Université Ferhat Abbas Sétif1
Faculté des sciences
Tronc Commun MI
Décembre 2020

Série d'exercices N 2 d'Analyse 1

Exercice 1:

En utilisant la définition de la limite montrer que:

$$1) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0,\ 2) \lim_{n\to+\infty} 2^{n^{\frac{1}{2}}} = +\infty$$

Exercice 2:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

1)Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 2$

2)Monter que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.

˜ 3)En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3:

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}, v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

Monter que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes

Exercice 4:

Utiliser le critère de Cauchy pour étudier la nature des suites de terme général

$$1)u_n = \frac{1}{\cos n}$$

$$2)v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

Exercice 5:

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1)Montrer que (u_n) ne converge pas et que cette suite est bornée.

˜ 2)peut-on extraire une sous suite convergente?

Corrige type

Exercice 1:

Rappel:

Soient (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$.Alors on a:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : (n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : (n > N \Rightarrow u_n > A)$$

1) On a:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : \left(n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{2n-1} - 0\right| < \varepsilon\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$.On a(on peut supposer dès le début que $N \geq 1$ et

donc $n \geq 1$ et donc $2n - 1 > 0$

$$\left|\frac{1}{2n-1} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon} < n$$

Il suffit donc de choisir

$$N = max\left(\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1, 1\right) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$$

2) On a:

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n^{\frac{1}{2}}} = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : (n > N \Rightarrow 2^{n^{\frac{1}{2}}} > A)$$

Soit $A > 0$. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n : n > N \Rightarrow 2^{n^{\frac{1}{2}}} > A$

Soit $n \in \mathbb{N}$ .On a:

$$2^{n^{\frac{1}{2}}} > A \Leftrightarrow \ln\left(2^{n^{\frac{1}{2}}}\right) > \ln A \Leftrightarrow n^{\frac{1}{2}} \ln 2 > \ln A \Leftrightarrow n^{\frac{1}{2}} > \frac{\ln A}{\ln 2} \Leftrightarrow n > \left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right)^2$$

Il suffit de prendre $N = \left[\left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right)^2\right] + 1 \in \mathbb{N}$(où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α)

Parce que $N = \left[\left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right)^2\right] + 1 > \left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right)^2$, donc $\forall n : n > N \Rightarrow n > \left(\frac{\ln A}{\ln 2}\right)^2 \Rightarrow$
$2^{n^{\frac{1}{2}}} > A$

Exercice 2:

Rappel:
On a les résultats suivants:

* Toute suite croissante et majorée est convergente

* Toute suite décroissante et minorée est convergente

* Toute suite monotone et bornée est convergente

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 2$ (par réccurence)

$$u_0 = \frac{3}{2} \in]1, 2[$$

Montrons que $(1 < u_n < 2)$ entraine $(1 < u_{n+1} < 2)$ est vraie

$$1 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (u_n - 1)^2 < 1 \Rightarrow 1 < (u_n - 1)^2 + 1 < 2 \Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2$$

C'est bien le cas donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
2.

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$$

D'après la première question $u_n - 1 > 0$ et $u_n - 2 < 0$ donc $(u_n - 1)(u_n - 2) < 0$,

la suite est donc strictement décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers

$l \in \mathbb{R}.l$ vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left((u_n - 1)^2 + 1 \right) \Leftrightarrow l = (l - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow (l - 1)(l - 2) = 0$$

Or:$u_0 = \frac{3}{2}$et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $l = 1$

Exercice 3:

Rappel:
Deux suites sont dites **adjacentes** si l'une est croissante et l'autre est décroissante

et la limite de leur différence tend vers 0

Autrement dit; si les deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant:

"(u_n) est croissante,(v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$"

Alors on dit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

---

*)**La monotonie de** (u_n) :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!},v_n=u_n+\frac{1}{n.n!}$$

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+........\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)-\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+........+\frac{1}{n!}\right)=\frac{1}{(n+1)!}>0$$

Donc (u_n) est strictement croissante

*)**La monotonie de** (v_n) :

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= (u_{n+1}-u_n)+\left(\frac{1}{(n+1).(n+1)!}-\frac{1}{n.n!}\right)\\ &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{n-(n+1)^2}{n(n+1).(n+1)!}=\frac{-1}{n(n+1).(n+1)!}<0\end{aligned}$$

Donc (v_n) est strictement décroissante

$$*)\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n.n!}=0$$

Donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes

Exercice 4:

Rappel:

Soit(u_n) une suite numérique réelle

$*(u_n)$ est une suite de Cauchy $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : p > N$ et $q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

$*$Ona: (u_n) est convergente $\Leftrightarrow (u_n)$ est une suite de Cauchy $\begin{cases} \Rightarrow \text{vraie toujours} \\ \Leftarrow \text{vraie pour les suites réelles} \end{cases}$

$*\,(u_n)$ n'est pas une suite de Cauchy $\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N} : p > N$ et $q > N$ et $|u_p - u_q| \geq \varepsilon$

---

1)On a:

$$|u_q - u_p| = \left|\cos\frac{1}{q} - \cos\frac{1}{p}\right| = \left|-2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right|$$

Mais on a:

$$sinx \leq |x|\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \left|\cos\frac{1}{q} - \cos\frac{1}{p}\right| &\leq \left|2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right| = \left|\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2q^2}\right| \\ \left|\cos\frac{1}{q} - \cos\frac{1}{p}\right| &\leq \left|\frac{1}{2p^2}\right| + \left|-\frac{1}{2q^2}\right| \text{(Inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

On a:

$$q \geq p \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n_0}$$

Donc:

$$\left|\cos\frac{1}{q} - \cos\frac{1}{p}\right| \leq \frac{1}{2n_0^2} + \frac{1}{2n_0^2} = \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon$$

Donc:

$$\frac{1}{n_0^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n_0^2 \Rightarrow n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

On prend:

$$n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy, elle est donc convergente

*)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)=\cos\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)=\cos 0=1$$

2)On a:

$$\begin{aligned}|v_{2n}-v_n| &= \left|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+......+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{n}\right)\right| \\ |v_{2n}-v_n| &= \frac{1}{n+1}+......+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

On a:

$$n+1<2n, n+2<2n, ..., 2n<2n$$

Donc:

$$\frac{1}{n+1}+......+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+......+\frac{1}{2n}>n.\frac{1}{2n}$$

$|v_{2n}-v_n|>n.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$,donc quel que soit N,

il existe $\varepsilon=\frac{1}{2}, p=n>N, q=2n>N$,tel que$|v_q-v_p|>\varepsilon$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy, elle est donc divergente

<u>Exercice 5:</u>

Rappel:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques

*On dit que (v_n) est une suite extraite (ou sous suite) de (u_n) s'il existe

une application $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ stictement croissante telle que $v_n=u_{\sigma(n)}$ pour tout n

* Notons qu'on a toujours $\forall n:\sigma(n)\geq n$(par récurrence sur n; où σ est strictement croissante)

*On a: (u_n) est convergente vers $l\Leftrightarrow$ toute suite extraite de (u_n) est convergente vers l

*On a: (u_n) est convergente vers $l\Leftrightarrow$ les deux suites extraites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l

***Théorème de Bolzano-Weiestrass**:Toute suite bornée de réels admet une suite extraite convergente

1) Montrons que (u_n) ne converge pas et bornée

Puisque $u_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$(où $n\in\mathbb{N}^*$),alors on considère les deux suites

extraites (v_n) et (w_n) définies par

$$\begin{aligned} v_n &= u_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \\ w_n &= u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} v_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \\ \lim_{n\to+\infty} w_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right) = -1 \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, alors la suite (u_n) n'est pas convergente

(i-e:elle est divergente)

*)Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme

$$\begin{aligned} -1 &\leq (-1)^n \leq 1 \\ 0 &< \frac{1}{n} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc

$$-1 < (-1)^n + \frac{1}{n} \leq 2$$

i-e:

$$-1 < u_n \leq 2$$

On a donc que $\forall n \in \mathbb{N}^* : -1 < u_n \leq 2$; d'où la suite (u_n) est bornée

2) Comme la suite (u_n) est bornée ,alors d'après le Théorème de Bolzano

-Weiestrass, on peut extraire toujours de (u_n) une sous suite convergente