

Université Ferhat Abbas Sétif1
Faculté des sciences
Tronc Commun MI
Décembre 2020

Série d'exercices N°1 d'Analyse1

Exercice 1:

I. Soient A et B deux sous ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

$$(A \cup B)^c = (A)^c \cap (B)^c$$

et

$$(A \cap B)^c = (A)^c \cup (B)^c$$

II. Etablir les égalités suivantes

$$A \setminus B = (A \cap B)^c \cap A = (A \cup B) \setminus B$$

$$(A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) \cup B = (B \setminus A) \cup A$$

Exercice 2: Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, Alors $A \cap B$ est bornée et de plus :

$$\sup(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B)$$

et

$$\inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \inf(\sup A, \sup B)$$

Exercice 3: Pour chacun des ensembles suivants donner si elles existent, la borne inférieure et la borne supérieure le maximum ainsi que le minimum.

$$A =]0, 3], \quad B = [0, 1] \cup]2, 3]$$

$$C = \left\{ \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 2 \right\}, \quad D = \left\{ \frac{1}{x}, \quad 1 < x < 2 \right\},$$

$$E = \left\{ -\frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 2 \right\}, \quad F = \left\{ 2 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Exercice4: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$$

Sans étudier les variations de f trouver le minimum de f sur R

Exercice 5: a/ En utilisant l'inégalité triangulaire $|a + b| \leq |a| + |b|$, montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

b/ Déterminer les ensembles :

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

$$J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$$

Exercice 6: Soit f une application de $E \rightarrow F$. Soient A et B deux parties respectivement de E et F . On définit l'image directe de A par :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, f(x) = y\}$$

et l'image réciproque de B par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

Soient A, A_1, A_2 des parties de E , et B, B_1, B_2 des parties de F . Montrer les relations suivantes :

$$1/ A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$$

$$2/ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$3/ f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$4/ B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

$$5/ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

1

Série 1 (Analyse I) 2020/2021

Ex01: D'abord, si $X \subset E$, on note $X^c = E - X$ le complémentaire de X dans E .

1) On a, $\forall x \in E: x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B$

i.e. $\forall x \in E: x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$
D'où $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in A^c \text{ et } x \in B^c$
 $\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

2) On a, $\forall x \in E: x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B$

i.e. $\forall x \in E: x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$
D'où $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B^c$
 $\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

Rappel:

$\begin{pmatrix} x \in A \cup B & \stackrel{\text{d\'ef.}}{\Leftrightarrow} x \in A \text{ ou } x \in B \\ x \notin A \cup B & \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} x \in A \cap B & \stackrel{\text{d\'ef.}}{\Leftrightarrow} x \in A \text{ et } x \in B \\ x \notin A \cap B & \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{pmatrix}$

3) $A - B = A \cap B^c$?

On a $\forall x \in E: x \in A - B \stackrel{\text{d\'ef.}}{\Leftrightarrow} x \in A \text{ et } x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B^c$
 $\Leftrightarrow x \in A \cap B^c$

i.e. $\forall x \in E: x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$
D'où $A - B = A \cap B^c$.

4) $A - B = (A \cup B) - B$?

• $A - B \subset (A \cup B) - B$: Soit $x \in A - B$, donc $x \in A$ et $x \notin B$.

Comme $A \subset A \cup B$, alors on a $x \in A \cup B$ et $x \notin B$.

D'où $x \in (A \cup B) - B$.

• $(A \cup B) - B \subset A - B$: Soit $x \in (A \cup B) - B$, donc $x \in A \cup B$ et $x \notin B$. Comme $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$; or

[2] $x \notin B$, donc $x \in A$. Par suite, on a $x \in A$ et $x \notin B$,
d'où $x \in A - B$.

- 2^{ème} Méthode:

$$\forall x \in E: x \in (A \cup B) - B \iff x \in (A \cup B) \text{ et } x \notin B$$

↑
d'après (3)

$$\iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin B$$

$$\iff (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin B)$$

contradiction

$$\iff x \in A \text{ et } x \notin B$$

$$\iff x \in A - B$$

$$\text{D'où } (A \cup B) - B = A - B.$$

- 3^{ème} Méthode (facile):

$$\begin{aligned} (A \cup B) - B &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{pm (3)}}}{=} (A \cup B) \cap B^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup \emptyset \\ &= A \cap B^c \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{pm (3)}}}{=} A - B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \cdot (A - B) \cup B &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{pm (3)}}}{=} (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap E \\ &= A \cup B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (B - A) \cup A &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{pm (3)}}}{=} (B \cap A^c) \cup A = (B \cup A) \cap (A^c \cup A) \\ &= (B \cup A) \cap E \\ &= B \cup A = A \cup B. \end{aligned}$$

[3]

Exo2: $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$ bornées, $A \cap B \neq \emptyset$.

- $A \cap B$ est bornée; en effet, comme A, B sont bornées, alors il existe $m, m', M, M' \in \mathbb{R}$ tels que:

$$\begin{cases} \forall a \in A: m \leq a \leq M. \\ \forall b \in B: m' \leq b \leq M'. \end{cases}$$

En posant $\underline{m} = \min\{m, m'\}$, $\overline{M} = \max\{M, M'\}$,

on obtient $\forall x \in A \cap B: \underline{m} \leq x \leq \overline{M}$.

D'où $A \cap B$ est bornée.

- $\sup\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B)$?

D'abord, voici les remarques "importantes":

- Pour montrer que $\boxed{\sup X \leq \alpha}$, il suffit de montrer que α est un majorant de X , car $\sup X$ est le plus petit des majorants de X .
- Pour montrer que $\inf X \geq \beta$, il suffit de montrer que β est un minorant de X , car $\inf X$ est le plus grand des mineurants de X .

Donc il suffit de montrer que $\inf(A \cap B)$ est un majorant de $\{\inf A, \inf B\}$; i.e. il suffit de montrer que $\inf A \leq \inf(A \cap B)$ et $\inf B \leq \inf(A \cap B)$. Ceci signifie encore qu'il suffit de montrer que $\inf A$ est un minorant de $A \cap B$.

[4]

et $\inf B$ est un minorant de $A \cap B$.

En effet, on sait que :

$$\begin{cases} \forall a \in A : a \geq \inf A & (\text{i.e. } \inf A \text{ est un minorant de } A) \\ \forall b \in B : b \geq \inf B & (\text{i.e. } \inf B \text{ " " " " } B) \end{cases}$$

Or $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc, en particulier, on a aussi :

$$\begin{cases} \forall a \in A \cap B : a \geq \inf A \\ \forall b \in A \cap B : b \geq \inf B \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} \inf A \text{ est un minorant de } A \cap B \\ \inf B \text{ " " " " " " } \end{cases}$

• $\inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B)$?

D'abord, voici le rappel suivant :

$$\begin{cases} \bullet \sup(X) = \alpha \iff \begin{cases} \forall x \in X : x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in X : \alpha - \varepsilon < x_0 \end{cases} \\ \bullet \inf(X) = \beta \iff \begin{cases} \forall x \in X : x \geq \beta \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in X : \beta + \varepsilon > x_0 \end{cases} \end{cases}$$

- Comme $A \cap B \neq \emptyset$, alors il existe $x \in A \cap B$.

Par suite, on a $x \leq \sup(A \cap B)$ et $x \geq \inf(A \cap B)$;

i.e. $\inf(A \cap B) \leq x \leq \sup(A \cap B)$. D'où $\inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B)$.

5

• $\sup(A \cap B) \leq \inf \{ \sup(A), \sup(B) \}$?

Il suffit de montrer que $\sup(A \cap B)$ est un minorant de $\{ \sup(A), \sup(B) \}$; car $\inf \{ \sup(A), \sup(B) \}$ est le plus grand des mineurants de $\{ \sup(A), \sup(B) \}$.

C'est-à-dire que, il suffit de montrer que $\sup(A) \geq \sup(A \cap B)$ et $\sup(B) \geq \sup(A \cap B)$.

Ceci signifie encore qu'il suffit de montrer que $\sup(A)$ est un majorant de $A \cap B$ et $\sup(B)$ est un majorant de $A \cap B$.

En effet, on sait que :

$$\begin{cases} \forall a \in A : a \leq \sup(A) \\ \forall b \in B : b \leq \sup(B) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{i.e. } \sup(A) \text{ est un majorant de } A \\ \text{i.e. } \sup(B) \text{ " " " " } B \end{array} \right).$$

Or $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc, en particulier, on a aussi :

$$\begin{cases} \forall a \in A \cap B : a \leq \sup(A) \\ \forall b \in A \cap B : b \leq \sup(B) \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} \sup(A) \text{ est un majorant de } A \cap B. \\ \sup(B) \text{ " " " " } A \cap B. \end{cases}$

==

L'enseignant: Farouk Gherbi.

Solutions

exo3.

1/ $A =]0, 3]$

$$\forall x \in A \quad 0 < x \leq 3$$

$$\Rightarrow \sup A = \max A = 3$$
$$\inf A = 0, \quad \min \nexists$$

2/ $B = [0, 1] \cup [2, 3]$

$$\forall x \in B \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$\sup B = 3 = \max B$$
$$\inf B = 0 = \min B$$

3/ $C = \left\{ \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 2 \right\}$

$$1 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow$$

$$1 \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sup C = \max C = 1$$
$$\inf C = \min C = \frac{1}{2}$$

$$F = \left\{ 2 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\forall y_n \in F; \quad y_n = 2 + \frac{1}{n}$$

(1)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

$$2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$$

$$2 < y_n \leq 3$$

$$\sup F = \max F = 3$$

$$\inf F = 2, \quad \min F \nexists.$$

Q04: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$$

$$= 1 - \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

or $(x+1)^2 + 2 \geq 2$

$$0 < \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) < 1$$

Pour $x = -1$ on a. $f(x) = 1/2$
le min de f sur $\mathbb{R}$
(2)

ex 05 : a/ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$\Rightarrow -|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

$$\begin{cases} |x| - |y| \leq |x - y| & \textcircled{1} \\ \text{et} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y| - |x| \leq |x - y| & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$|x| = |x - y + y|$$
$$\leq |x - y| + |y|$$

par $\textcircled{1}$

$$|y| = |y - x + x|$$
$$\leq |x - y| + |x|$$

par $\textcircled{2}$

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

$$|y| - |x| \leq |x - y|$$

$$\hookrightarrow I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

soit $x \in I \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$

$$x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

$\textcircled{3}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow x \in I.$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow x \in I.$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow I \subset [0, 1[.$$

Réciproquement : Si $0 \leq x < 1$

on prend $x \leq 1 - \frac{1}{n}$

$$n \geq \frac{1}{1-x} \Rightarrow x \in I.$$

Alors $I \subset [0, 1]$

$$J =$$

$$x \in J \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \quad |x| > 0.$$

Si $x \neq 0$.

on prend $n \geq \frac{1}{|x|}$, alors

$$|x| \geq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x \notin \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$$

$$\Rightarrow x \notin J. \quad \Rightarrow \text{finalement}$$

$$J = \{0\}.$$

(4)

Choc:

$$1/ A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$$

$$\forall y \in f(A_1), \exists x \in A_1 / y = f(x)$$

$$\text{or } x \in A_1 \subset A_2 \Rightarrow x \in A_2$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A_2),$$

$$\Rightarrow y \in f(A_2).$$

$$\text{Donc } f(A_1) \subset f(A_2)$$

$$2/ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) ?$$

$$\forall y \in f(A_1 \cap A_2), \exists x \in A_1 \cap A_2 / y = f(x)$$

$$\Rightarrow \exists x \in A_1 / y = f(x) \quad \text{et}$$

$$\exists x \in A_2 / y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(A_1)$$

$$\text{et } y \in f(A_2)$$

$$\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

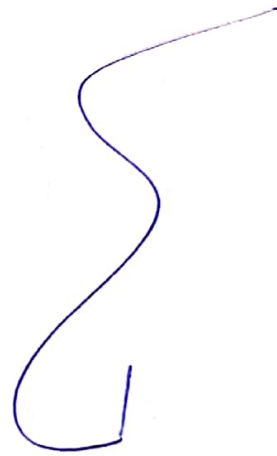
(5)

$$4/ \quad B_1 \subset B_2 \stackrel{s}{\Rightarrow} f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

$$\forall x \in f^{-1}(B_1), f(x) \in B_1$$

$$\text{or } B_1 \subset B_2 \Rightarrow f(x) \in B_2.$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_2)$$



Mme Chergui

(6)