

Ex 06: $\mathbb{C}^n$ est l.e.v complexe muni d'un produit scalaire hermitien c.à.d :

$$y^* x = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \quad (\overline{y_i} \text{ conjugué de } y_i).$$

Ex:

Soient $x = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y^* = \overline{y^T} = (-i, 2) = (i, 2).$$

$$\Rightarrow y^* x = \sum_{i=1}^2 x_i \overline{y_i} = 1 \times i + 2i = 3i.$$

• $\mathbb{C}^{n \times n}$, L'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n .
Résultat toujours valable. On a :

$$\langle x, A^* y \rangle = (A^* y)^* x = y^* (A^*)^* x = y^* A x = \langle Ax, y \rangle$$

ou $A^* = \overline{A^T} \Rightarrow (A^*)^* = A.$

• Si $\mathbb{R}^{n \times n}$, on a :

$$\boxed{\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.}$$

Toujours vraie. On passe de A^*

à A par cette relation.

$$\boxed{\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.}$$

②. Voir Cours.

Soit σ une permutation :

i	1	2	3	4
$\sigma(i)$	2	3	4	1

matrice de Permutation P_σ :

Exemple 1:

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2:

i	1	2	3
$\sigma(i)$	2	1	3

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque: Une matrice de permutation P_σ , chaque ligne contient q'une seule fois "1".
De même chaque colonne "1".

Pour calculer σ^{-1} . Remarquons que pour ex 1:

$$P_\sigma^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons $P_\sigma^T P_\sigma = ?$

$$P_6 P_6^T = I \text{ (identité) .}$$

$$\Rightarrow P_6^T = (P_6)^{-1} = P_6^{-1} .$$

de P_6^T on déduit σ^{-1} :

i	1	2	3	4
$\sigma^{-1}(i)$	4	1	2	3

Comme $P_6^T = (P_6)^{-1} \Leftrightarrow P_6 P_6^T = I .$

P_6 est une matrice orthogonale car :

$$P_6^T P_6 = I .$$

Toute matrice de Permutation, on a :

$$P_6^{-1} = P_6^T = (P_6)^{-1} .$$

Son inverse $P_6^{-1} = P_6^{-1} = (P_6)^T .$

facile à calculer. On calcule
uniquement P_6^T son inverse .

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i	1	2	3
$\sigma(i)$	1	3	2

A contient dans chaque ligne une seule fois "1" et dans chaque colonne une seule fois "1".

donc A est une matrice de Permutation.

Son inverse est tout simplement A^T .

On a $AA^T = A^T A = I$.

$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = A^T}$ et A est orthogonale.

Même pour l'exemple B.

On définit σ :

i	1	2	3	4	5
$\sigma(i)$	2	1	3	5	4

Donc B est une matrice de Permutation.

Son inverse $B^{-1} = B^T$.

$$B^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i	1	2	3	4	5
σ^{-1}	2	1	3	5	4

Permutation σ^{-1} (inverse).

③

Considérons une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

et Soit $\langle y, u \rangle = y^* u$ produit scalaire euclidien ou bien hermitien.

Soit $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple: Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Calculons } \langle A e_1, e_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}.$$

Donc on déduit que les
éléments de A a_{ij} sont
donnés par le produit scalaire
comme suit :

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = a_{ij}.$$

C'est à dire on peut exprimer les
éléments de la matrice A en fonction
du produit scalaire et la base
canonique.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$a_{12} = 1 = \langle Ae_2, e_1 \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle (1, 2), (1, 0) \rangle = 1 \times 1 + 2 \times 0 =$$

$$= 1 = a_{12}.$$