Dynamique du point matériel

Introduction :

La dynamique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps matériels en relation avec les causes (forces) qui le provoquent. Elle met en évidence le principe cause-effet. Elle prédit le mouvement d'un corps se trouvant dans un champ ou un milieu déterminé.

Définitions :

- **Le système matériel :**
  Un système matériel est un ensemble de points matériels. Il a une masse et occupe un volume.
- **L'inertie :** c'est la résistance manifestée par un corps matériel si l'on veut modifier son état de mouvement (faire bouger ou arrêter un corps).
- **La masse :** La masse d'un système est la quantité de matière qu'il renferme. Elle est invariable dans le cadre de la mécanique Newtonienne
- **Le centre d'inertie :** Le centre d'inertie d'un système matériel (ou centre de gravitation) correspond au point noté *G*, barycentre des positions des points matériels affectés de leur masse. Il vérifie la relation suivante :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum m_i}$$

Soit en coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\ y_G = \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \\ z_G = \dfrac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \end{cases}$

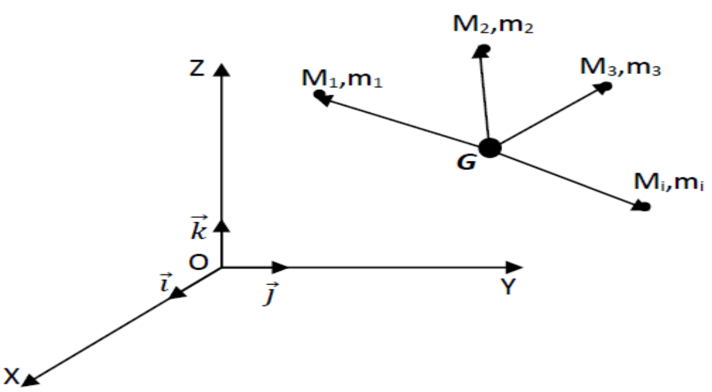


Figure 1 : le centre d'inertie

I Vecteur quantité de mouvement :

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse m se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{p}$ donné par :

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$$

Ce vecteur est colinéaire à la vitesse du point et dépend du référentiel dans lequel est exprimée la vitesse.

Pour un système matériel constitué de n masses m_i se déplaçant aux vitesses $\vec{v}_i$, le vecteur quantité de mouvement correspond à la somme des vecteurs quantité de mouvement de chacune des parties (points) constituant le système.

$$\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots \ldots \vec{p}_n = \sum_i^n m_i \vec{v}_i = \sum_i^n \vec{p}_i$$

Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un système matériel isolé est constante. Par conséquent S'il y a variation de la vitesse ou de la quantité de mouvement cela implique que la particule n'est pas libre.

Exemple :

Pour un système isolé constitué de deux particules

A l'instant t : $\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

A l'instant t' : $\overrightarrow{p'}_{tot} = \overrightarrow{p'}_1 + \overrightarrow{p'}_2$

Le système est isolé $\Rightarrow$ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{p'}_1 + \overrightarrow{p'}_2$ $\Rightarrow \overrightarrow{p'}_1 - \vec{p}_1 += -\left(\overrightarrow{p'}_2 - \vec{p}_2 +\right) \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_1$ **2**

Donc dans un système isolé, il y a une compensation de la quantité de mouvement.

Principe d'inertie : première loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel isolé est :

- Soit au repos.
- Soit en mouvement rectiligne uniforme.

Conséquences :

Référentiel galiléen : On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique.

Principe fondamental de la dynamique : deuxième loi de Newton

Si un système S de masse m et centre d'inertie G se déplace dans un référentiel Galiléen et subit une action non compensée (il n'est pas isolé). D'après le principe de la dynamique, la quantité de mouvement de ce système ne peut être constante dans le temps.

c.à.d. Le principe (ou relation) fondamental(e) de la dynamique nous permet de lier la cause (actions non compensées) à l'effet observé (variation de la quantité de mouvement).

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Cas particuliers

a) Cas d'une masse constante :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Si la résultante des forces est constante, alors $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \overrightarrow{cte}$ et le mouvement est rectiligne uniformément varié.

b) Cas d'une masse variable

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Principe des actions réciproque : troisième loi de Newton

A toute action il y a une réaction : Lorsque deux systèmes $S1$ et $S2$ sont en interaction mutuelle ; quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement (ou l'absence de mouvement) ; la force appliquée par le premier système sur le deuxième est égale et avec un signe contraire à la force appliquée par le deuxième système sur premier système.

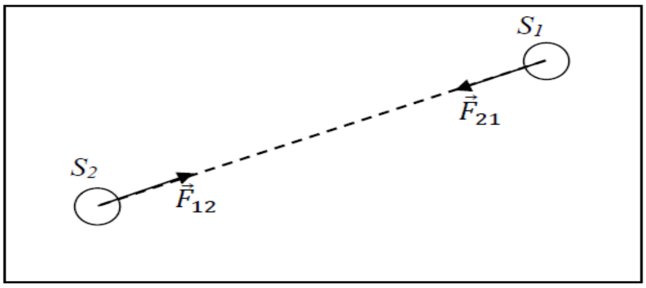


Figure 3 : Illustration du principe des actions réciproques

Soit un système isolé constitué de deux particules :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{cte} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Forces d'interaction à distance

a) Force de gravitation newtonienne

On appelle ***force de gravitation*** ou ***force d'interaction gravitationnelle***, la force d'attraction exercée par une masse m_1 sur une autre masse m_2 et qui dirigée selon la droite qui relie les deux masses.

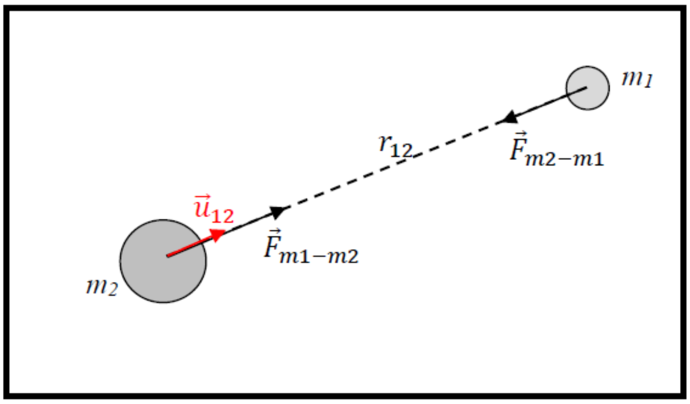


Figure 4 : Illustration de la force d'interaction gravitationnelle.

La force de gravitation entre les masses m_1 et m_2 est donnée par :

$$\vec{F}_{m1-m2} = G\frac{m_1.m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$

Où :

$G=6.672\ Nm^2kg^{-2}$: La constante de gravitation universelle.

$\vec{u}_{12}$: Le vecteur unitaire dirigé de $m_1$vers m_2

Gravitation d'un corps au voisinage de la terre :

Soit un corps de masse m qui se trouve dans le champ de la gravitation terrestre. La force exercée par la terre de masse M sur m est donnée par :

$$\vec{F} = -G\frac{M.m}{r^2}\vec{u}_r = \vec{P} = m\vec{g}$$

$\vec{g}$: représente l'accélération de la pesanteur au point ou se trouve le corps m.

Soit :

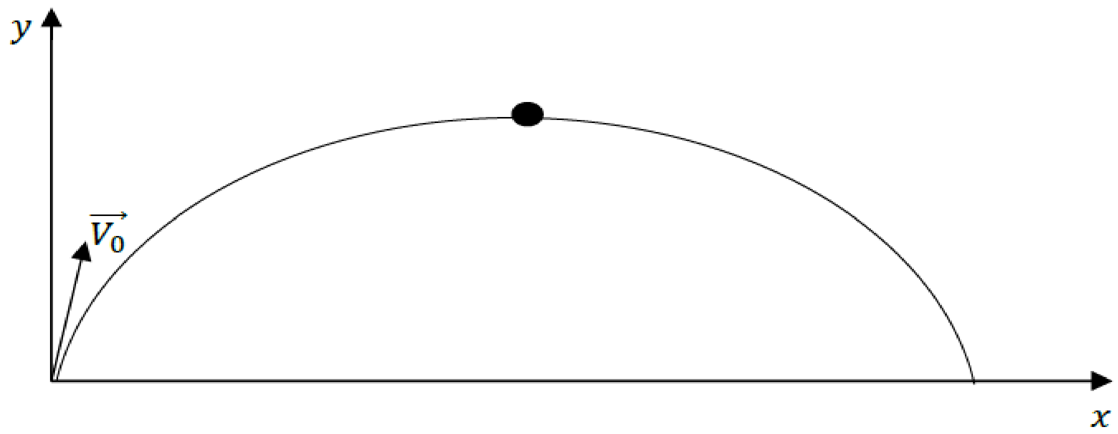
$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow \|\vec{g}\| = G\frac{M}{r^2}$$

Au voisinage de la surface de la terre $r=R$ (R rayon de la terre) :

$\|\vec{g}\| = G\frac{M}{R^2} \approx 9.98m/s^2$

Mouvement d'un projectile

Le mouvement d'un projectile soumis uniquement à son poids (les forces de frottement son négligées) a les caractéristiques dynamiques suivantes :



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = (V_0 \cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est donnée par :

$$y = -\frac{1}{2V_0}\frac{g}{\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$$

L'apogée (hauteur maximale) atteinte par le projectile correspond à :

$V_y = 0 \Rightarrow t = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$

Donc

$$y_{max} = -\frac{g}{2}\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + V_0 \sin\alpha \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right) = \frac{{V_0}^2 sin^2\alpha}{2g}$$

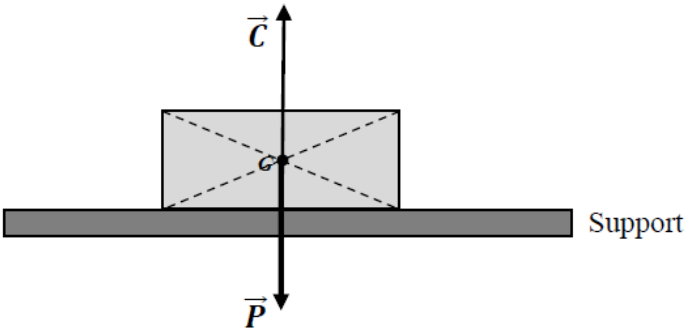
La portée (distance horizontale maximale) correspond à :

$$y = 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{2V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Les forces de contact

Réaction du support

La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance du support s'appelle ***réaction du support***. La réaction du support sur un objet est répartie sur toute la surface de contact support-objet. On peut représenter cette action par une force, résultante de toutes les actions exercées sur toute cette surface.



L'objet subit deux forces extérieures : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{C}$.

L'objet est en équilibre, donc d'après le PFD, on a

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{P} + \vec{C} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\vec{C}$$

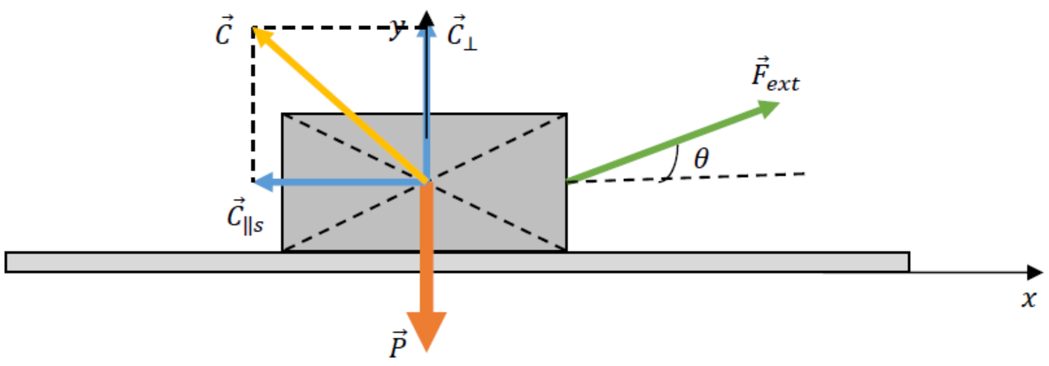
Remarque : D'après le principe des actions réciproques, l'action de l'objet sur le support horizontal est exactement opposé à la réaction du support sur l'objet et correspond donc au poids de l'objet.

Force de frottement solide

Le frottement solide apparait se produit quand deux solides sont en contact. Il convient de noter que la force de frottement solide dépend de l'action subie par le solide. En effet si aucune action extérieure ne tend à déplacer un solide se trouvant sur un plan horizontal, celui-ci est au repos et la force de frottement n'existe pas.

Force de frottement statique

La force de frottement statique est la force qui maintient le corps en état de repos même en présence d'une force extérieure. Pour illustrer cette force, on considère un corps solide sur un plan horizontal soumis à une force extérieure $\vec{F}_{ext}$.



Dans ce cas le corps est au repos. Donc d' après le PFD

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}_{ext} + \vec{P} + \vec{C} = \vec{0}$$

En projetant sur les deux axes horizontal et vertical on obtient :

$$\begin{cases} F_{ext}cos\theta - C_{\parallel} = 0 \\ C_{\perp} + F_{ext}\sin\theta - p = 0 \end{cases}$$

$C_{\perp}$ est la force qui maintient le corps au repos jusqu'à ce que la force F_{ext} appliquée arrive à l'arracher de la surface. Avant d'arracher le corps, la force de frottement statique $C_{\parallel}$ atteint sa valeur maximale définie par la loi:

$$C_{\parallel s} = \mu_s C_{\perp} \Rightarrow \mu_s = \frac{C_{\parallel s}}{C_{\perp}} = \frac{F_{ext}cos\theta}{p - F_{ext}\sin\theta}$$

μ_s est le coefficient de frottement statique avec $C_{\parallel} \leq C_{\parallel max}$

Si l'angle $\theta = 0$

$$\mu_s = \frac{C_{\parallel s}}{C_{\perp}} = \frac{F_{ext}}{p}$$

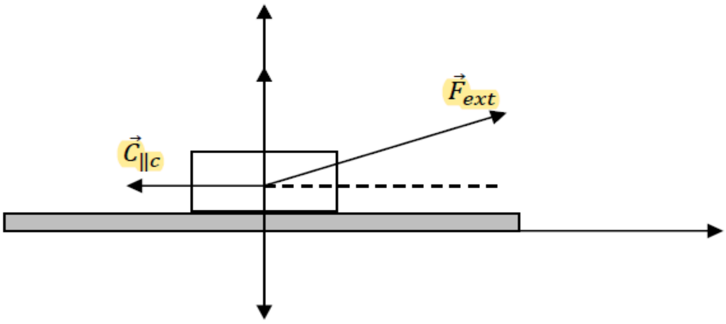
Force de frottement cinétique

La force de frottement cinétique est la force qui s'oppose au mouvement du corps sur une surface rugueuse. Son intensité est donnée par la formule :

$$C_{\parallel c} = \mu_g C_\perp$$

μ_g est le coefficient de frottement cinétique.

Dans le cas des forces de frottement statique le corps est au repos, par contre dans le cas des forces de frottement cinétique ou dynamique le corps est en mouvement.



Dans ce cas le corps est en mouvement. Donc d' après le PFD

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{ext} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

En projetant sur les deux axes horizontal et vertical on obtient:

$$\begin{cases} F_{ext}cos\theta - C_{\parallel c} = ma & \Rightarrow C_{\parallel c} = F_{ext}cos\theta - ma \\ C_\perp + F_{ext}\sin\theta - p = 0 & \Rightarrow C_\perp = p - F_{ext}cos\theta \end{cases}$$

$$\mu_g = \frac{C_{\parallel c}}{C_\perp} = \frac{F_{ext}cos\theta - ma}{p - F_{ext}cos\theta}$$

Dans le cas où $\theta = 0$

$$\mu_g = \frac{C_{\parallel c}}{C_\perp} = \frac{F_{ext} - ma}{p}$$

Il est claire que :

$$\mu_g < \mu_s$$

Force de frottement visqueux

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz comme l'air ou liquide comme l'eau), il subit, de la part du fluide, des forces de frottement. La résultante de ces actions est un vecteur force proportionnel au vecteur vitesse de déplacement de l'objet.

On a :

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

k constante positive

Cette force n'existe que s'il y a mouvement.

Force de tension (élastique)

Les forces élastiques provoquent des mouvements périodiques. C' est une force de rappel (se dirige toujours vers l' origine du mouvement)

$$\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\overrightarrow{OM} = -k\overrightarrow{OM}$$

Si le mouvement s'effectue suivant l'axe Ox, la force de tension s'écrit :

$$\vec{F} = -kx\vec{\imath}$$

Avec

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Exercice 1

Un corps de mase m=0.80 kg se trouve sur un plan incliné d' un angle $\alpha = 30°$.

Quelle force doit-on appliquer sur le corps pour qu' il se déplace

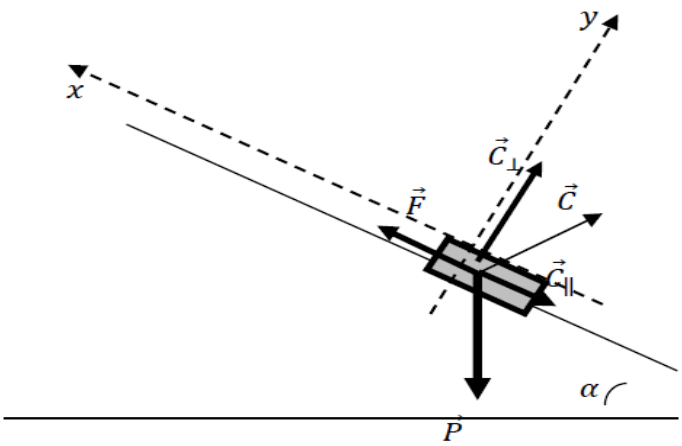
a) Vers le haut

b) Vers le bas

On suppose dans les deux cas que le corps se déplace à un mouvement uniforme puis à une accélération de $0.01 m/s^2$. On donne $\mu_g = 0.3$.

<u>Solutions</u>

:) Déplacement vers le haut (mouvement uniforme).



$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$$

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{C} = \vec{0}$$

En projetant sur les axes

$$\begin{cases} ox: \quad F = C_\parallel + P.sin\alpha \\ oy: \quad C_\perp = Pcos\alpha \end{cases}$$

$$C_\parallel = \mu_g C_\perp$$

$$\Rightarrow \quad F = \mu_g C_\perp + Psin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad F = \mu_g Pcos\alpha + Psin\alpha$$

$$F = mg(\mu_g cos\alpha + sin\alpha)$$

Déplacement vers le haut (mouvement uniformément varié).

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

En projetant sur les axes

$$\begin{cases} ox: \quad F - C_\parallel - P.sin\alpha = ma \\ oy: \quad C_\perp = Pcos\alpha = mgcos\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F = C_\parallel + mg.sin\alpha + ma$$

$$\Rightarrow \quad F = m(a + \mu_g g.cos\alpha + gsin\alpha)$$

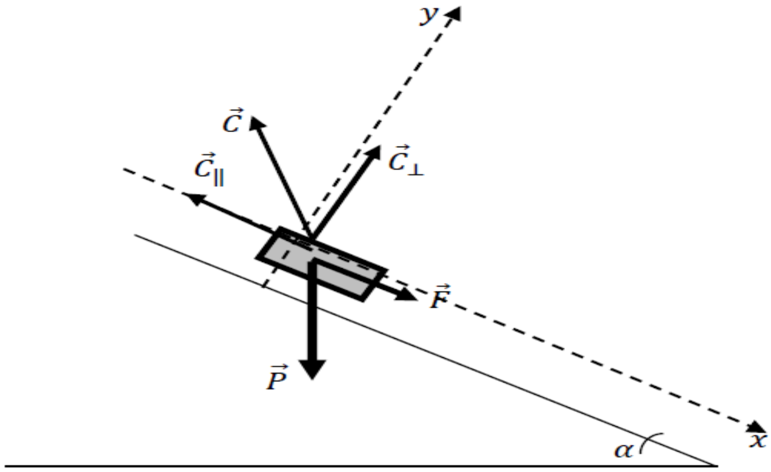
$$\Rightarrow \quad F = m[a + g(\mu_g.cos\alpha + sin\alpha)]$$

A.N

F=5.95 pour a=0

F=6.03 pour a=0.10m/s^2

Déplacement vers le bas (les deux cas).



$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

En projetant sur les axes

$$\begin{cases} ox: \ \ F + P.sin\alpha - C_{\parallel} = ma \\ oy: \ \ C_{\perp} = Pcos\alpha = mgcos\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} F = ma + C_{\parallel} - P.sin\alpha \\ C_{\parallel} = \mu_g C_{\perp} = \mu_g mgcos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \ F = m\left[a + g\left(\mu_g . cos\alpha - sin\alpha\right)\right]$$

Pour le mouvement uniforme, *a=0*

$$F = mg\left[\mu_g . cos\alpha - sin\alpha\right]$$