

Corrigé Série n° 1

Exo 1: Soit $f: \mathbb{K}^n (\mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{K}^n$, est une application linéaire on a à dire :

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), x \in \mathbb{K}^n.$$

Dij: f est injective sur $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow$ si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Dij: $\text{Ker } f \subseteq \mathbb{K}^n$ est un s.v. de $\mathbb{K}^n$. (s.v. = sous-espace vect.)

$$\text{Ker } f = \{x \in \mathbb{K}^n : Af = 0\}.$$

$$\textcircled{1} \quad f \text{ inj} \Rightarrow \text{Ker } f = \{0\}.$$

$\Rightarrow$ $f \text{ inj}$ et montrons que $\text{Ker } f = \{0\}$.

Soit $x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0 = f(0)$ car f linéaire ($f(0) = 0$).

$$\Rightarrow f(x) = f(0), \text{ mais } f \text{ inj} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Ker } f = \{0\},$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow f \text{ injective.}$$

$$\text{Soient } x_1, x_2 \in \mathbb{K}^n \text{ t. } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$$

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 - x_2 \in \text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ injective.}$$

$$\textcircled{2} \quad f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{Im } f = \mathbb{K}^n$$

$$f \text{ surjective sur } \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{K}^n, \exists x \in \mathbb{K}^n : y = f(x)$$

$$\text{Im } f = \{ y : y = f(x) \}$$

$$\Rightarrow f \text{ surjective} \Rightarrow ? \quad \text{Im } f = \mathbb{K}^n$$

Comme $\text{Im } f \subseteq \mathbb{K}^n$, il reste à montrer que :

$$\mathbb{K}^n \subseteq \text{Im } f$$

$$\text{Soit } y \in \mathbb{K}^n \text{ (} f \text{ surjective)} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ tq } f(x) = y \in \text{Im } f$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Im } f = \mathbb{K}^n}$$

$$\Leftrightarrow \text{Si } \text{Im } f = \mathbb{K}^n \Rightarrow f \text{ est surjective ?}$$

$$f \text{ est surjective} \Rightarrow \forall y \in \text{Im } f, \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ tq } y = f(x)$$

$$\text{Im } f = \mathbb{K}^n \Rightarrow \forall y \in \text{Im } f, \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ tq}$$

$$y = f(x) \Rightarrow f \text{ est surjective.}$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbb{K}^n \text{ est un espace vectoriel de dimension } n.$$

Alors Toute application linéaire f injective

$$\Rightarrow f \text{ est surjective} \Rightarrow (\text{surject} + \text{biject} = \text{bijectif})$$

$$\text{Supposons que } f \text{ est injective} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \text{Ker } f = \{0\}$$

$$\text{On a : } \boxed{\dim \mathbb{K}^n = n = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f}$$

$$\text{or } \dim \text{Ker } f = 0 \Rightarrow \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{K}^n$$

~~Résultat :~~

~~$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{K}^n = n$
 $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{K}^n \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{K}^n$~~

Résultat :

$$\text{Si } \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{K}^n \implies \operatorname{Im} f = \mathbb{K}^n.$$

$$(\wedge) \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{K}^n = n$$

$\Rightarrow f$ est surjective (voir 2).

Comme : f inj + f surjective $\Rightarrow f$ bijective.

Si f bijective $\Rightarrow f^{-1}$ inverse existe.

Montrons que : f^{-1} est linéaire si f est linéaire.

$f^{-1} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire $\Leftrightarrow$

$$f^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

ou bien : On montre que :

$$f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n.$$

$$f^{-1}(\alpha x) = \alpha f^{-1}(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

On pose :

$$z_1 = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(z_1)$$

$$z_2 = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f(z_2)$$

$\Downarrow$

$$x + y = f(z_1) + f(z_2) = f(z_1 + z_2)$$

$\Downarrow$

$$z_1 + z_2 = f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \quad (*)$$

On montre que :

(*)

$$f^{-1}(\alpha x) = \alpha f^{-1}(x), \quad \alpha \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}^n$$

On pose :

$$f^{-1}(\alpha x) = z \Rightarrow \alpha x = f(z) \rightarrow (**)$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{1}{\alpha} f(z) = f\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

$\Downarrow$

$\Rightarrow$

$$\frac{z}{\alpha} = f^{-1}(x) \Rightarrow z = \alpha f^{-1}(x) \quad (***)$$

de (*) et (**), on déduit que :

$$\boxed{f^{-1}(\alpha x) = z = \alpha f^{-1}(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^n}$$

Donc f^{-1} est Linéaire car f est linéaire.

Exo 2: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

1) $A^* = (\bar{A})^T$, $B^* = (\bar{B})^T \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
 On sait que: $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}$ (conjugué).

de plus: $(AB)^T = B^T A^T$.

On a donc: $(AB)^* = \overline{(AB)}^T = (\bar{A} \bar{B})^T = \bar{B}^T \bar{A}^T = B^* A^*$.

$\Downarrow$

$(AB)^* = B^* A^*$.

2) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n} \Rightarrow \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
 (a_{ii} sont les éléments diagonaux de A).

On pose: $AB = C \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, $1 \leq i, j \leq n$.

$\Downarrow$ $\text{tr}(AB) = \text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$ (*)

On pose: $BA = D \Rightarrow d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$, $1 \leq i, j \leq n$.

$\Rightarrow \text{tr}(BA) = \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}$ (**)

(On change i à la place de k), on a:

$\text{tr}(D) = \text{tr}(C) \Leftrightarrow \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Exo3: Soient $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices triangulaires inférieures, c'est à dire

$$t_{ij} = 0, \quad \text{pour } i < j.$$

$$u_{ij} = 0, \quad \text{pour } i < j.$$

On veut montrer que le produit TU est aussi triangulaire inférieur si T et U sont triangulaires inférieurs.

On pose :

$$TU = C \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n t_{ik} u_{kj}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

et on montre que :

$$c_{ij} = 0 \quad \text{si } i < j.$$

On a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n t_{ik} u_{kj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} u_{kj}} + \underbrace{\sum_{k=i}^n t_{ik} u_{kj}}_{/ 1 \leq i \leq n}$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} u_{kj} = t_{i1} u_{1j} + t_{i2} u_{2j} + \dots + t_{i(i-1)} u_{(i-1)j}$$

U triangulaire inférieure $\Rightarrow u_{1j} = u_{2j} = \dots = u_{(i-1)j} = 0$

Car $i < j$.

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} u_{kj} = 0 \right| \longrightarrow (1)$$

~~Il nous reste :~~

~~$$\sum_{k=i}^n t_{ik} u_{kj} = t_{ii} \underbrace{u_{ij}}_{=0} + \underbrace{t_{i,i+1}}_0 u_{i+1,j} + \dots +$$~~

Il nous reste la somme :

$$\sum_{k=i}^n t_{ik} u_{kj} = t_{ii} \underbrace{u_{ij}}_{=0} + \underbrace{t_{i,i+1}}_0 u_{i+1,j} + \dots +$$

$$\underbrace{t_{i,n}}_0 u_{nj} = 0 \rightarrow (2)$$

(Car U triangulaire inférieure)

De (1) et (2), On déduit que :

$$c_{ij} = 0 \text{ si } i < j \Rightarrow$$

TU est une matrice triangulaire inférieure
car $\forall i, j, (TU)_{ij} = c_{ij} = 0, \text{ si } i < j$.

Exo 4 : (voir Analyse numérique I. $Ax = b$).
si A est une matrice triangulaire).

Exo 5 : $\mathbb{R}^{n \times n}$ l'espace vectoriel des matrices carrées
d'ordre n .

1) On veut montrer que :

$$\dim = \text{dimension } \mathbb{R}^{n \times n} = n^2, n \geq 1.$$

Pour éviter les calculs, on prend uniquement $n=2$.
C'est à dire $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Pour montrer que $\dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = 4$, il faut trouver une base B de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ tq
 $\text{Card } B = 4 = 2^2$, (Card B sup $\mathbb{F}$).

B est une base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ si :

- B est une partie génératrice de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$
- B est une partie libre de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Remarquons que :

Si $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}$.

On a :

$$A = \overbrace{a_{11}}^{A_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \overbrace{a_{12}}^{A_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \overbrace{a_{21}}^{A_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \overbrace{a_{22}}^{A_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\forall A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$A = \sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

On pose $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} \Rightarrow B$

est une partie génératrice de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

• Si $A_i, i=1,2,3,4$ sont linéairement indépendants

$\Rightarrow B$ est une base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Si $\sum_{i=1}^4 \beta_i A_i = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta_i = 0, i=1,2,3,4$

donc A_i sont L.I (partie ~~génératrice~~ libre de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$).

$B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$\text{Card } B = 4 = 2^2.$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = 4 = 2^2.}$$

On peut le généraliser $\forall n \geq 2$.

On pose :

$$S^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T\}$$

l'ensemble des matrices carrées réelles symétriques d'ordre n .

- S^n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n \times n}$ si :
- $\forall X, Y \in S^n \Rightarrow X + Y \in S^n$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in S^n \Rightarrow \alpha X \in S^n$.

On a :

$$(X+Y)^T = X^T + Y^T = X + Y \in S^n.$$
$$(\alpha X)^T = \alpha X^T = \alpha X, \forall X \in S^n.$$

$$\Rightarrow \boxed{S^n \text{ est un s.v. de } \mathbb{R}^{n \times n}.}$$

$$AS^n = \{ X \in \mathbb{R}^{n \times n}; X = -X^T \} \text{ (anti-symétriques)}$$

De même AS^n est l.s.v. de $\mathbb{R}^{n \times n}$ si:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \forall X, Y \in AS^n \Rightarrow X + Y \in AS^n. \\ (2) \quad & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in AS^n \Rightarrow \alpha X \in AS^n. \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} \bullet (X + Y)^T &= X^T + Y^T = -X - Y \in AS^n. \checkmark \\ \bullet (X X)^T &= \alpha X^T = -\alpha X = \alpha(-X) \in AS^n. \checkmark \end{aligned}$$

Alors AS^n est un s.v. de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Calculons maintenant $\dim S^n$ et $\dim AS^n$.

Pour S^n , on construit une base B de S^n .

Soit $A \in S^n \Rightarrow A = A^t$ (symétrique).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ car } A = A^t.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A_1} + b \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A_2} + c \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A_3}$$

$B = \{ A_1, A_2, A_3 \} \subseteq S^n$ est une partie génératrice

de S^n .

Pour montrer que B est une base de S^n ,
on montre que A_1, A_2, A_3 sont linéairement
indépendants. -10-

B est libre n°.

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i = 0 \implies \alpha_i = 0, i=1, 2, 3.$$

On a :

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$\implies B$ est une base de S^2 ($n=2$).

B contient 3 matrices $A_1, A_2, A_3 \implies$

$$\dim S^2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}.$$

Pour $n \geq 2$,

$$\boxed{\dim S^n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

• $\dim \mathbb{R}^{n \times n} = n^2 = \dim S^n + \dim AS^n - \dim (S^n \cap AS^n)$

mais

$$\boxed{AS^n \cap S^n = \{0\}}$$

Car $X=0 \in S^n$

$X=0=-X \in AS^n$.

De plus, on sait $\boxed{\dim \{0\} = 0}$.

$$\implies \dim \mathbb{R}^{n \times n} = \dim S^n + \dim AS^n$$

$$\implies \boxed{\begin{aligned} \dim AS^n &= \dim \mathbb{R}^{n \times n} - \dim S^n \\ \dim AS^n &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}}$$