Analyse numérique matricielle

Enseignant : **Mohamed ACHACHE**
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences,
Université Sétif 1. 2013-2014

23 juin 2015

Table des matières

Chapitre 1

Background sur les matrices

1.1 Vecteurs

$\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) désigne le corps commutatif des nombres réels (resp. complexes).
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
$\alpha \in \mathbb{C}$: $\alpha = a + ib \Rightarrow \bar{\alpha} = a - ib$ est le conjugué de α.
Si $\alpha = \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ et si $\alpha = -\bar{\alpha} \Rightarrow \alpha$ est un imaginaire pur.

Définition 1.1.1 $\mathbb{R}^n$ *(resp.* $\mathbb{C}^n$*) est l'ensemble des vecteurs* x *formés de* n *composantes* $x_1, \ldots, x_n$ *où* $x_i \in \mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{C}$*) . La notation suivante :*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

indique un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^n$ *(resp. dans* $\mathbb{C}^n$*). Le vecteur transposé de* x *dans* $\mathbb{R}^n$ *est défini par :*

$$x^T = (x_1, \ldots, x_n),$$

tandis que son adjoint dans $\mathbb{C}^n$ *est défini par :*

$$x^* = \bar{x}^T = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n).$$

1.2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels et base d'un espace vectoriel

On munit $\mathbb{R}^n$(resp. de $\mathbb{C}^n$) par les deux opérations suivantes :

L'addition $z = x + y$ définie par : $z_i = x_i + y_i, 1 \leq i \leq n.$
La multiplication externe par un scalaire λ : $z = \lambda x$ défini par : $z_i = \lambda x_i, 1 \leq i \leq n.$

Alors $\mathbb{R}^n$(resp. $\mathbb{C}^n$) est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Pour éviter de considérer à chaque fois $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on notera par $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et de même par $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.
Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

sont des vecteurs particuliers de $\mathbb{K}^n$.

Définition 1.2.1 *Soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{K}^n$ ($\mathcal{F} \neq \emptyset$) un sous ensemble de $\mathbb{K}^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ si :*

$$\begin{array}{l} \forall x, y \in \mathcal{F} \quad : x + y \in \mathcal{F} \\ \forall x \in \mathcal{F} \ \ et \ \lambda \in \mathbb{K} \ : \lambda x \in \mathcal{F} \end{array}$$

Exemple 1 *Soient $x_1, \ldots, x_k$, $k-$vecteurs de $\mathbb{K}^n$. L'ensemble suivant :*

$$span \ \{x_i\}_{i=1}^{k} = \left\{ x \in \mathbb{K}^n \ : x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \ \ où \ \alpha_i \in \mathbb{K} \right\},$$

formé de toutes les ***combinaisons linéaires*** *de $x_1, \cdots, x_k$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.*
Si

$$\mathcal{F} = span \ \{x_i\}_{i=1}^{k},$$

on dit que $\mathcal{F}$ est engendré par $\{x_i\}_{i=1}^{k}$.

Définition 1.2.2 *On dit que les $k-$vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont linéairement indépendants si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0\,,\ \forall i = 1, \ldots, k.$$

Définition 1.2.3 *On appelle une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, une suite des vecteurs linéairement indépendants, qui engendrent $\mathbb{K}^n$.*

Exemple 2 *L'ensemble $\{e_i\}_{i=1}^n$ forme une base de $\mathbb{K}^n$ dite la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Cette suite est formée de n vecteurs, on dit donc que la* ***dimension*** *de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est n. On note $\dim \mathbb{K}^n = n$ avec $\dim\{0\} = 0$.*

Proposition 1.2.1 *Tout ensemble de $k-$vecteurs de $\mathbb{K}^n$ $(k < n)$ linéairement indépendants peut se compléter pour former une base de $\mathbb{K}^n$.*

1.3 Matrices

Définition 1.3.1 *Soient $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ deux espaces vectoriels. Une application f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ est dite linéaire si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{l} \forall x, y \in \mathbb{K}^n\, f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \in \mathbb{K}^n \ \ \text{et } \lambda \in \mathbb{K} \ \ : f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{array}$$

Soient $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $\{f_i\}_{i=1}^m$ une base de $\mathbb{K}^m$, alors l'application linéaire f est caractérisée par le tableau des coefficients a_{ij} tels que :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

On peut donc arranger tous les a_{ij} dans un tableau :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A est dite la matrice associe a l'application linéaire f repportée aux bases $\{e_i\}_{i=1}^n$ et $\{f_i\}_{i=1}^m$. Ainsi pour tout élément $x \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

et

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j).$$

La matrice A caractérise complètement l'application linéaire f, et elle permet de calculer les transformations par f de tous les vecteurs de $\mathbb{K}^n$. En effet, pour

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m,$$

on a :

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1, 2, \ldots, m \\ y &= Ax, \end{aligned}$$

où le produit $Ax = y$ étant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

cette dernière s'écrit comme :

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

où a_i est le i^{ieme}colonne de la matrice A.

Remarque 1.3.1 *Lorsque $m \neq n$, A est une matrice rectangulaire de type (m, n). On note l'ensemble des matrices de type (m, n) par $\mathbb{K}^{m\times n}$.*
Dans le cas où $m = n$, la matrice A est une matrice carrée d'ordre n et l'ensemble de ces matrices est noté par $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Remarque 1.3.2 *Si $f(x) = Id(x)$ l'application linéaire identité définie par :*

$$Id(x) = x \ : x \in \mathbb{K}^n$$

a pour matrice associée, la matrice carrée dite matrice identité d'ordre n :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

1.3.1 Image et noyau d'une matrice

Définition 1.3.2

$$ImA = \{y \in \mathbb{K}^m \mid \exists x \in \mathbb{K}^n, \ Ax = y\}.$$

Comme $y = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ où le vecteur a_i est le $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A, ImA est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes a_i :

$$ImA = span\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

Définition 1.3.3 *On appelle rang de la matrice A, noté $rg(A)$, le nombre* $\dim ImA$ *i.e. le nombre de vecteurs colonnes de A linéairement indépendants et on écrit :*

$$rg(A) = \dim \, ImA.$$

Définition 1.3.4

$$KerA = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}.$$

Théorème 1.3.1 *Pour toute matrice $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, on a :*

$$\dim KerA + \dim ImA = n.$$

Exercice 1.3.1 *Montrer que :*
1) *l'application linéaire f est surjective* $\Leftrightarrow rg(A) = m$.
2) *$KerA$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et que l'application f est injective* $\Leftrightarrow$ $KerA = \{0\}$.
3) *Soit l'application $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. Alors :*

$$\begin{array}{ccl} f \text{ est bijective sur } \mathbb{K}^n & \Leftrightarrow & f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective.} \\ & \Updownarrow & \\ A & \in & \mathbb{K}^{n\times n} \text{est régulière} \Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow KerA = \{0\}. \end{array}$$

1.4 Opérations élémentaires sur les matrices

- L'addition : $A + B = C$ si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$.
- La multiplication par un scalaire de $\mathbb{K}$: $\alpha A = C$, $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\forall i, j$.
- Le produit : $AB = C$, si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m \,\text{et}\, 1 \leq j \leq n.$$

- La matrice nulle notée par 0, dont tous les coefficients sont nuls et on a pour toute matrice A :

$$A + 0 = 0 + A = A.$$

Définition 1.4.1 *Soit f est une application linéaire bijective, alors elle admet une application inverse notée par f^{-1} telle que :*

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = Id(x)$$

c'est à dire :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

où A^{-1} désigne l'inverse de la matrice A associée à l'application f.

Exercice 1.4.1 *Montrer que l'application inverse f^{-1} de f est une application linéaire.*

1.5 Sous-matrices

Définition 1.5.1 *On appelle sous-matrice d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particuliers, si on supprime les $(n-k)$ dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée A d'ordre n, on obtient la sous-matrice principale d'ordre k*

Exemple 3 *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les 3 sous-matrices principales de A sont :

$$A_1 = (1)\ ,\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 = A\,.$$

1.6 Matrices semblables

Définition 1.6.1 *On dit que la matrice $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est semblable à la matrice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, s'il existe une matrice de passage S telle que :*

$$B = S^{-1}AS.$$

1.7 Matrices transposées, adjointes, othogonales, hermitiennes, unitaires et normales

Définition 1.7.1 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on appelle transposé de A noté $A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la matrice définie par :*

$$(a_{ij}^T) = a_{ji}\,, \forall i, j.$$

Définition 1.7.2 *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, on appelle A^* adjointe de A, la matrice définie par :*

$$a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}, \forall i, j.$$

Définition 1.7.3 *Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est :*
• ***symétrique*** *si* $A = A^T$
• ***Anti-symétrique*** *si* $A = -A^T$.
• ***normale réelle*** *si :* $AA^T = A^T A$.
• ***orthogonale*** *si* $AA^T = A^T A = I$ *c'est à dire* $A^{-1} = A^T$.
Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est :*
• ***hermitienne*** *si* $A = A^*$.
• ***Anti-hermitienne*** *si* $A = -A^*$.
• ***unitaire*** $AA^* = A^*A = I$, *c'est à dire* $A^{-1} = A^*$.
• ***normale*** *si* $AA^* = A^*A$.

On a les règles suivantes sur les opérations matricielles :
- $(A^T)^T = A$.
- $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

De même :
- $(A^*)^* = A$.
- $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$
- $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}\, A^*$
- $(AB)^* = B^* A^*$.
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Exercice 1.7.1 *Montrer que* $(AB)^* = B^* A^*$.

1.8 Déterminant et trace

Définition 1.8.1 *On appelle déterminant d'une matrice carrée d'ordre* n, *le nombre noté* $\det A$ *qui vaut :*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

$\mathbf{S}_n$ *est l'ensemble des* n *permutations de* $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Pour* σ *fixée,* $|\sigma|$ *désigne la signature de* σ .

Lemme 1.8.1 *Pour les matrices carrées d'ordre* n, *on a :*

$$\begin{cases} \det I = 1 \\ \det(A^T) = \det A \\ \det(A^T) = \det A \\ \det A^* = \overline{\det A} \\ \det(\alpha A) = \alpha^n \det A \ \textit{où} \, \alpha \in \mathbb{K} \\ \det(AB) = \det A \det B \\ \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \ \ \textit{si } A^{-1} \textit{ existe }. \end{cases}$$

Lemme 1.8.2 *Pour une matrice carrée* A, A^{-1}*existe si et seulement si* $\det A \neq 0$. A *est alors une matrice régulière. Sinon, elle est dite singulière. Le système linéaire* $Ax = b$ *a une solution unique pour tout* $b \in \mathbb{K}^n$ *si* $\det A \neq 0$ *alors* $x = A^{-1}b$.

Lemme 1.8.3 *Les matrices semblables ont même déterminant.*

Démonstration.

$$\det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \det A \det S = \det A.$$

Définition 1.8.2 *La trace est une application* $\boldsymbol{Tr}\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ *définie par :*

$$A = (a_{ij}) \mapsto \boldsymbol{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

où les a_{ii} *sont les éléments diagonaux de* A.

Lemme 1.8.4

$$\begin{cases} \boldsymbol{Tr}(I) = n \\ \boldsymbol{Tr}(A+B) = \boldsymbol{Tr}(A) + \boldsymbol{Tr}(B) \\ \boldsymbol{Tr}(\lambda A) = \lambda Tr(A) \\ \boldsymbol{Tr}(AB) = \boldsymbol{Tr}(BA) \\ \boldsymbol{Tr}(S^{-1}AS) = \boldsymbol{Tr}(A). \end{cases}$$

1.9 Quelques matrices particulières

1.9.1 Matrices diagonales

Définition 1.9.1 *Une matrice carrée* $A = (a_{ij})$ *est dite une matrice diagonale si* $a_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$.

Lemme 1.9.1 *Le déterminant d'une matrice diagonale est :*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Alors $\det A \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i, 1 \leq i \leq n.$

1.9.2 Matrices triangulaires

Définition 1.9.2 *Une matrice carrée* $A = (a_{ij})$ *est dite une matrice triangulaire :*

$$\begin{array}{ll} \textit{inférieure si :} & a_{ij} = 0 \ \ \textit{pour } i < j \\ \textit{supérieure si :} & a_{ij} = 0 \ \ \textit{pour } i > j. \end{array}$$

Lemme 1.9.2 *Le déterminant d'une matrice triangulaire est :*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Alors $\det A \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i, 1 \leq i \leq n.$

Lemme 1.9.3 *Soient* A *et* B *deux matrices carrées d'ordre* n, *triangulaires inférieures (resp. supérieures). Alors*

$$C = AB$$

est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) avec :

$$c_{ii} = a_{ii} b_{ii} \quad \textit{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Démonstration. Soit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

A et B étant deux matrices triangulaires inférieures, alors $a_{ik} = 0$ si $i < k$ et $b_{kj} = 0$ si $k < j$ cela implique que $c_{ij} = 0$ si $i < j$. Pour que $a_{ik} b_{kj} \neq 0$,il faut que $a_{ik} \neq 0$ et $b_{kj} \neq 0$, donc on doit avoir $i \geq k$ et $k \geq j$ ce qui entraine $i \geq j$. Pour $i = j$, le seul terme non nul de la somme est celui pour lequel $k = i = j$,alors $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.

Lemme 1.9.4 *Soit A une matrice carrée d'ordre n, triangulaire inférieure et régulière, et b un vecteur de dimension n, tel que $b_i = 0$ pour $i < k$ et $b_k \neq 0$. La solution x du système $Ax = b$ est telle que :*

$$\begin{cases} x_i = 0 & \text{pour } i < k \\ x_k = \frac{b_k}{a_{kk}} & \text{pour } i = k. \end{cases}$$

Démonstration. On a :

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j = b_i, 1 \leq i \leq n,$$

il implique

$$a_{ii} x_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right), 1 \leq i \leq n.$$

Si $b_i = 0$ pour $i < k$ et $b_k \neq 0$, alors la solution x est telle que :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-1} = 0 \text{ et } x_k = \frac{b_k}{a_{kk}}.$$

□

Lemme 1.9.5 *Soit A une matrice carrée triangulaire inférieure et régulière (resp. supérieure). Alors A^{-1} est également triangulaire inférieure régulière (resp. supérieure) et*

$$a_{ii}^{-1} = \frac{1}{a_{ii}}.$$

Démonstration. A^{-1}est l'inverse de $A \Leftrightarrow AA^{-1} = I$. Il vient que :

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow Ax^k = e^k, 1 \leq k \leq n,$$

où x^k est le $k^{ième}$ colonne de la matrice A^{-1}. Alors pour déterminer A^{-1}revient donc à resoudre n systèmes linéaires pour $b = e^k$, $1 \leq k \leq n$,où e^kdésigne le vecteur colonne d'ordre k de la base canonique de $\mathbb{K}^n$,et puis en appliquant le Lemme 8 à chaque système pour déterminer x^k**.** Après le calcul, il vient que pour la solution x^1 du système $Ax^1 = e^1$, n'a aucun composante nulle i.e., $x_i^1 \neq 0$ pour tout i avec $x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}$, mais pour le système $Ax^2 = e^2$, la solution x^2 admet $x_1^2 = 0$, $x_2^2 = \frac{1}{a_{22}}$ et $x_i^2 \neq 0$ pour tout $i = 3, \ldots, n$, et ainsi de suite pour le reste des systèmes. Ceci montre que A^{-1}est une matrice triangulaire inférieure avec $a_{ii}^{-1} = \frac{1}{a_{ii}}$. □

1.10 Matrices tridiagonales

Définition 1.10.1 *Une matrice carrée A est dite tridiagonale si A est de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i.e.,

$$a_{ij} = 0 \text{ si } |i-j| > 1.$$

1.11 Matrices blocs

Définition 1.11.1 *Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. L'écriture suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

où $A_{ij} \in \mathbb{K}^{n_i\times n_j}$ sont des sous-matrices de A, avec $\sum_{j=1}^{k} n_j = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$, s'appelle la décomposition par blocs de la matrice A. On exsige que les éléments diagonaux de A sont des matrices carrées.

Exemple 4 *Soit $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ telle que :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \\ 10 & 12 & 57 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice peut se décomposer par exemple comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \; \textit{et } A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 57 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou bien comme :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; A_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 10 & 12 & 57 \end{pmatrix} \; \textit{et } A_{22} = (1). \end{aligned}$$

Définition 1.11.2 *On dit qu'une matrice est triangulaire inférieure par blocs si et seulement si A peut s'écrire comme :*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

où les sous-matrices A_{ij} sont nulles pour $i > j$.

Lemme 1.11.1 *Le déterminant d'une matrice carrée triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des matrices diagonales A_{ii} i.e.,*

$$\det A = \prod_{i=1}^{k} \det A_{ii}.$$

Alors A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A_{ii} \neq 0 \; \forall i$.

1.12 Produits scalaires

Définition 1.12.1 *Soient x et y deux vecteurs dans $\mathbb{C}^n$, on définit leur produit scalaire hermitien par :*

$$\langle x, y \rangle = y^* x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \bar{y}_i.$$

Tandis que dans $\mathbb{R}^n$, *ce produit scalaire est défini par :*

$$\langle x, y\rangle = y^T x = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

Dans ce cas, on l'appelle le produit scalaire euclidien.

1.12.1 Propriétés principales du produit scalaire

- $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \forall x, y, z \in \mathbb{C}^n$.
- $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- $\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$, où $\bar{\lambda}$ est le conjugué de λ.
- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, où $\overline{\langle y, x\rangle}$ est le conjugué de $\langle y, x\rangle$.
- $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$ pour $x \neq 0$.

Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les propriétés restent valables sauf dans ces deux cas :

- $\langle y, \lambda x\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

1.13 Somme directe

Définition 1.13.1 *Soient* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{F}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{K}^n$. *On appelle somme directe de* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{F}$ *et on note* $\mathbb{K}^n = \mathcal{G} \oplus \mathcal{F}$ *: si pour tout vecteur* $x \in \mathbb{K}^n$ *se décompose d'une manière unique en un vecteur* x_1*de* $\mathcal{G}$ *et un vecteur* x_2 *de* $\mathcal{F}$ *tels que* $x = x_1 + x_2$.

Lemme 1.13.1

$$\mathbb{K}^n = \mathcal{G} \oplus \mathcal{F} \;\Leftrightarrow \mathbb{K}^n = \mathcal{G} + \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \{0\}\,.$$

Définition 1.13.2 *Deux vecteurs* x *et* y *de* $\mathbb{K}^n$ *sont dits orthogonaux lorsque :*

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Définition 1.13.3 *Deux sous-espaces vectoriels* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{F}$ *de* $\mathbb{K}^n$ *sont dits orthogonaux si :*

$$\forall x \in \mathcal{G}, \forall y \in \mathcal{F}\ \langle x, y\rangle = 0.$$

Définition 1.13.4 *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, le sous-espace orthogonal de $\mathcal{F}$ est défini par :*

$$\mathcal{F}^{\perp} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{F}\}.$$

Proposition 1.13.1 *Pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathbb{K}^n$. On a :*

1) $\mathcal{F}^{\perp}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$.
2) $\mathbb{K}^n = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\perp}$.
3) $\dim \mathcal{F}^{\perp} = n - \dim \mathcal{F}$.
4) $(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{F}$.

Définition 1.13.5 *Soit $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i=1}^n$ une base de $\mathbb{K}^n$. $\mathcal{B}$ est dite une base orthogonale de $\mathbb{K}^n$ si :*

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad si \quad i \neq j \ .$$

De plus, $\mathcal{B}$ est dite une base orthonormale si :

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

où δ_{ij} est le delta kronecker.

Remarque 1.13.1 *Si $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i=1}^n$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Alors on peut construire une base orthonormale de $\mathcal{B}$, en utilisant la procédure de $Gram - Schmidt$.*

Proposition 1.13.2 *Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.*

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \forall y \in \mathbb{K}^m \quad on \ a : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle.$$

Démonstration. On admet que : $(AB)^T = B^T A^T$ et $\overline{AB} = \bar{A}\ \bar{B}$, alors :

$$\langle x, A^* y \rangle = (A^* y)^* x = \overline{(\bar{A}^T\ y)}^T x = \bar{y}^T A x = y^* A x = \langle Ax, y \rangle.$$

Théorème 1.13.1 *Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. On a :*

$$(ImA)^{\perp} = KerA^* \ et \ ImA^* = (KerA)^{\perp}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(ImA)^{\perp} &= \{y \in \mathbb{K}^n \mid \langle y, Ax\rangle = 0,\ \forall x \in \mathbb{K}^n\} \\ &= \{y \in \mathbb{K}^n \mid \langle A^*y, x\rangle = 0,\ \forall x \in \mathbb{K}^n\} \\ &= \{y \in \mathbb{K}^n \mid A^*y = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}A^*.\end{aligned}$$

Pour montrer la deuxième égalité, appliquons la première relation à A^{**} :

$$\mathrm{Ker}\ A = (ImA^*)^{\perp}$$

donc

$$(\mathrm{KerA})^{\perp} = ImA^*.$$

□

1.14 Matrices de permutation

Définition 1.14.1 *Une permutation σ est une application bijective de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans lui même. L'application de σ à $\{1, 2, \ldots, n\}$ revient donc à réordonner les n nombres. On associe à σ l'application linéaire f telle que :*

$$f(e_i) = e_{\sigma(i)} \text{ pour } i = 1, \ldots, n$$

où $\{e_i\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. La matrice P qui représente f dans cette base est appelée la matrice de permutation.

Exemple 5 *Soit $n = 4$, et définissons σ par :*

i	1	2	3	4
$\sigma(i)$	3	2	4	1

alors $f(e_i)$ est définie comme suit :

$e_i \backslash f(e_i)$	$f(e_1)$	$f(e_1)$	$f(e_1)$	$f(e_1)$
e_1	0	0	1	0
e_2	0	1	0	0
e_3	1	0	0	0
e_4	0	0	1	0

et donc la matrice de permutation est donnée par :

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.14.1 *Soit P_σ une matrice de permutation. Montrer que P_σ est une matrice orthogonale, i.e., $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$.*

Remarque 1.14.1 *Lorsque on effectue une permutation σ de l'ordre des vecteurs de base d'une matrice carrée A, ce qu'on peut considérer comme un changement de base, on obtient une matrice B semblable à A i.e.,*

$$B = P_\sigma^{-1} A P_\sigma = P_\sigma^T A P_\sigma.$$

1.15 Matrices irréductibles

1.15.1 Graphe associé à une matrice et inversement

Soit A une matrice carrée, $A = (a_{ij})$ d'ordre n. A chaque colonne de la matrice on fait correspondre un sommet $\mathbf{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Un **arc** relie $\mathbf{S}_i$ à $\mathbf{S}_j$ si $a_{ij} \neq 0$.
Un **graphe** est formé de l'ensemble de sommets et de arcs.

Exemple 6 *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Son graphe associé est :

$$\bullet\mathbf{S}_1 \quad \longrightarrow \quad \bullet\mathbf{S}_2$$

$$\bullet\mathbf{S}_3 \quad \rightarrow \quad \bullet\mathbf{S}_4$$

A chaque sommet, on peut associer l'ensemble de voisins :

$$\mathcal{V}(\mathbf{S}_i) = \{\mathbf{S}_j, j \neq i, \ \ \mathbf{S}_i\mathbf{S}_j \ \text{ est un arc}\}.$$

Un chemin allant de $\mathbf{S}_i$ à $\mathbf{S}_j$ est une suite d'arcs, si elle existe, tel que :

$$(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_{i_1}), (\mathbf{S}_{i1}, \mathbf{S}_{i2}), \ldots, (\mathbf{S}_{ip}, \mathbf{S}_j),$$

soient des arcs du graphe.

Un graphe est dit fortement connexe s'il existe au moins un chemin allant de tout sommet $\mathbf{S}_i$ à tout sommet $\mathbf{S}_j$. Ainsi le graphe précédent est fortement connexe. Par contre la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son graphe associé est :

$$\begin{array}{ccc} \bullet\mathbf{S}_1 & \longrightarrow & \bullet\mathbf{S}_2 \\ & & \\ & & \bullet\mathbf{S}_3 \end{array}$$

Le garphe n'est pas fortement connexe car il n'ya pas de chemin allant de $\mathbf{S}_3$ à $\mathbf{S}_1$.

1.16 Matrices réductibles

Définition 1.16.1 *Une matrice carrée A d'ordre n est réductible si et seulement si :*
1- *Il existe une matrice de permutation P_σ telle que :*

$$P_\sigma^T A P_\sigma = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

où A_{11} et A_{22} sont deux matrices carrées d'ordre k et $n-k$, respectivement. où encore, il existe une partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en deux partitions d'indices $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \in \mathbf{I}$ et $j \in \mathbf{J}$.
2- *soit encore, il existe σ une permutation : $\{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{\mathbf{I}, \mathbf{J}\}$.*

Remarque 1.16.1 *La résolution du système linéaire $Ax = b$ est équivalent à :*

$$\begin{cases} A_{22}x_2 = b_2 \\ A_{11}x = b_1 - A_{12}x_2 \end{cases}$$

avec $x = (x_1, x_2),\ x_1 \in \mathbb{R}^p$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$, de même $b = (b_1, b_2)$. Autrement dit la résolution de ce système linéaire de taille n est réduite à la résolution de deux systèmes de tailles petites.

Remarque 1.16.2 *On a :*

$$\begin{aligned} (P_\sigma^T A P_\sigma)_{ij} &= \langle P_\sigma^T A P_\sigma e_j, e_i \rangle \\ &= \langle A P_\sigma e_j, P_\sigma e_i \rangle \\ &= \langle A e_{\sigma(j)}, e_{\sigma(i)} \rangle = a_{\sigma(i)\ \sigma(j)}. \end{aligned}$$

Exemple 7 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Comme $a_{21} = a_{23} = 0$,on obtient une partition de l'ensemble des indices $\{1, 2, 3\}$ en $\mathbf{I} = \{2\}$ et $\mathbf{J} = \{1, 3\}$, de sorte que :

$$a_{ij} = 0 \ \text{pour}\ i \in \mathbf{I}\ \text{et}\ j \in \mathbf{J}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (P_\sigma^T A P_\sigma)_{31} &= a_{\sigma(3)\ \sigma(1)} = 0, \\ (P_\sigma^T A P_\sigma)_{32} &= a_{\sigma(3)\ \sigma(2)} = 0,\ \text{pour}\ \sigma(3) \in \mathbf{I}, \sigma(1), \sigma(3) \in \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Ainsi pour le cas , $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) = 3$, on constate que :

$$\begin{aligned} P_\sigma^T A P_\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De même pour le cas $\sigma(1) = 3$ *et* $\sigma(2) = 1$*, on a :*

$$\begin{aligned} P_\sigma^T A P_\sigma &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème 1.16.1 *Une matrice carrrée d'ordre n est irréductible si et seulement si son graphe est fortement connexe.*

1.17 Matrices hermitiennes et définies positives

Lemme 1.17.1 *Soit* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *une matrice carrée hermitienne. Alors*

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^* x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} \Rightarrow \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

□

Définition 1.17.1 *Une matrice* ***hermitienne*** $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, est dite :*
• *semi-définie positive* ***(SDP)*** *si :*

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \langle Ax, x\rangle \geq 0,$$

• *définie positive* ***(DP)*** *si :*

$$\forall x \in \mathbb{C}^n - \{0\} : \langle Ax, x\rangle > 0.$$

• *semi-définie negative* ***(SDN)*** *si :*

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \langle Ax, x\rangle \leq 0,$$

• *définie négative* ***(DN)*** *si :*

$$\forall x \in \mathbb{C}^n - \{0\} : \langle Ax, x\rangle < 0.$$

Proposition 1.17.1 *Si A est une matrice hermitienne définie positive alors les sous matrices principales A_k d'odre $k = 1, 2, \ldots, n-1$, sont des matrices hermitiennes et définies positives. De plus les éléments diagonaux de la matrice A sont strictement positifs i.e. $a_{ii} > 0$ pour tout i.*

Démonstration. Soit A_k la sous matrice principale d'ordre k. Considérons le vecteur suivant :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T,$$

posons

$$y = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T.$$

Alors

$$0 < \langle Ax, x \rangle = \langle A_k y, y \rangle$$

ce qui démontre que A_k est une matrice hermitienne définie positive pour $1 \leq k \leq n-1$. Soit maintenant e_i le $i^{ième}$ vecteur de la base canonique :

$$\langle Ae_i, e_i \rangle = a_{ii} > 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

□

Exercice 1.17.1 *Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que la matrice A^*A est hermitienne semi-définie positive. De plus si A est régulière, alors A^*A est hermitienne définie positive.*

1.18 Matrices de projection

Définition 1.18.1 *On appelle un projecteur ou bien une matrice de projection, une matrice carrée telle que :*

$$P^2 = P.$$

Lemme 1.18.1 *Si P est un projecteur alors :*

$$\mathbb{K}^n = KerP \oplus ImP.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = x - Px + Px$ .On a : $Px \in ImP$, et $x - Px \in$Ker P,car :

$$P(x - Px) = Px - P^2x = Px - Px \ = 0$$

Ceci montre que :

$$\mathbb{K}^n = \text{Ker}P + ImP.$$

Soit maintenant $y \in$Ker$P \cap ImP$ alors $Py = 0$ et $y = Pz$ pour $z \in \mathbb{K}^n$. Comme P est une matrice de projection, on a :

$$y = Py = P^2z = Pz = 0 \ \Rightarrow y = 0.$$

Il vient que :

$$\mathbb{K}^n = \text{Ker}P \oplus ImP.$$

□

1.19 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 1.19.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle valeur propre de A un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lequel il existe un vecteur $x \neq 0$ de $\mathbb{C}^n$ appelé vecteur propre tel que :*

$$Ax = \lambda x.$$

1.19.1 Spectre d'une matrice

Le spectre de la matrice A, noté $\mathbf{Sp}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A i.e.,

$$\mathbf{Sp}(A) = \{\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ \ldots, \lambda_n(A)\}.$$

1.19.2 Rayon spectrale

Le rayon spectrale de la matrice A est défini par :

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i(A)| : \lambda_i(A) \in \mathbf{Sp}(A)\}.$$

Lemme 1.19.1 *1)*

$$\boldsymbol{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad et \quad \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \ .$$

2) A est inversible si et seulement si $0 \notin \boldsymbol{Sp}(A)$.

Exercice 1.19.1 *Montrer que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.*

Définition 1.19.2 *On appelle polynôme caractéristique de la matrice* A, *le polynôme de degré* n *:*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Les racines du $P_A(\lambda)$ *sont les valeurs propres de* A. *Comme ce polynôme admet* n *racines distinctes ou non, la matrice à* n *valeurs propres distinctes ou non. Si* λ *est un zéro de* P_A *de multiplicité* k,*on dit que la valeur propre* λ *est de multiplicité algébrique* k.

Lemme 1.19.2 *Les matrices semblables ont même polynôme caractéristique.*

Démonstration. Soit $B = S^{-1}AS$ une matrice semblable à A. Alors on a :

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \ = \det(S^{-1}AS - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) \\ &= \det(S^{-1}(A - \lambda I)S \\ &= \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Proposition 1.19.1 *Si* $Ax = \lambda x$, *alors :*

$$\begin{aligned} (A - \mu I)x &= (\lambda - \mu)x \ /\mu \in \mathbb{C} \ (\textit{décalage}). \\ A^k x &= \lambda^k x \\ A^{-1}x &= \frac{1}{\lambda}x \ \ \textit{si } A^{-1} \textit{ existe} \ . \end{aligned}$$

Démonstration.

2- Comme $A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$, on déduit par récurrence que $A^k x = \lambda^k x$.

3- De $Ax = \lambda x,$ si A^{-1} existe, $\lambda \neq 0,$ on obtient en multipliant à gauche par A^{-1} :

$$A^{-1}Ax = A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}x = Ix \Leftrightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x.$$

□

Théorème 1.19.1 *Soient A et $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Alors :*

$$\boldsymbol{Sp}(AB) = \boldsymbol{Sp}(BA).$$

Démonstration. Il suffit de prouver que $\mathbf{Sp}(AB) \subset \mathbf{Sp}(BA)$ et par symétrie on a l'autre inclusion. Soit $\lambda \in \mathbf{Sp}(AB)$, alors il existe un vecteur propre $x \neq 0$ tel que $ABx = \lambda x$:
1- Si $Bx \neq 0,$ alors $BA(Bx) = \lambda Bx$ (on applique B de deux cotés) d'où Bx est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda,$ ce qui montre que $\lambda \in \mathbf{Sp}(BA)$.
2- Si $Bx = 0,$ alors on a nécessairement que $\lambda = 0,$ cela implique que $0 \in \mathbf{Sp}(AB)$ et que $\det AB = 0.$ Comme $\det AB = \det BA = 0$. Cela implique que $0 \in \mathbf{Sp}(BA)$. □

1.20 Réduction des matrices

1.20.1 Diagonalisation

Définition 1.20.1 *Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. On dit que la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle existe une matrice de passage S telle que :*

$$S^{-1}AS = D \;\Leftrightarrow A = SDS^{-1}$$

où $D =$diag($\lambda_i(A)$) est une matrice diagonale avec $\lambda_i(A) \in \boldsymbol{Sp}(A)$ avec les colonnes de S sont les vecteurs propres de A associés à $\lambda_i(A)$. Autrement dit, A est diagonalisbale

Théorème 1.20.1 *Une matrice A est diagonalisable si et seulement si elle admet une base construite de n vecteurs propres.*

Corollaire 1.20.1 *Si A admet n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.*

Théorème 1.20.2 *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices A et B,carrées, de même ordre soient diagonalisables, commutent, et qu'elles aient les mêmes vecteurs propres.*

Exercice 1.20.1 *Montrer que la matrice appelée bloc de Jordan d'ordre $k > 1$, admet λ comme valeur propre de multiplicité k,*

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.
Indication : montrer qu'on ne peut pas construire la matrice de passage de vecteurs propres S i.e. J_λ n'admet pas n vecteurs propres associés à λ.

Définition 1.20.2 *On appelle une matrice de Jordan une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est un bloc de Jordan de valeur propre λ_i et d'ordre k_i.*

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_k(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

les valeurs propres λ_i ne sont pas nécessairement distinctes.

Théorème 1.20.3 *Toute matrice est semblable à une matrice de Jordan.*

1.20.2 Décomposition de Schur (trigonalisation)

Théorème 1.20.4 (Lemme de Schur) *Toute matrice carrée $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se décompose en :*

$$A = UTU^*$$

où U une matrice unitaire $(U^{-1} = U^*)$ et T une matrice triangulaire supérieure avec $t_{ii} = \lambda_i(A) \in \boldsymbol{Sp}(A)$.

Conséquence sur les matrices normales

Théorème 1.20.5 *Une matrice A est normale $(AA^* = A^*A)$ si et seulement si il existe une matrice unitaire U telle que :*

$$A = UDU^*$$

où D =diag($\lambda_i(A)$) avec $\lambda_i(A) \in \boldsymbol{Sp}(A)$. C'est à dire que toute matrice normale est diagonalisable.

Corollaire 1.20.2 *Une matrice hermitienne est diagonalisable. Son $\boldsymbol{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ i.e. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et les vecteurs propres associés à des différentes valeurs propres sont orthogonaux.*

Démonstration. A est une matrice hermitienne donc elle est normale car $AA = AA^* = AA$. D'après le *Théorème de Schur*, A est diagonalisable et il existe une matrice unitaire U telle que :

$$\begin{array}{rcl} A & = & UDU^*. \\ & \Downarrow & \\ A^* & = & UD^*U^*, \end{array}$$

où D =diag($\lambda_i(A)$) avec $\lambda_i(A) \in \mathbf{Sp}(A)$.
Comme $A = A^*$ on a : $D = D^*$, donc $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$ pour $i = 1, \ldots, n \Rightarrow \mathbf{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$. Soient maintenant λ_i et λ_j deux valeurs propres distinctes de A i.e. $i \neq j$ et soient x_i, x_j deux vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i, respectivement λ_j. Comme A est une matrice hermitienne et $\lambda_i \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \langle \lambda_i x_i, x_j \rangle = \langle Ax_i, x_j \rangle = \langle x_i, Ax_j \rangle = \langle x_i, \lambda_j x_j \rangle = \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle.$$

Donc

$$(\lambda_i - \lambda_j)\langle x_i, x_j \rangle = 0 \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

Alors x_i, x_j sont orthogonaux.

Corollaire 1.20.3 *Une matrice symétrique réelle est diagonalisable. Ses valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres sont orthogonaux.*

Preuve 1 *Le matrices réelles symétriques sont hermitiennes.*

Corollaire 1.20.4 *Une matrice unitaire est diagonalisable. Ses valeurs propres ont pour module égal **1**. Les vecteurs propres sont orthogonaux.*

Corollaire 1.20.5 *Une matrice anti-hermitienne est diagonalisable. Ses valeurs propres sont imaginaires pures et les vecteurs propres sont orthogonaux.*

Proposition 1.20.1 *Soit A une matrice hermitienne et définie positive. Alors il existe unique matrice hermitienne et définie positive, notée $A^{1/2}$ telle que :*

$$\left(A^{1/2}\right)^2 = A.$$

La matrice $A^{1/2}$ s'appelle la racine carrée de A.

Démonstration. A étant hermitienne et définie positive :

$$A = UDU^* \text{ où } D = \text{diag}(\lambda_i), \text{ avec } \lambda_i > 0.$$

Définissons $D^{1/2}$ =diag$(\lambda_i^{1/2})$ donc $(D^{1/2})^2 = D$. Alors

$$A^{1/2} = UD^{1/2}U^*$$

est une matrice hermitienne définie positive. De plus

$$(A^{1/2})^2 = UD^{1/2}U^*UD^{1/2}U^* = UDU^* = A.$$

Théorème 1.20.6 *Une matrice* ***hermitienne*** *est* ***définie positive*** *si et seulement si :*
1*- toutes* ***ses valeurs propres sont strictement positives i.e. Sp****$(A) \subset]0, +\infty[$.****2****- toutes ses* ***matrices principales*** *ont des* ***déterminants principaux*** *strictement positifs.*

Remarque 1.20.1 *Le résultat reste vrai pour une matrice symétrique réelle.*

Démonstration. Pour (**1**), soit (λ, x) un élément propre de la matrice A hermitienne et définie positive, on a :

$$\langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} > 0, \ (x \neq 0)$$

Réciproquement, si A est hermitienne, alors elle est normale et donc diagonalisable et on a : $A = UDU^*$avec D =diag(λ_i).

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \langle UDU^*x, x\rangle \\ &= \langle DU^*x, U^*x\rangle\end{aligned}$$

posons $y = U^* x$ qui est non nul car x est non nul.

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \langle Dy, y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 . \end{aligned}$$

Si $\lambda_i > 0$, alors $\langle Ax, x \rangle > 0$.
Pour (**2**), admis.

1.21 Localisation des valeurs propres

Le Théorème de *Ghershgorin* $-$ *Hadamard* que nous allons démontrer peremette de localiser les valeurs propres d'une matrice et de trouver une **majoration** de rayon spectrale de cette matrice.

Théorème 1.21.1 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Alors :*

$$\boldsymbol{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i$$

où

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n : \mathcal{D}_i = \mathcal{B}_f \left(a_{ii}, \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \right) = \left\{ z \in C : \, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \right\},$$

se sont les disques de Ghershgorin.

Démonstration. Soit $\lambda \in$Sp(A), alors il existe un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. Comme les coordonnées de x sont non nulles, il existe un $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_{i_0}|$ et on remarque que $|x_{i_0}| > 0$. Considérons maintenant le $i_0^{ème}$ ligne de $Ax = \lambda x$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j &= \lambda x_{i_0} \Rightarrow \sum_{j=1,\ j \neq i_0}^{n} a_{i_0 j} x_j = x_{i_0} (\lambda - a_{i_0 i_0}) \\ &\Rightarrow |x_{i_0}| \, |\lambda - a_{i_0 i_0}| = \left| \sum_{j=1,\ j \neq i_0}^{n} a_{i_0 j} x_j \right| \leq \sum_{j=1,\ j \neq i_0}^{n} |a_{i_0 j} x_j| \\ &\Rightarrow |\lambda - a_{i_0 i_0}| \leq \left| \sum_{j=1,\ j \neq i_0}^{n} a_{i_0 j} \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \right| \leq \sum_{j=1,\ j \neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}| . \end{aligned}$$

Car $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $|x_i| \leq |x_{i0}|$. On a donc :

$$\lambda \in \mathcal{D}_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i.$$

□

Exemple 8 *Soit la matrice complexe suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}.$$

Le spectre da A est localisé dans les 3 disques de Ghershgorin suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \mathcal{B}_f(1+i,\, 3) = \left\{ z \in C : |z - a_{11}| \leq \sum_{j=1, j\neq 1}^{3} |a_{1j}| = |i| + |2| = 3 \right\} \\ \mathcal{D}_2 &= \mathcal{B}_f(2+i,\, 4) = \left\{ z \in C : |z - a_{22}| \leq \sum_{j=1, j\neq 2}^{3} |a_{2j}| = |-3| + |1| = 4 \right\} \\ \mathcal{D}_3 &= \mathcal{B}_f(6,\ 2) = \left\{ z \in C : |z - a_{33}| \leq \sum_{j=1, j\neq 3}^{3} |a_{3j}| = |i| + |1| = 2 \right\}. \end{aligned}$$

Dessinons dans le plan complexe ces 3 disques.

Remarque 1.21.1 *Comme* $\det A = \det A^T$,*on montre facilement que*

$$\det(A^T - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A - \lambda I) \ i.e., \ \boldsymbol{Sp}(A) = \boldsymbol{Sp}(A^T).$$

En appliquant aussi le Théorème de Ghershgorin sur A^T, *on obtient une nouvelle région où sont localisées les valeurs propres de A. On a donc les 3 nouveaux disques de Ghershgorin :*

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}_f(1+i,\, 4),\ \mathcal{D}_2 = \mathcal{B}_f(2+i,\, 4) \ \text{ et } \mathcal{D}_3 = \mathcal{B}_f(6,\ 2).$$

Remarque 1.21.2 *La relation*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow |\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

donc

$$\rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Alors pour l'exemple précédent, on a :

$$\rho(A) \leq \max(5, 7, 8) = 8.$$

1.22 Matrices à diagonale dominante

Définition 1.22.1 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. A est dite:*
• *à* ***diagonale dominante*** *si :*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \ |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| .$$

• *à* ***diagonale strictement dominante*** *si :*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \ |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| .$$

• *à* ***diagonale fortement dominante*** *si : A est à diagonale dominante et il existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que :*

$$|a_{i_0 i_0}| > \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}| .$$

Proposition 1.22.1 *Si A est à diagonale strictement dominante, alors A est régulière.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $0 \notin$Sp(A). En effet, 0 n'appartient pas à aucun disque de *Ghershgorin* car :

$$|0 - a_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| .$$

□

Proposition 1.22.2 *Si A est à diagonal fortement dominante et irréductible, alors A est régulière.*

Démonstration. On l'admet sans démonstration et on présente l'exemple suivant : □

Exemple 9 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A est inversible car elle à diagonal fortement connexe et irréductible. En effet,
• *A est à diagonale fortement dominante puisque :*

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\} : |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{4} |a_{ij}|,$$

de plus il existe un $i_0 = 1$ (ou bien $i_0 = 4$) tel que $|a_{i_0 i_0}| = 2 > 1$.
• *A est irréductible car son graphe est fortement connexe. Alors A est régulière.*

1.23 Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Pour une matrice rectangulaire, la notion de valeurs propres n'a pas de signification. Néaumoins, on peut introduire un autre concept qui est celui de valeurs singulières.

Définition 1.23.1 *Soit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. On appelle valeurs singulières μ de A, les racines carrées positives ou nulles des valeurs propres de la matrice A^*A d'ordre n.*

Théorème 1.23.1 *Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ avec $rg(A) = r \leq \min(m, n)$. Il existe deux matrices carrées unitaires d'ordre m et n telles que :*

$$A = V\boldsymbol{\Sigma}U^*$$

où $\mathbf{\Sigma}$ *est une matrice triangulaire de format* (m, n),

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut inversement exprimer $\mathbf{\Sigma}$ *en fonction de* A *par la relation suivante :*

$$\mathbf{\Sigma} = V^* A U.$$

Remarque 1.23.1 *La relation :*

$$A = V \mathbf{\Sigma} U^*$$

s'appelle la décomposition en valeurs singulières de la matrice A*. Cette décomposition est toujours possible mais n'est pas unique. Il est cependant facile de déterminer de la matrice* A*, les matrices unitaires* U *et* V*. Il se trouve en effet qu'on peut prendre pour la matrice* U*, la matrice des vecteurs propres singulières c'est à dire la matrice de passage de diagonalisation de la matrice hermitienne* A^*A*. Si on appelle* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *ces vecteurs propres, alors on définit* r *vecteurs propres* $v_1, v_2, \ldots, v_r$*, en posant*

$$v_i = \frac{1}{\mu_i} A u_i \text{ pour } 1 \leq i \leq r,$$

si $r < m$*, on complète ensuite les* v_i *obtenus afin de former une base orthonormée. Les* v_i *constituent les colonnes de* V*.*

Exemple 10 *Soit* $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ *telle que :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Calculer* $rg(A)$.
- *Calculer les valeurs singulières de* A.
- *Donner le* ***SVD*** *de* A.

Solution : on a :

$$rg(A) = r \leq \min(m, n) = m = 2,$$

car les deux lignes de A sont linéairement indépendants.

• On calcule les valeurs propres de la matrice $A^T A$, on a :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $A^T A$ est :

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 22\lambda^2 - 120\lambda = -(\lambda - 12)(\lambda - 10)\lambda.$$

Alors

$$\mathbf{Sp}(A^T A) = \{\lambda_1 = 12,\ \lambda_2 = 10 \,\text{et}\ \lambda_3 = 0\}.$$

Les valeurs singulières non nulles de $A^T A$ sont les racines carrées positives, donc :

$$\mu_1 = \sqrt{12} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{10}.$$

La matrice

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

La diagonalisation de la matrice $A^T A$ conduit aux vecteurs propres suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc la matrice orthogonale U :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Il ne reste qu'à calculer les vecteurs propres v_1 et v_2 par $v_i = \frac{1}{\mu_i} A u_i,\ i = 1, 2$. On trouve :

$$v_1 = \frac{1}{\mu_1} A u_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

puis

$$v_2 = \frac{1}{\mu_2} A u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Alors

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

et on vérifie que le produit $V\mathbf{\Sigma}U^T$ redonne bien la matrice de départ A :

$$\begin{aligned} V\mathbf{\Sigma}U^T &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Normes et suite des matrices

2.1 Normes vectorielles

Définition 2.1.1 *Une application* $\|.\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ *est dite une norme vectorielle si elle vérifie les conditions suivantes :*

1) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n$	*et* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$	*positivité*
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$	$\forall \lambda \in \mathbb{C}^n, \forall x \in \mathbb{C}^n.$	*homogénité*
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$	$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^n.$	*inégalité triangulaire.*

Exemple 11 *Les applications suivantes sur* $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1)} \forall x \in \mathbb{C}^n & \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \mathbf{2)} \forall x \in \mathbb{C}^n & \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\langle x, x\rangle} \\ \mathbf{3)} \forall x \in \mathbb{C}^n & \|x\|_\infty = \max_i |x_i|\,, \end{array}$$

sont des normes vectorielles sur $\mathbb{C}^n$.

Proposition 2.1.1 *Inégalité de* $Cauchy - schwarz$

$$\forall x,\ y \in \mathbb{C}^n :\ |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2\,\|y\|_2\,.$$

Théorème 2.1.1 *Dans* $\mathbb{C}^n$ *(espace vectoriel de dimension finie sur le corps* $\mathbb{C}$ *), toutes les normes vectorielles sont équivalentes i.e.,*

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ tels que : } \alpha\,\|x\|_i \leq \|x\|_j \leq \beta\,\|x\|_i\,.$$

Exercice 2.1.1 *Montrer que les 3 normes vectorielles* $\|x\|_i\,, i = 1, 2, \infty$, *sont équivalentes.*

2.2 Normes matricielles

Définition 2.2.1 *Une application* $\|.\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ *est dite une norme matricielle si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{array}{lll}
\textbf{a)}\ \forall A \neq 0, & \|A\| > 0 & \text{et } \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0. \\
\textbf{b)}\ \forall \alpha \in \mathbb{C} & \|\alpha A\| & = |\alpha|\ \|A\|. \\
\textbf{c)}\ \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n} & \|A + B\| & \leq \|A\| + \|B\|. \\
\textbf{d)}\ \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n} & \|AB\| & \leq \|A\|\ \|B\|.
\end{array}$$

2.2.1 Normes subordonnées

Définition 2.2.2 *Soit* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *et étant donnée une norme vectorielle sur* $\mathbb{C}^n$*.On appelle norme* ***subordonnée*** *à la norme vectorielle, le nombre*

$$\|A\| = \sup_{0\neq x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{0\neq x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Proposition 2.2.1 *Soit* $\|..\|$ *une norme matricielle subordonnée sur* $\mathbb{C}^{n\times n}$*. Alors*

1)

$$\|Ax\| \leq \|A\|\ \|x\|,\ \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

2) *Pour toute matrice* A*, la norme* $\|A\|$ *est aussi définie par :*

$$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|=1} \|Ax\|.$$

3) *Il existe un* $x_0 \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ *,tel que :*

$$\|A\| = \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}.$$

4) *Pour toute norme subordonnée,*

$$\|I\| = 1.$$

5) *Toute norme subordonnée est une norme matricielle.*

Démonstration. **1)** Par définition :

$$\|A\| = \max_{0\neq x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Leftrightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\ \|x\|,\ \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

2) Soit $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$,posons $y = \frac{x}{\|x\|}$, alors $\|y\| = 1$ et on a :

$$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|y\|=1} \|Ay\| .$$

3) Comme l'application f définie sur $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{C}^n$ (car elle est le composé de deux fonctions continues i.e., $x \mapsto Ax \mapsto \|Ax\|$) sur la sphère unité $S_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\}$ qui est compacte dans $\mathbb{C}^n$(bornée et fermée). Alors d'après le $Théorème\ \ de\ Weirstrass$: toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{C}^n$, atteint ses bornes alors il existe un $x_0 \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tel que :

$$\|A\| = \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}.$$

4) Pour toute norme subordonnée, on a :

$$\|I\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|=1} \|Ix\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|=1} \|x\| = 1.$$

5) Il faut démontrer que la définition de $\|A\|$ répond aux quatres propriétés de la norme matricielle.
a) Si $A\ = 0$, alors $Ax = 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$, donc

$$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|=1} \|Ax\| = 0.$$

Réciproquement, si

$$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|=1} \|Ax\| = 0,$$

alors

$$\|Ax\| = 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n$$

donc

$$A = 0.$$

b)

$$\|(\alpha A)\, x\| = \|\alpha Ax\| = |\alpha|\, \|Ax\| \Rightarrow \max_{\|x\|=1} \|(\alpha A)\, x\| = |\alpha| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

c)

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| ,$$

donc

$$\max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| \leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| .$$

d) Soient $A, B \ \in \mathbb{C}^{n\times n}$, on a :

$$\|AB\| = \max_{\|x\|=1} \|ABx\| .$$

Or $\forall x \in \mathbb{C}^n$,

$$\|ABx\| \leq \|A\| \ \|Bx\| \leq \|A\| \ \ \|B\| \ \ \|x\| \leq \|A\| \ \|B\| .$$

On déduit que $\|.\|$ est norme matricielle.

Proposition 2.2.2 *Pour toute matrice A de $\mathbb{C}^{n\times n}$. On a :*

$$\begin{aligned} \mathbf{1)}\ \|A\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ \mathbf{2)}\ \|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ \mathbf{3)}\ \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^*A)} = \mu_{\max}(A), \end{aligned}$$

où $\mu_{\max}(A)$ est la plus grande valeure singulière de A.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\|_\infty = 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \, \|x\|_\infty \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| . \end{aligned}$$

Cela nous amène à l'inégalité suivante :

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Montrons maintenant que l'inégalité dans l'autre sens. Comme le maximum est atteint, alors il existe un $i_0 \in \{1, 2, \dots n\}$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,,$$

de même il existe un x^{i_0} construit comme :

$$x_j^{i_0} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{i_0 j} \ge 0; \\ 0 & \text{si} \quad a_{i_0 j} < 0, \end{cases}$$

avec $\|x^{i_0}\|_\infty = 1$. On vérifie facilement que :

$$\left\|Ax^{i_0}\right\| = \max_{1\le i\le n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{i_0}\right| \ge \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{i_0}\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Cela implique

$$\|A\|_\infty \ge \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \ge \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,,$$

d'où

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Pour (2), la démonstration se fait de la même manière à celle de la norme infinie et on constate que $\|A\|_\infty = \|A^*\|_1$.
3) On a :

$$\begin{aligned} \|A\|_2^2 &= \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \langle Ax, Ax\rangle \\ &= \max_{\|x\|_2=1} \langle A^*Ax, x\rangle \end{aligned}$$

Comme A^*A est une matrice hermitienne semi définie positive alors il existe une matrice diagonale D :=diag$(\lambda_i(A^*A))$ et une matrice unitaire U telles que $A^*A = U^*DU$. De plus $\mathrm{Sp}(A^*A) \subseteq \mathbb{R}_+$ i.e. les valeurs propres λ_i de A^*A sont réelles et positives. Par suite pour tout $x \neq 0$, avec $\|x\|_2 = 1$, on a :

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle U^*DUx, x\rangle = \langle DUx, Ux\rangle = \langle Dy, y\rangle \quad \text{où } y = Ux.$$

Alors

$$\langle Dy, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 \leq \lambda_{\max}(A^*A) \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = \lambda_{\max}(A^*A) \|y\|_2^2 .$$

D'autre part :

$$\|y\|_2^2 = \|Ux\|_2^2 = \|x\|_2 = 1$$

il vient

$$\|Ax\|_2^2 \leq \lambda_{\max}(A^*A) \ , \forall x \neq 0$$

En prenant la racine carrée on trouve

$$\|Ax\|_2 \leq \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} \ = \mu_{\max}(A), \ \forall x \neq 0$$

ce qui donne

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \leq \mu_{\max}(A).$$

Considérons à présent le vecteur propre x^0 avec $\|x^0\|_2 = 1$, de la matrice A^*A associé à la plus grande valeur propre en module

$$\lambda_{\max}(A^*A) = |\lambda_{\max}(A^*A)| = \rho(A^*A),$$

ce qui implique

$$\left\|Ax^0\right\| = \sqrt{\rho(A^*A)} \left\|x^0\right\|_2 = \mu_{\max}(A) \left\|x^0\right\|_2 = \mu_{\max}(A).$$

Il vient que :

$$\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 \geq \left\|Ax^0\right\|_2 = \mu_{\max}(A).$$

Ce qui donne

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \mu_{\max}(A).$$

Corollaire 2.2.1 *Soit* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,
a)

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2 .$$

b) *Si* A *est* ***hermitienne*** *. Alors :*

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \rho(A^*).$$

Démonstration. **a)** Comme $\mathbf{Sp}(A^*A) = \mathbf{Sp}(AA^*)$ alors $\rho(AA^*) = \rho(A^*A)$. Cela implique $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.
b) Comme A est **hermitienne** alors $A = A^*$, et on a :

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \rho(A^2) = \rho(A)^2$$

Il vient $\|A\|_2 = \rho(A)$. Comme $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 \Rightarrow \rho(A) = \rho(A^*)$.

Exercice 2.2.1 *Montrer que si* A *est normale alors* $\|A\|_2 = \rho(A)$.

2.2.2 Normes non subordonnées

Définition 2.2.3 *On appelle norme de Schur (ou Frobénius) de* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,*le nombre :*

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} .$$

La norme de Frobenius $\|A\|_F$ est une norme matricielle **non subordonnée**. Comme $\mathbb{C}^{n\times n}$est isomorphe à $\mathbb{C}^{n^2}$ car :

$$A \mapsto \mathbf{Vec}\, A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$$

où a_i sont les colonnes de la matrice A arrangés de a_1 jusqu'à a_n. Alors $\|A\|_F$ n'est autre que la norme euclidienne $\|\mathbf{Vec}\ A\|_2$. IL reste donc à démontrer la $4^{ème}$propriété de norme matricielle. En effet, pour $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{kj}|\right)^2 ,$$

Il vient de l'inégalité de $Cauchy - Schwarz$:

$$\begin{aligned} \|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \sum_{k=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2 . \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\|I\|_F = \sqrt{n}, n \geq 2,$$

alors $\|A\|_F$ n'est pas subordonnée.

Théorème 2.2.1 *Soit* $\|.\|$ *une norme matricielle. Alors pour* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, *on a :*

$$\rho(A) \leq \|A\| .$$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de la matrice $A,$ alors il existe un vecteur propre $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$.

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \; \|x\|$$

donc clairement, on a $|\lambda| \leq \|A\|$. Ce qui implique $\rho(A) \leq \|A\|$.

Théorème 2.2.2 *Soit* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *et* $\varepsilon > 0$. *Il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que :*

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Démonstration. D'après le $Th\acute{e}or\grave{e}me\,de\ Schur$, il existe une matrice unitaire telle que U^*AU soit triangulaire supérieure.

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1n} \\ & \lambda_2 & t_{21} & \ldots & t_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$sont les valeurs propres de A. A tout scalaire $\delta \neq 0,$ on va considerer la matrice :

$$D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \delta & & 0 & \\ & & \delta^2 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \delta^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(UD_\delta)^* A (UD_\delta) = D_\delta^{-1} U^* A U D_\delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{12} & \delta t_{13} & \cdots & \delta^{n-1} t_{1n} \\ & \lambda_2 & & \cdots & \delta^{n-2} t_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \lambda_{n-1} & \delta t_{n-1n} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $\varepsilon > 0$,on fixe $\delta > 0$ tel que :

$$\sum_{j=i+1}^{n} \left| \delta^{j-i} t_{ij} \right| \leq \varepsilon \quad \forall 1 \leq i \leq n-1.$$

L'application

$$\|.\| : B \in \mathbb{C}^{n \times n} \to \|B\| = \|(UD_\delta)^* B (UD_\delta)\|_\infty$$

est une norme matricielle subordonnée par la norme vectorielle qui a tout $x \in \mathbb{C}^n \to \|(UD_\delta)^* x\|_\infty$. Alors

$$\|A\|_\infty = \left\| D_\delta^{-1} U^* A U D_\delta \right\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

2.3 Suite de matrices

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On va etudier la convergence d'une suite formée des puissances successives de A,i.e. $\lim_{k \mapsto \infty} A^k$ où

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

Rappelons que $\lim_{k \mapsto \infty} A^k = 0$ si et seulement si $\lim_{k \mapsto \infty} a_{ij}^k = 0$, $\forall i, j$ ce qui équivalent à $\lim_{\ k \mapsto \infty} \left\| A^k \right\|$ pour tout norme matricielle.

Théorème 2.3.1

$$\lim_{k\mapsto\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1.$$

Démonstration 1 *Soit* $\lambda \in \boldsymbol{Sp}(A)$ *alors il existe un* $x \neq 0$ *vecteur propre de* A *tel que*

$$Ax = \lambda x.$$

Il vient d'après la Proposition 5,

$$A^k x = \lambda^k x.$$

Donc

$$\lim_{k\mapsto\infty} A^k = 0 \;\Leftrightarrow\; \left|\lambda^k\right| = |\lambda|^k < 1 \Leftrightarrow (\max_{\lambda} |\lambda|)^k < 1 \Leftrightarrow \rho(A) < 1.$$

Théorème 2.3.2 *Soit* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $\lim_{k\mapsto\infty} A^k = 0$
2) $\lim_{k\mapsto\infty} A^k x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
3) $\rho(A) < 1$
4) $\|A\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée.*

Démonstration. **(1)** $\Rightarrow$ (**2**). Soit $\|.\|$ une norme vectorielle, et $\|.\|$ la norme matricielle subordonnée correspondante. Comme

$$\left\|A^k x\right\| \leq \left\|A^k\right\| \|x\|$$

donc

$$\lim_{k\mapsto\infty} A^k x = 0.$$

(2)$\Rightarrow$**(3)**. Par l'absurde : on suppose que $\rho(A) \geq 1$.On peut trouver un $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x,\ |\lambda| \geq 1$. Comme

$$A^k x = \lambda^k x$$

alors il est impossible que $\lim_{k\mapsto+\infty} A^k x = 0$.
(3)$\Rightarrow$**(4).** Appliquons le *Théorème* 15, il existe auu moins une norme matricielle subordonnée telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$,il suffit donc prendre par exemple $\varepsilon = \frac{1-\rho(A)}{2} > 0$, cela implique $\|A\| < 1$.
(**4**) $\Rightarrow$ (**1**). On applique l'inégalité $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$ pour une norme subordonnée.

Théorème 2.3.3 *Soient $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$et $\|.\|$ une norme subordonnée. Alors :*
1)

$$\lim_{k\mapsto+\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} = \rho(A).$$

2) *La série $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$converge vers $(I-A)^{-1} \Leftrightarrow \rho(A)<1$.*

Démonstration. (**1**) D'après le $Théorème$ 14**,** on a $\rho(A) \leq \|A\|$. D'autre part, $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$, donc

$$\rho(A) \leq \left\|A^k\right\|^{1/k},\ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On va montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \text{ tel que } k \geq k_0 \Rightarrow \left\|A^k\right\|^{1/k} \leq \rho(A)+\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0,$ on définit la matrice A_ε par :

$$A_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A)+\varepsilon}.$$

On sait que $\rho(A_\varepsilon) < 1$. Donc d'après le $Théorème$ 15, on a

$$\lim_{k\mapsto+\infty} A_\varepsilon^k = 0,$$

donc :

$$\exists k_0 \text{ tel que } k \geq k_0 \Rightarrow \left\|A_\varepsilon^k\right\| = \frac{\left\|A^k\right\|}{(\rho(A)+\varepsilon)^k} \leq 1$$

i.e.

$$\left\|A^k\right\|^{1/k} \leq \rho(A)+\varepsilon.$$

2) ($\Rightarrow$) on sait que si la série $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$converge alors le terme général $A^k \to 0$ si $k \mapsto +\infty$ donc $\rho(A) < 1$.
($\Leftarrow$) $\rho(A) < 1 \Rightarrow 1 \notin \mathbf{Sp}(A)$ donc $I-A$ est inversible.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} A^k = I + A + A^2 + \ldots + A^n \\ AS_n &= A\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) = A + A^2 + \ldots + A^{n+1}. \end{aligned}$$

Calculons $S_n - AS_n$,on a :

$$(I - A)S_n = I - A^{n+1},$$

cela implique :

$$S_n = (I - A)^{-1}(I - B^{n+1}).$$

Donc :

$$\left\|S_n - (I - A)^{-1}\right\| \leq \left\|(I - A)^{-1}\right\| \left\|A^{n+1}\right\| \to 0 \text{ quand } n \mapsto +\infty$$

et par conséquent :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = (I - A)^{-1}.$$

Chapitre 3

Conditionnement

Supposons qu'on veut résoudre le système

$$Ax = b$$

où A est une matrice donnée inversible et $b \in \mathbb{C}^n$. En réalité cette résolution n'est jamais exacte, elle est entachée d'erreur qui peuvent provenir : les coefficients des données A et b sont trouvés par des mesures (experimentales) ou bien avec des calculs. La représentation des chiffres par l'ordinateur conduit à des erreurs sur ces coefficients. Alors : On ne résout pas exactement le système d'origine $Ax = b$ mais le système approché $(A + \Delta A)y = b + \Delta b$.
Question : que peut-on dire sur $y - x$?

Exemple 12 *(**Wilson**).*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

et

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix}, \quad b + \Delta b = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}, \quad \Delta b = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} Ax &= b \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ (A+\Delta A)y &= b \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -11 \end{pmatrix} \\ & \quad et \\ Az &= b + \Delta b \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} -81 \\ -137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*On remarque, une toute petite modification sur les coefficients de A et b engendre une grande modification sur la solution x. On se rend ainsi compte qu'une imprécison dans le calcul numérique peut conduire à des résultats erronés. On dit dans ce cas la matrice A est **mal conditionnée.***

Définition 3.0.1 *Conditionnement d'une matrice. Si $\|.\|_p$ est une norme matricielle subordonnée, on appelle conditionnement d'une matrice inversible $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ le nombre :*

$$Cond_p(A) = \|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p$$

où $p = 1, 2, \infty$.

Proposition 3.0.1 *1-$Cond(A) \geq 1$*
2- $Cond(A) = Cond(A^{-1})$
3- $Cond(\alpha A) = Con(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.
4- $Cond_2(A) = \frac{\mu_{\min}(A)}{\mu_{\max(A)}}$ où $\mu_{\max(A)} \geq \mu_{\min}(A) > 0$ désignent respectivement la

plus petite et la plus grande valeur singulière de A.
5- Si A est une matrice hermitienne, $Cond_2(A) = \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min_i|\lambda_i(A)|}$ *où* $\lambda_i \in Sp(A)$.
6- Si A est une matrice unitaire, $Cond_2(A) = 1$.
7- $Cond_2(UA) = Cond_2(AU) = Cond_2(A)$ *pouur toute matrice* U *unitaire. C'est à dire que* $Cond_2$ *est invariant par une transformation unitaire.*

3.1 Résultats principaux

Théorème 3.1.1 *Soit A une matrice carrée inversible. Soient* x *et* $x+\Delta x$, *les solutions de* $Ax = b$ *et* $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, *respectivement. Alors*
1)

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq Cond(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

2) Cette inégalité est optimale : pour une matrice A donnée, on peut trouver $b \neq 0$ *et* $\Delta b \neq 0$ *tel qu'elle deviennent égalité.*

Démonstration. On a :
1) de

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b \Rightarrow A\Delta x = \Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b,$$

que

$$\|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \ \|\Delta b\| \qquad (*)$$

et d'autre part $Ax = b$ donc :

$$\|b\| \leq \|A\| \ \|b\| \qquad (**)$$

On déduit de (*) et (**) que :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

2) Soit maintenant A fixée, alors il existe Δb tel que $\|A^{-1}\Delta b\| = \|A^{-1}\| \ \|\Delta b\|$. Comme

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow \|\Delta x\| = \left\|A^{-1}\right\| \ \|\Delta b\| .$$

D'autre part, il existe un x tel que

$$\|b\| = \|A\| \ \|x\| .$$

On a donc

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Théorème 3.1.2 *Soit A une matrice carrée inversible. Soient x et $x+\Delta x$, les solutions de $Ax = b$ et $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b$,respectivement. Alors*
1)

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \leq Cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

2) *Cette inégalité est optimale : pour une matrice A donnée, on peut trouver $b \neq 0$ et $\Delta A \neq 0$ tel qu'elle deviennent égalité.*

Démonstration. **1)** On a :

$$\begin{aligned}
(A+\Delta A)(x+\Delta x) &= b = Ax \\
&\Downarrow \\
Ax + A\Delta x + \Delta A(x+\Delta x) &= Ax \\
&\Downarrow \\
\Delta x &= -A^{-1}\Delta A(x+\Delta x) \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\Delta A\| \|x+\Delta x\| \\
&\Downarrow \\
\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} &\leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.
\end{aligned}$$

2) (voir le livre de Ciarlet).