UFA Sétif 1, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences. Master I: Option : Optimisation et contrôle. Module : Analyse Matricielle.2022/2023

Série d'exercices N°1

Exercice 1 *Soit* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *une application linéaire et* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *sa matrice associé dans une base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{K}^n$. *Montrer que :.*
1- A est injective $\Leftrightarrow KerA = \{0\}$.
2-A est surjective $\Leftrightarrow ImA = \mathbb{K}^n$.
3- A bijective$\Leftrightarrow$ *A injective* $\Leftrightarrow$ *A surjective.*
4- Montrer que l'application inverse f^{-1} *de* f *est une application linéaire.*

Exercice 2 *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *et* $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
1- Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.
2- Tr(AB) =Tr(BA).

Exercice 3 *Soit* $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $U = (u_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *deux matrices triangulaires inférieures (respectivement supérieures)*
Montrer que la matrice $A = TU$ *est également triangulaire inférieure (respectivement supérieure).*

Exercice 4 *Soit* $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice régulière et triangulaire inférieure.*
1- Soit $b = (b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant :*

$$\exists k,\ 2 \leq k \leq n,\ \textit{tel que } b_i = 0 \quad \textit{pour } i < k.$$

On considrère le système linéaire $(S) : Tx = b$.
Trouver un algorithme pour calculer la solution $x = (x_i)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^n$ *du système* (S) *en fonction de* b *et de* T.
2- En déduire que T^{-1}*est triangulaire inférieure. Quels sont ses éléments diagonaux?*

Exercice 5 *On considère,* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre* n *et les ensembles suivants de* $\mathbb{R}^{n\times n}$*:*

$$\mathbb{S}^n = \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : X = X^T\right\}$$

et

$$A\mathbb{S}^n = \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : X = -X^T\right\},$$

des matrices symétriques et antisymétriques, respectivement. Montrer que :
1- $\dim \mathbb{R}^{n\times n} = n^2$.
2- $\mathbb{S}^n$ *et* $A\mathbb{S}^n$ *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^{n\times n}$.
3-$\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{S}^n \oplus A\mathbb{S}^n$.
4- $\dim \mathbb{S}^n = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim A\mathbb{S}^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 6 *Soit* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Montrer que :*
1- $\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^m : \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.
2- $Im\ A^* = (KerA)^{\perp}$ *et* $Ker\ A^* = (ImA)^{\perp}$.
3- $rg(A) = rg(A^*)$.

Exercice 7 *Soit* σ *une permutation de* $\{1, 2, 3, 4\}$ *dans lui même définie par :*

i	*1*	*2*	*3*	*4*
$\sigma(i)$	*2*	*3*	*4*	*1*

1- Déterminer la matrice de permutation P_σ *associe à* σ.
2- Déterminer σ^{-1} *la permutation inverse de* σ.
3- Montrer que $P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$.
4- Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Montrer que A et B sont des matrices de permutations et déduire les permutations asscocies.
2- Déduire les matrices inverses de A et B ainsi leurs permutations inverses σ^{-1}.
3- Ertant donnée une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *,montrer que :*

$$(P_\sigma A P_\sigma^T)_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

où P_σ *est une matrice de permutation associe à* σ.

Exercice 8 *Considérons les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etudier l'irréductibilité de ces matrices.

Exercice 9 *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1- Montrer que la matrice A est réductible.
2- Déterminer toutes les matrices de permutations P_σ telles que A se réduit à la forme (matrice bloc) :

$$P_\sigma^T A P_\sigma = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 *Soit A une matrice hermitienne définie positive ($A \in \mathbb{C}^{n\times n}$). Montrer que :*
1-A est régulière. (Donner un contre exemple pour montrer que si A est régulière elle n'est pas forcément définie positive) .
2- Les sous matrices principales A_k ($k = 1, \dots, n-1$) de A sont hermitiennes et définies positives et de plus $a_{ii} > 0$ pour tout i (a_{ii} sont les éléments diagonaux de A).
3- Considérons les matrices A^2et A^3. Montrer qu'elles sont hermitiennes et définies positives.
3-Soit B une matrice hermitienne définie positive. Que peut-on dire pour les matrices suivantes : $A + B$, $A - B$?

Exercice 11 *Soit $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et $y^* x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ désigne le produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^n$.*
1- *Soit $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matrice définie par $P = uu^*$. Montrer que :*
a. *P est une matrice hermitienne semi-définie positive.*
b. *$rg(P) = 1$ et déduire que P n'est pas régulière.*
c. *Si u est choisi tel que $u^* u = 1$ (unitaire), alors P est une matrice de projection.*
2- *Considérons maintenant la matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donnée par : $H = I - \alpha P$ où $P = uu^{T\cdot}$.*
d. *Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice H est -elle orthogonale?*
e. *Déduire que H est régulière et puis sans calcul déduire son inverse.*
f. *Calculer $Sp(H)$ et $\det H$.*

Exercice 12 *Soit* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *et* $Sp(A)$ *désigne son spectre. Montrer que :*
1. $Sp(A-\mu I) = \{(\lambda-\mu) : \lambda \in Sp(A) et\ \mu \in \mathbb{C}\}$.
2. $Sp(A^k) = \left\{\lambda^k : \lambda \in Sp(A)\right\}, \ A^k = \underbrace{A \times A \ldots . \times A}_{k\ fois}$
3. $Sp(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in Sp(A)\right\}$ *si* A *est régulière.*
4. *Si* A *est semblable à* B *alors* $Sp(A) = Sp(B)$.
5. $Sp(AB) = Sp(BA), B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Exercice 13 *Montrer que :*
1. *Toute matrice hermitienne (symétrique réelle), est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres associes à des différentes valeurs propres sont orthogonaux.*
2. *Toute matrice hermitienne (symétrique réelle) est définie positive si et seulement ces valeurs propres sont strictement positives et si et seulement si ces déterminants principaux sont strictement positives.*
3. $Sp(A^*) = \left\{\bar{\lambda} : \lambda \in Sp(A)\ \right\}$.
4. *Si* A *est unitaire, alors* $Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\text{: } |\lambda| = 1\}$ *et* $|\det A| = 1$.

Exercice 14 *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Montrer que :*
1. *Si* A *est à diagonale strictement dominante, alors elle est inversible.*
2. *Supposons maintenant que* A *est une matrice symétrique réelle et à diagonale strictement dominante. Alors* A *est définie positive si et seulement si ces éléments diagonaux* $a_{ii} > 0, \forall i = 1, \ldots, n$. *(L'inverse est fausse, donner un contre exemple).*
3. *Soit la matrice réelle*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

a. *Montrer que* A *est à diagonale strictement dominante.*
b. *Déterminer les* 3 *disques* $\mathcal{D}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ *de Guershgorin pour localiser les valeurs propres de la matrice* A.

Exercice 15 *Soit* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *une matrice de projection. Montrer que :*
1- *La matrice* $(I-P)$ *est une matrice de projection et que*

$$\mathbb{R}^n = ImP \oplus Im(I-P).$$

2- Soit la matrice suivante :

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que P est une matrice de projection non orthogonale diagonalisable et à diagonale fortement dominante et réductible.

Exercice 16 (supplémentaire) *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1- Etudier l'irréductibilité de la matrice A suivant le paramètre réel α.
2- Donner les disques de Gershogorin-Hadmard de A pour $\alpha = 2$.
3- Pour quelles valeurs de α, A est à diagonale fortement dominante et irréductible. Déduire dans ce cas que la matrice A est inversible.

Exercice 17 *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, une matrice inversible. Notons par $A^* = (\bar{A}\ )^T$ la matrice adjointe de A. Montrer que :*
1- $Ker(A^*) = (Im(A))^{\perp}$.
2- $Ker(A) = Ker(A^*A)$.
3- A^*A est définie positive.

Exercice 18 *Soit A une matrice hermitienne ($A = A^*$). Montrer que :*
1-A est diagonalisable et son $Sp(A) \subseteq \mathbb{R}$.
2- Déduire que la matrice $(A - iI)$ est inversible.
3- On pose

$$U = (A + iI)(A - iI)^{-1}$$

montrer que

$$\mu = \frac{\lambda + i}{\lambda - i}$$

avec $\lambda \in Sp(A)$, est une valeur propre de U.
4- Montrer que U est une matrice unitaire.