Table des Matières

Chapitre 1

Suites de Nombres réels

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1. Une suite de nombres réels est une application

$$\begin{array}{rcl} u & : & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n, \end{array}$$

cette suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le nombre u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut définir les suites de deux façons différentes.

- Soit directement par une formule, en général une fonction f, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = f(n)$, c'est ce qu'on appelle une **formulation explicite** de la suite.

  Exemple 1 : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, $u_n = n + \cos(n)$, $u_n = n^2 + 2n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

- Soit en exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et en définissant une valeur initiale, comme par exemple

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0 = a, \quad a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour } n \geq 0. \end{array} \right.$$

  C'est ce qu'on appelle une **formulation par récurrence**, ((u_n) est une suite *récurrente*).

Les suites récurrentes définies par une fonction forment une catégorie essentielle de suites.

l'étude de ces suites nécessite aussi la maîtrise préalable de l'étude de fonctions (Limites et fonctions continues).

Exemple 2 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{array} \right.$$

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **alternée** si ses termes sont alternativement positifs et négatifs. Le terme général d'une suite alternée peut s'écrire sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = (-1)^n \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

- Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$.

a) Elle est dite **constante** s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$.

b) Elle est dite **stationnaire** s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $u_n = a$.

c) Elle est dite **périodique** s'il existe un entier positif p tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.

1.1.1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 1.1.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

Exemple 4 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ est majorée par 1 et minorée par 0. Elle est donc bornée.

1.1.2 Suite croissante, décroissante

Définition 1.1.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement* croissante si $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} < u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs,

- elle est *croissante* si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
- elle est *décroissante* si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Exemple 5 :

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$.

Etudions le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} - (n+1) - (2^n - n) = 2^n \times 2 - n - 1 - 2^n + n \\ &= 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1. \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n, $2^n - 1 \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ est strictement décroissante et bornée.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = e^n$ est croissante, minorée mais pas majorée.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par $\frac{1}{2}$ (borne atteinte en $n = 2$), minorée par -1 (borne atteinte en $n = 1$).

1.1.3 Limite d'une suite

Limite finie, limite infinie

Définition 1.1.4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** ℓ. Autrement dit : u_n est aussi proche de ℓ à partir d'un certain rang.

Définition 1.1.5.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$) si :

$$\forall k > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq N \Rightarrow u_n \geq K.$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ (quand n tend vers $+\infty$) si :

$$\forall k > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq N \Rightarrow u_n < -K.$$

Remarque.

1. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou par fois $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$, et de même pour une limite $\pm\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$.

Définition 1.1.6. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** si elle admet une **limite finie**. Elle est divergente sinon (c'est-àdire soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

Proposition 1.1.7. *Si une suite est convergente, sa limite est unique.*

Preuve. On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites $\ell \neq \ell'$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \dfrac{|\ell-\ell'|}{2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe N_1 tel que pour $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, il existe N_2 tel que pour $n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon$.

Notons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors pour ce N :

$$\begin{aligned} |u_N - \ell| &< \varepsilon \text{ et } \left|u_N - \ell'\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|\ell - \ell'\right| = \left|\ell - u_N + u_N - \ell'\right| \leq |\ell - u_N| + \left|u_N - \ell'\right|, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire. On en tire

$$\left|\ell - \ell'\right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < \left|\ell - \ell'\right|.$$

On vient d'aboutir à l'inégalité $|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$ qui est impossible. Notre hypothèse de départ est fausse et donc $\ell = \ell'$. ■

Exemple 6 .

1. La suite constante $u_n = a$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé converge vers a. Choisissons un $\varepsilon > 0$. Il faut trouver un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - a| < \varepsilon$. Comme $|u_n - a| = 0$ cette inégalité est toujours vraie, d'où il suffit de prendre $N = 0$.

2. La suite définie par $u_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$. Il faut montrer que pour tout $K \in \mathbb{R}$ il existe un entier N tel que pour tout n tel que $n \geq N$ on a $u_n \geq K$. Il suffit de prendre pour N le plus petit entier $\geq K$.

1.1.4 Opérations sur les limites

Proposition 1.1.8. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant comme limites respectives les réels ℓ et 'ℓ'. Soit également $\lambda \in \mathbb{R}$. alors :*

- $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell + \ell'$,
- $\lambda\, u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda\ell$,

- $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell\ell'$,
- si $\ell \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{\ell}$.
- Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors la suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Formes indéterminées

Dans certaines situations, on ne peut rien dire à priori sur la limite, il faut une étude au cas par cas.

Exemple 7 :

1. "$+\infty - \infty$" Cela signifie que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ il faut faire l'étude en fonction de chaque suite pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$ comme le prouve les exemples suivants.

$$\lim_{n\to+\infty} (e^n - \ln(n)) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(n - n^2\right) = -\infty.$$

2. "$0 \times \infty$", "$\dfrac{\infty}{\infty}$", "$\dfrac{0}{0}$",...

Théorème 1.1.9. *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors on a

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon &> 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ ; \forall n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \\ \forall\varepsilon &> 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ ; \forall n \geq N \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi a partir d'un certain rang N les termes de la suite (u_n) sont majorés par $\ell + \varepsilon$ et minorés par $\ell - \varepsilon$ dès que $n > N$, les autres termes (u_n avec $n \leq N$) sont en nombre fini. On déduit le théorème.

La réciproque est fausse en général. Considérons par exemple la suite donnée par $u_n = (-1)^n$. Cette suite est bornée car elle majorée par 1 et minorée parée par -1, mais elle est divergente. ■

1.1.5 Suites monotones

Théorème 1.1.10. *Toute suite croissante majorée est convergente.*

Preuve. Notons $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, disons par le réel M, l'ensemble A est majoré par M, et de plus il est non vide. Donc l'ensemble A admet une borne supérieure : notons $\ell = \sup A$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$, par la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément u_N de A tel que $\ell - \varepsilon < u_N \leq \ell$. Alors pour $n \geq N$ on a $\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell$, et donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon + \varepsilon$. On déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. ■

Remarque.

- Toute suite décroissante minorée est convergente.
- Toute suite croissante non majorée est divergente vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée est divergente vers $-\infty$.

Exemple 8. Considérons la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tous les termes de la suite sont positifs. Donc la suite est minorée par 0. Tous les termes sont également majorés par 1. En effet (par récurence) on a $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $u_1 = \frac{1}{4}$, Plus généralement, si $u_n \leq 1$ alors $u_{n+1} = u_n^2 \leq 1$. Donc la suite est bornée. On a également $\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n \leq 1$. La suite est décroissante, minorée. Elle est convergente.

Limites et inégalités

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. **Théorème de " gendarmes "** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que
$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n \\ \text{et} \lim_{n\to+\infty} u_n &= \ell = \lim_{n\to+\infty} w_n, \end{aligned}$$

alors la suite$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

1.1.6 Suites particulières

1. Suites arithmétiques et suites géométriques

Définition 1.1.11. Soit $r \in \mathbb{R}$ un nombre réel donné.

1. On appelle **suite géométrique** de raison r la suite donnée par
$$u_n = ar^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. On appelle **suite arithmétique** de raison r la suite donnée par
$$u_n = a + nr, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Variations d'une suite géométrique.

On supposera que le premier terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est u_0 et que $u_0 > 0$ et r soit non nul.

1. Si $r = 1$, la suite est constante.
2. Si $r < 0$, la suite n'est pas monotone est alternativement dans les nombres négatifs et positifs.
3. Si $-1 < r < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Si $r \leq -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

5. Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ...u_n$, alors $S_n = u_0 \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $r \neq 1$.

Variations d'une suite arithmétique.

On supposera que le premier terme de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est u_0 et que $u_0 > 0$ et r soit non nul. Alors

1. Si $r < 0$, la suite est décroissante.

2. Si $r > 0$, la suite est croissante.

3. Si $r = 0$, la suite est constante.

4. Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$, alors $S_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0+u_n}{2}\right)$.

2. Suite harmonique

C'est la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante : en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$, mais n'est pas bornée, donc elle tend vers $+\infty$.

1.1.7 Suites adjacentes

Définition 1.1.12. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décriossante,

2. pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$,

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Théorème 1.1.13. *Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.*

Preuve. Les termes de la suite sont ordonnés ainsi :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq ... \leq v_n \leq ... \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0.$$

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0, donc elle converge vers une limite ℓ. ■

• La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge vers une limite ℓ'.

• Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \ell - \ell' = 0$, d'où $\ell = \ell'$.

Exemple 9. les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour $n \geq 0$ par

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{n+1} \text{ sont adjacentes.}$$

1.1.8 Suites extraites

Définition 1.1.14. Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** ou encore une **sous-suite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s'il existe une application

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante,}$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple 10. Prenons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$. L'application $\varphi : n \mapsto 2n$ donne la sous-suite

$$v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1.$$

Cette sous-suite est une suite constante. De même $\varphi : n \mapsto 2n+1$ donne la sous-suite

$$v_n = u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Cette sous-suite est aussi une suite constante.

Proposition 1.1.15. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors pour toute suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de limite il existe un entier naturel N tel que pour $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Comme l'application φ est strictement croissante, on montre facilement par récurrence que pour tout n, on a $\varphi(n) \geq n$. Ceci implique en particulier que si $n \geq N$, alors $\varphi(n) \geq N$, et donc $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. ■

Corollaire 1.1.16. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

Exemple 11. Si $u_n = (-1)^n$, on a trouvé deux sous-suites constantes égales à 1 et -1. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Théorème 1.1.17. (**Théorème de Bolzano – Weierstrass**)

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Exemple 12. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors on peut considérer les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.1.18. **(Suites de Cauchy)** Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de **Cauchy** si elle vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } p \text{ et } q \in \mathbb{N}\ ;\ p, q \geq \mathbb{N}\ \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

Remarque.

1. Toute suite convergente est de Cauchy, la réciproque (toute suite de Cauchy est convergente) n'est pas vraie dans n'importe quel ensemble.

2. Toute suite de Cauchy est bornée.

1.2 Exercices Corrigés

Exercice 1. En utilasant la définition de la limite, montrer que :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} &= 0;\ 2) \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-3}{3n+1} = \frac{2}{3};\ 3) \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n} = 0; \\ 4) \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n-10} &= +\infty. \end{aligned}$$

Solution. Tous les n sont des entiers naturels.

1) On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n :\ \left(n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{2n-1} - 0\right| < \varepsilon\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a (on peut supposer dès le début que $N \geq 1$ et donc $(n \geq N)$ sera supérieur à 1 et donc $2n - 1 > 0$)

$$\left|\frac{1}{2n-1} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon} < n.$$

Il suffit donc de choisir $N = \max\left(\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1, 1\right) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1.$

2)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-3}{3n+1}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n:\ \left(n\geq N\Rightarrow\left|\frac{2n-3}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon\right).$$

Des calculs directs similaires à ceux de la question d'avant nous permettent de prendre $N=\left[\dfrac{\varepsilon}{11}-\dfrac{1}{3}\right]+1\geq 0.$

3)

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{n}=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n:\ \left(n\geq N\Rightarrow\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\right).$$

Soit $\varepsilon>0$. La fonction "sin" n'est pas positive sur tous $\mathbb{R}$, mais elle est positive, par exemple sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Puisque $0<\dfrac{1}{n}\leq 1<\dfrac{\pi}{2}$, alors $\left|\sin\dfrac{1}{n}\right|=\sin\dfrac{1}{n}$. Or $\sin x\leq x$ pour tout $x\geq 0$. Donc $\sin\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n}$. Un calcul simple montre que $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ est valable pour tous $n\geq N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ et donc $\sin\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ est aussi valable pour tout $n\geq N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1.$

4)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n-10}=+\infty\Leftrightarrow\forall A>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n:\ \left(n\geq N\Rightarrow\left|\frac{n^2+1}{n-10}\right|>A\right).$$

Soit $A>0$. Si on fixe une condition initiale que N doit être supérieur ou égal à 11, alors on aurra (pour $n\geq N$), $\left|\dfrac{n^2+1}{n-10}\right|=\dfrac{n^2+1}{n-10}$. On a (pour $n\geq N\geq 11$)

$$n^2+1\geq n^2\Longrightarrow\frac{n^2+1}{n-10}\geq\frac{n^2}{n-10}>\frac{n^2}{n}=n\text{ car }n-10<n.$$

Il suffit donc de prendre $N=\max\left(11,[A]+1\right).$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

$$1)\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1};\quad 2)\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n}\right);\quad 3)\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n};\ 4)\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$5)\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(k+1\right)},\quad 6)\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k},\quad 7)\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}},$$

Solution. 1) C'est une forme indéterminée $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Levons l'indétermination. On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

2) C'est une forme indéterminée $(\infty - \infty)$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n$ n'existe pas mais $(\sin n)_n$ est bornée car

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad -1\le \sin n\le 1,$$

d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{-1}{n}\le\dfrac{\sin n}{n}\le\dfrac{1}{n}.$

Par le théorème d'encadrement et puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,\ \text{alors}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

4) On a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}.$$

Mais

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}=1,\ \text{d'où}\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^1=e.$$

5) On a pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$. D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

6) On a

$$1\le k\le n\Rightarrow 1+n^2\le k+n^2\le n+n^2\Rightarrow\frac{1}{n+n^2}\le\frac{1}{k+n^2}\le\frac{1}{1+n^2}.$$

En multipliant par n et en prenant la somme entre 1 et n, on obtient :

$$1\leftarrow\frac{n^2}{n+n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{1+n^2}=\frac{n^2}{1+n^2}\to 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}=1.$

7) La même méthode nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2k}} = 1.$

Exercice 3. Etudier la nature des suites de terme général

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+1}, \quad v_n = \frac{1-n^2}{n+2} \quad \text{et} \quad w_n = u_n + v_n.$$

Solution.

- On a $u_n = n\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}}$ et par suite, $u_n \sim n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente.
- On montre de même que $v_n \sim -n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente.
- On a
$$w_n = u_n + v_n = \frac{n^2+2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}.$$
Il résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$. Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)$ est une suite convergente.

Exercice 4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$. Et la réciproque?
Solution.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \text{ telque} : \forall n\geq N \Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon.$$

• On a : $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x|+|y|| \leq |x-y|$.
On en déduit $(\forall n\geq N) \Rightarrow ||u_n|-|\ell|| \leq |u_n-\ell| < \varepsilon$, donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers $|\ell|$.
• La réciproque est fausse. Si $u_n = (-1)^n$ on a : $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers 1 mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divege.
• On a cependant l'implication : $\underset{n\to+\infty}{|u_n|} \to 0 \Rightarrow \underset{n\to+\infty}{u_n} \to 0.$

Exercice 5. **I**) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}, \quad n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n < 2$.

2) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

II) On considère l'ensemble $A = \left\{x_n \in \mathbb{R}^+ / \ x_0^2 = 2, \ x_{n+1}^2 - 2x_n = 0, \ \forall n\in\mathbb{N}\right\}.$

- Déterminer dans le cas où ils existent $\inf A$, $\sup A$, $\max A$, $\min A$. Justifier votre réponce.

Solution.

I) 1) On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n < 2$ par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = \sqrt{2} < 2$ (vérifié).
- On suppose que $u_n < 2$ et on montre que $u_{n+1} < 2$. On a :

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n} < \sqrt{2.2} = \sqrt{4} = 2.$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n < 2$.

2) Etude la monotonie de la suite (u_n).

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2}{\sqrt{2u_n} + u_n} = \frac{u_n (2 - u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n} > 0$$

car $u_n < 2$ et $u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est croissante et comme $u_n < 2$ (croissante et majorée par 2) donc elle est convergente.

Soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$, on a $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$; $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2u_n}$, d'où

$$\ell = \sqrt{2\ell} \Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell = 0 \Leftrightarrow \ell (\ell - 2) = 0 \Rightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 2.$$

Comme (u_n) est croissante et $u_0 = \sqrt{2}$ alors : $u_n \geq \sqrt{2} \Rightarrow \ell \geq \sqrt{2}$, alors $\ell = 2$.

II)

$$\begin{aligned} A &= \left\{x_n \in \mathbb{R}_*^+ / \ x_0^2 = 2, \ \ x_{n+1}^2 - 2x_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \left\{x_n \in \mathbb{R}_*^+ / \ x_0 = \sqrt{2}, \ x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \ n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \{(u_n) ; \ n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Alors A est borné d'après la première question, $A \neq \varnothing$, $u_0 = \sqrt{2} \in A$, $A \subset \mathbb{R}$ alors $\sup A$ et $\inf A$ existent.

- (u_n) est croissante et convergente alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} u_n &= 2 = \sup (u_n) = \sup A. \\ \sup A &= 2, \ 2 \notin A \Rightarrow \max A \nexists. \\ \sqrt{2} &\in A \Rightarrow \min A = \sqrt{2} \Rightarrow \inf A = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes. Démontrez que la suite (u_n) est convergente.

Solution. Notons ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 les limites respectives des suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}). Nous savons que, si une suite (v_n) est convergente vers v, alors toute suite extraite de cette suite converge et admet v comme limite.

La suite (u_{6n}) est extraite à la fois des suites (u_{2n}) et (u_{3n}). Elle est donc convergente vers ℓ_1 et vers ℓ_3. D'après l'unicité de la limite d'une suite convergente, on a donc $\ell_1 = \ell_3$.

La suite (u_{6n+3}) est extraite à la fois des suites (u_{2n+1}) et (u_{3n}). Elle est donc convergente vers ℓ_2 et vers ℓ_3. D'après l'unicité de la limite d'une suite convergente, on a donc $\ell_2 = \ell_3$.

On a donc $\ell_1 = \ell_2$, c'est-à-dire que les deux suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) ont la même limite.

Comme tout réel u_n est une valeur de l'une de ces deux suites, la suite (u_n) est convergente.

Exercice 7. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie.

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Solution. 1) On'a pas d'autre choix que de supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie ℓ. Elle vérifait alors $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$. Puisque ℓ est supposée finie alors on obtiendrait $\dfrac{1}{\ell} = 0$ ce qui est vérifierait absurde. Donc $\ell \to +\infty$ (ou $-\infty$).

2) On peut montrer facilement par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs. Soit $n \in \mathbb{N}$, donc puisque $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$, alors $(u_n)_n$ est croissante et non majorée (car sinon elle serait convergente). Elle tend forcément vers $+\infty$.

Exercice 8. Les suites suivantes sont-elles de Cauchy ?

1) $u_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{2^2}{4^2} + ... + \dfrac{n^2}{4^n}$ (montrer d'abord que $4^n > n^4$, $\forall n \geq 5$).

2) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$.

3) $u_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{3^2} + ... + \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

Solution. 1) La proposition $4^n > n^4$, $\forall n \geq 5$ se démontre facilement par recurrence. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |u_{n+k} - u_n| &= \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} + \frac{(n+2)^2}{4^{n+2}} + ... + \frac{(n+k)^2}{4^{n+k}} \\ &< \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+k)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \end{aligned}$$

car $(n+k)^2 > (n+k)(n+k-1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. D'où

$$\begin{aligned} |u_{n+k} - u_n| &< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N = \max\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1,\ 5\right)$.

2) La suite $(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy. En effet,

$$\begin{aligned} |u_{2N} - u_N| &= \left|1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + ... + \frac{1}{2N} - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{N}\right)\right| \\ &= \frac{1}{N+1} + ... + \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + ... + \frac{1}{2N} = N\frac{1}{2N} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

car $2N \geq N + k$ pour tout $1 \leq k \leq N$. Donc

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p = 2N,\ q = N \in \mathbb{N}\ \left(2n \geq N \text{ et } |u_p - u_q| \geq \frac{1}{2}\right),$$

i.e. $(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy (on pouvait aussi, par exemple, faire le même travail avec $|u_{3N} - u_N|$).

3) Montrer que $|u_{2N} - u_N| \geq \frac{2}{9}$. Donc $(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

Exercice 9. On considère la suite de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

1) Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes.

2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Solution. 1) Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\begin{aligned} u_{2n+2} - u_{2n} &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}, \quad u_{2n+3} - u_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}, \\ u_{2n+1} - u_{2n} &= \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(v_n = u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante, que la suite $(w_n = u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et que la suite $(w_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de terme positifs qui converge vers 0. Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc des suites adjacentes. Il résulte qu'elles sont convergentes et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

2) Soit ε un réel strictement positif.

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $(n > N_1) \Rightarrow (|v_n - \ell| < \varepsilon)$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $(n > N_2) \Rightarrow (|w_n - \ell| < \varepsilon)$.

Soit n un entier supérieur à $N = 2\sup(N_1, N_2)$.

- Si $n = 2p$, on a $u_n = v_p$ et $p > N_1$. Il résulte $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Si $n = 2p + 1$, on a $u_n = w_p$ et $p > N_2$. Il résulte $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

On a donc $\forall n,\ (n > N) \Rightarrow (|u_n - \ell| < \varepsilon)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, de limiteℓ.
Remarque. $\ell = \log 2$.
Exercice 10. Même exercice que le précédent pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Remarque. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \cos 1$.
Exercice 11. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, n \geq 1.$$

1) Calculer x_1, x_2 et x_3.

2) Montrer que : $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

3) Déduire que (x_n) est convergente et calculer ca limite.

Solution.

1) $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{(2)^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{(2)^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{(3)^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{(3)^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{(3)^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

2) On a $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n \text{ fois}} \leq x_n \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n \text{ fois}}$$

$$\Rightarrow n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, alors la suite (x_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.
Exercice 12. On donne la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n}; \quad u_0 \in \mathbb{R}^*$$

1) Calculer u_n pour $u_0 = 1$.

2) Calculer u_n pour $u_0 = -1$.

3) Pour $u_0^2 \neq 1$. Montrer que $\forall n \geq 1$ on a :

$$u_{2n} = u_0 \text{ et } u_{2n-1} = \frac{1}{u_0}.$$

4) Résoudre l'équation $u_0 = \dfrac{1}{u_0}$.

5) Déduire la nature de la suite (u_n) selon u_0.

Solution.

1) Si $u_0 = 1 \Rightarrow u_1 = 1,\ u_2 = 1, ..., \boxed{u_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.}$

2) Si $u_0 = -1 \Rightarrow u_1 = -1,\ u_2 = -1, ..., \boxed{u_n = -1,\ \forall n \in \mathbb{N}.}$

3) Si $u_0^2 \neq 1 \Leftrightarrow u_0 \neq -1$ et $u_0 \neq 1$. Ce qui implique que :

$$u_1 = \frac{1}{u_0} \text{ et } u_2 = \frac{1}{u_1} = u_1 \ \surd$$

- Supposons $u_{2n} = u_0 \Rightarrow u_{2n+2} = \dfrac{1}{u_{2n+1}} = u_{2n} = u_0 \ \surd$
- Supposons $u_{2n+1} = \dfrac{1}{u_0} \Rightarrow u_{2n+3} = \dfrac{1}{u_{2n+2}} = \dfrac{1}{u_0} \ \surd$

Donc $\forall n \geq 1$ on a : $u_{2n} = u_0$ et $u_{2n-1} = \dfrac{1}{u_0}$.

4) On a : $u_0 = \dfrac{1}{u_0} \Rightarrow u_0^2 = 1 \Rightarrow u_0 = \pm 1$.

5) • Si $u_0 = 1$ $\Rightarrow u_n = 1 \Rightarrow (u_n)$ converge ver 1.

• Si $u_0 = -1$ $\Rightarrow u_n = -1 \Rightarrow (u_n)$ converge ver -1.

• Si $u_0 \neq -1$ $\Rightarrow (u_{2n}) \to u_0$ et $u_{2n+1} \to \dfrac{1}{u_0}$, mais $u_0 \neq \dfrac{1}{u_0}$, donc la suite (u_n) divergente.$\mathbb{R}$.

Bibliographie

[1] F. Pécastaings et J. Sevin, Chemins vers l'analyse, tome 1, Librairie Vuibert.

[2] Arnaud Bodin, Niels Borne, Laura Desideri. Analyse Cours de mathématiques première année, http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf.

[3] Murray R. Spiegel, SERIE SCHAUM - Théorie et application, Copyright- McGraw-Hill, Paris.

[4] M. H. Mortad, Exercices corrigés d'analyse, Edition Houma, 2009.