Université Ferhat Abbas Sétif 1
Faculté des sciences
Département deTronc Commun MI
Janvier 2021

Série d'exercices N°3 d'Analyse1

Exercice 1: Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}},\quad 2)\ f(x)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right),\quad 3)\ f(x)=\sqrt{\cos 2x},$$
$$4)\ f(x) = x^x,\quad 5)\ f(x)=\frac{1}{1-[x]}.$$

Où [ ] désigne la partie entière de x.

Exercice 2:

a) Calculer les limites suivantes

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+80},\quad 2)\ \lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right),\quad 3)\ \lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right],$$
$$4)\ \lim_{x\to 0}x^3\ln\left(\sqrt[3]{1+2/x^3}\right),\quad 5)\ \lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x\right).$$

b) Calculer les limites suivantes en utilisant les fonctions équivalentes :

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x},\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{2-\cos x-\cos 2x}{\tan^2 x},\quad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{\sin 5\pi x},$$
$$4)^*\ \lim_{x\to 0^+}\ln x.\ln\left[1+\ln(1+x)\right].$$

Exercice 3: Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

1) Quel est le domaine de définition de f ? Etudier sa patité.

2) Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice 4: Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x)=\begin{cases} x^2-3x, & x\in\,]-\infty,2[\\ 2x+b, & x\in[2,+\infty[\end{cases}$$

Déterminer le nombre réel b de sorte que h soit continue en 2.

Exercice 5: Etudier dans chacun des cas suivants si la fonction f est prolongeable par continuité

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, 2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, 3) $f(x) = \dfrac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{1-\cos x}$ $(\alpha \in \mathbb{R}\ ; \alpha \geq 2;\ x \in [-\pi, \pi])$.

Exercice 6. Montrer que l'équation

$$1 + \sin x - x^2 = 0$$

admet au moins une racine entre 0 et π.
Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles telle que $f(1) = f(-1)$.
Montrer qu'il existe un nombre $c \in \,]0, 1[$ tel que $f(c) = f(c-1)$.
Exercice 8. Soit la fonction f définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

a) Montrer directement que f est strictement monotone.

b) En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Rappel: limites usuelles

$$\begin{array}{llll}
1)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1, & 2)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}, & \\
3)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1, & 4)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, & \\
5)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0, & 6)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty, & \\
7)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{shx}{x} = 1, & 8)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x} = 1. & 9)\ \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.
\end{array}$$

Les limites usuelles en 0, nous donnent les équivalents suivants au voisinage de 0 :

$\bullet \sin x \sim x$ $\bullet \tan x \sim x$ $\bullet\ 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ $\bullet \ln(1+x) \sim x$

$\bullet\ [e^x - 1] \sim x$ $\bullet\ (1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$ $\bullet\ shx \sim x.$