croissante. Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)=[1,+\infty[$ et prenant ses valeurs dans $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

La fonction f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et

$$\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\ :\ f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}.$$

On voit bien que f' s'annule pour $x=\frac{\pi}{2}$. Donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)=[1,+\infty[$. Donc pour $x>1$, on a (en posant $y=f^{-1}(x)$)

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{-\sin^2(y)}{\cos(y)}.$$

Mais $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(y)=x=\dfrac{1}{\sin y}$. Donc

$$\sin y=\frac{1}{x}\Rightarrow\sin^2(y)=\frac{1}{x^2}\quad\text{et}\quad\cos^2(y)=1-\sin^2 y=1-\frac{1}{x^2},$$

mais puisque $y=f^{-1}(x)\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$, alors $\cos y<0$ et donc $\cos y=-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Exercice 13. Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

1) Quel est le domaine de définition de f.

2) Montrer que la restriction de f à $[0,+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1}, exprimer f^{-1}.

3) Déterminer la dérivée de f^{-1}.

Solution.

1) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ est définie$\Leftrightarrow x^2+x+1\geq 0,$

$$\begin{aligned}\Delta &= (1)^2-4\times1\times1=1-4=-3\\ &\Rightarrow \text{ signe de } \left(x^2+x+1\right)=\text{signe de } (1)\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ x^2+x+1>0\\ &\Rightarrow D=\mathbb{R}=\left]-\infty,+\infty\right[.\end{aligned}$$

2) f est continue sur $\mathbb{R}\Rightarrow f$ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\Rightarrow \forall x\in[0,+\infty[\ \Rightarrow x\geq 0\\ &\Rightarrow 2x\geq 0\Rightarrow 2x+1\geq 1>0\Rightarrow f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}>0\\ \text{d'où } \forall x &\in [0,+\infty[;\ f'(x)>0.\end{aligned}$$

Alors f est strictement monotone sur $[0,+\infty[\ \Rightarrow f$ est bijective sur $[0,+\infty[$
$\Rightarrow \exists! f^{-1}:\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[\to[0,+\infty[;$
On a :

$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)$
$f(0)=\sqrt{0^2+0+1}=\sqrt{1}=1$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\vdots$	$+$	$\Vert$
$f(x)$	$\vdots$		$+\infty$
	$\vdots$	$\nearrow$	$\Vert$
	1		$\Vert$

$$\begin{aligned}x &= f(y)\Longleftrightarrow x=\sqrt{y^2+y+1}\Leftrightarrow x^2=y^2+y+1\\ &\Longleftrightarrow y^2+y+1-x^2=0\\ \Delta &= (1)^2-4\times1\times\left(1-x^2\right)=1-4+4x^2=-3+4x^2,\\ \forall x &\in [1,+\infty[;\ x\geq1\Rightarrow x^2\geq1\Rightarrow 4x^2\geq4\Rightarrow 4x^2-3\geq 4-3=1>0\\ &\Rightarrow y=y_1=\frac{-1-\sqrt{4x^2-3}}{2}\quad\text{ou}\quad y=y_2=\frac{-1+\sqrt{4x^2-3}}{2}\\ y_1 &< 0\Rightarrow f^{-1}\neq y_1\\ 4x^2-3 &\geq 1\Rightarrow\sqrt{4x^2-3}\geq1\Rightarrow\sqrt{4x^2-3}-1\geq0\Rightarrow y_2\geq0\\ &\Rightarrow \forall x\in[1,+\infty[;\ \mathbf{f}^{-1}(x)=y_2(x)=\frac{-1+\sqrt{4x^2-3}}{2}.\end{aligned}$$

3) f^{-1} dérivable sur $[1,+\infty[.$

<u>première methode:</u>

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}(x)\right)' &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\frac{2f^{-1}(x)+1}{2\sqrt{\left(f^{-1}(x)\right)^2+f^{-1}(x)+1}}} = \frac{2\sqrt{\left(f^{-1}(x)\right)^2+f^{-1}(x)+1}}{2f^{-1}(x)+1} \\
&= \frac{2\sqrt{\frac{1+4x^2-3-2\sqrt{4x^2-3}}{4}+\frac{-1+\sqrt{4x^2-3}}{2}+1}}{-1+\sqrt{4x^2-3}+1} \\
&= \frac{2\sqrt{\frac{4x^2-2}{4}-\frac{2}{4}+1}}{\sqrt{4x^2-3}} = \frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{4x^2-3}} = \frac{2|x|}{\sqrt{4x^2-3}} = \frac{2x}{\sqrt{4x^2-3}}.
\end{aligned}$$

<u>deuxième méthode:</u>

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}(x)\right)' &= (y_2(x))' = \left(\frac{-1+\sqrt{4x^2-3}}{2}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}}\right) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2-3}}.
\end{aligned}$$