Table des Matières

Chapitre 1

Fonctions réelles d'une variable réelle

1.1 Notions de bases sur les fonctions

Définition 1.1.1. Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : E \to \mathbb{R}$, où E est une partie de $\mathbb{R}$. En général, E est un intervalle ou une réunion d'intervalles. Les éléments de E qui ont une image par f forment l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$. (On appelle E le **domaine de définition** de la fonction f).

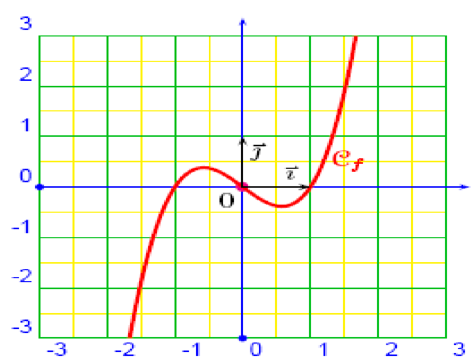
Exemple 1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 1 \geq 0$. Donc $x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[= \mathcal{D}_f$. L'image de 4 par f est $\sqrt{15}$, on dit que 4 est un antécédent de $\sqrt{15}$.

- On appelle **graphe**, ou **courbe représentative**, d'une fonction f définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \ : \ x \in \mathcal{D}_f\}$$

- formé des points $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ du plan muni d'un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exemple 2. Le ghraphe de la fonction $f(x) = x^3 - x$ sur l'intervalle $[-3, 3]$.



En fait, son domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. On remarque que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère orthonormé.

1.1.1 Parité et périodicité

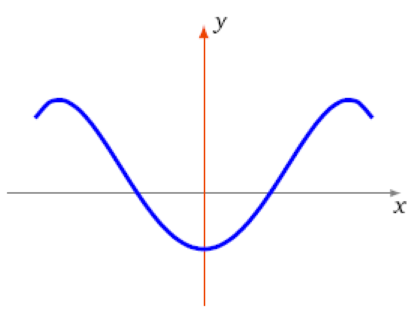
Définition 1.1.2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $[-a, a]$ ou $]-a, a[$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

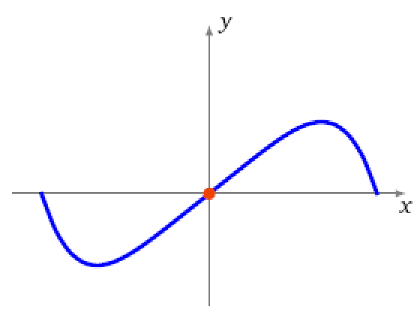
- f est **paire** si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,
- f est **impaire** si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique :

• f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).

• f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).

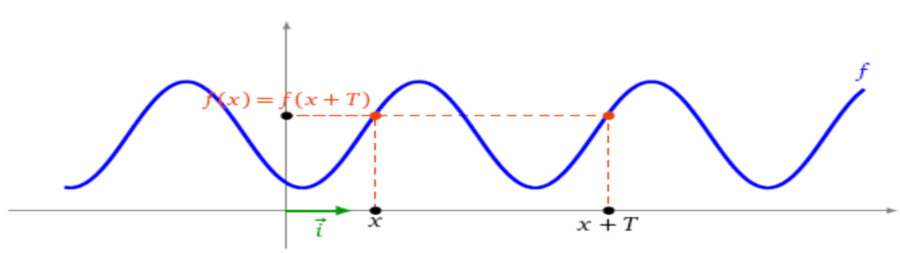




Exemple 3.

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ est impaire.
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.

Définition 1.1.3. Soit $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite **périodique** de période T si $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+T) = f(x)$.



Interprétation graphique : f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$, où $\overrightarrow{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple 4.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π périodiques. La fonction tangente est π périodique.

Définition 1.1.4. (Opérations sur les fonctions) Si f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a alors les résultats suivants :

1. **Somme :** la fonction somme $f+g$ est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. **Produit :** la fonction produit fg est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x).$$

3. **la multiplication de f par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$ est définie par $\lambda.f : I \to \mathbb{R} : (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$ pour tout $x \in I$.

4. **Quotient :** lorsque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est définie pour tout réel x de I par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Définition 1.1.5. (**Restriction**). Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit I_0 un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I. On appelle **restriction** de f à I_0 que l'on note $f\,|_{I_0}$, la fonction définie sur I_0 par :

$$\text{pour tout } x \in I_0,\ f\,|_{I_0}(x) = f(x).$$

Définition 1.1.6. (**Composition de fonctions**) Soit f une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction définie de l'intervalle J de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K de $\mathbb{R}$. La **fonction composée** des fonctions f et g est la nouvelle fonction que l'on écrit $g \circ f$ (et que l'on lit g **rond** f) définie pour tout x dans l'intervalle I par : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, et que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} g \circ f & : & I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K \\ x & \mapsto & f(x) \mapsto g(f(x)). \end{array}$$

1.1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.1.7. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in I \quad f(x) \geq g(x)$
- $f \geq 0$ si $\forall x \in I \quad f(x) \geq 0$
- $f > 0$ si $\forall x \in I \quad f(x) > 0$
- f est dite **constante** sur I si $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) = a$
- f est dite **nulle** sur I si $\forall x \in I \quad f(x) = 0$.

Définition 1.1.8. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :
• f est **majorée** sur I si $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ f(x) \leq M$
• f est **minorée** sur I si $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ f(x) \geq m$
• f est **bornée** sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall x \in I \quad |f(x)| \leq M$.

1.1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 1.1.9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est **croissante** sur I si $\forall x, y \in I\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f est **strictement croissante** sur I si $\forall x, y \in I \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f est **décroissante** sur I si $\forall x, y \in I \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- f est **strictement décroissante** sur I si $\forall x, y \in I \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur I.

1.1.4 Maximum local, Minimum local

Définition 1.1.10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, si f est majorée, on appelle **borne supérieure** de f le nombre réel

$$\sup_I f = \sup \{f(x) \ ; x \in I\}.$$

- On définit de même la borne inférieure.
- On dit que f admet un maximum en a $a \in I$ si $f(a)$ est le maximum de la partie $f(I) = \{f(x) \ ; x \in I\}$.

- On dit que f admet un **maximum local** en $a \in I$ s'il existe un intervalle ouvert U contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de $f(I \cap U)$. On définit de même la notion de minimum et de minimum local.
- Un **extremum** (local) est un maximum (local) ou un minimum (local).

Exemple 5.

1. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors f est bornée. On a $\sup_{]0,1[} f = 1$, mais $\max_{]0,1[} f$ n'existe pas.

On a $\inf_{]0,1[} f = 0$, mais $\min_{]0,1[} f$ n'existe pas.

2. Une fonction peut admettre un maximum en plusieurs points. Ainsi $f(x) = \sin x$ admet un maximum en les points $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1.2 Quelques fonctions usuelles

1) Fonction constante

La fonction constante est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a \end{array}$$

où a est un nombre réel.

2) Fonction identité

La fonction identité est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x. \end{array}$$

La fonction identité n'est rien d'autre qu'une **fonction linéaire** de la forme $f(x) = mx$ dont le coefficient directeur m vaut 1.

3) Fonction puissances entières $n \in \mathbb{N}$

Commençons par rappeler la définition de la puissance entière d'un nombre réel a.

Définition 1.2.11. (Puissance entière) Soient a un réel non nul et n un entier naturel. **La puissance n-ième** de **a** est définie par :

$$\begin{array}{rcl} a^n & = & a \times a \times a \times ... \times a \quad \text{(où } a \text{ est multiplié } n \text{ fois)} \\ \text{Notons que si } n & = & 0, \quad a^0 = 1. \end{array}$$

• La fonction puissance entière peut donc être définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{llll} f & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n. \end{array}$$

Remarque.
1. Si $n = 0$ on retrouve la fonction constante définie plus haut.
2. Si $n = 1$ on retrouve la fonction identité Id définie plus haut.
3. Si $\boldsymbol{n}$ est **pair**, la fonction f est paire.
4. Si n est **impaire**, la fonction f est impaire.
5. Si n est un entier négatif, il faut bien faire attention au domaine de définition qui devient $D_f = \mathbb{R}^*$.

4) Fonction polynôme

$$\begin{array}{llll} f & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \end{array}$$

où les $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des réels (qui peuvent être nuls) appelés coefficients du polynôme.

5) Fonction racine n-ième, puissance rationnelle

On peut alors définir la fonction racine n-ième de la façon suivante :
- Si n est pair :

$$\begin{array}{llll} f & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt[n]{x}, \end{array}$$

- Si n est impair :

$$\begin{array}{llll} f & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt[n]{x}. \end{array}$$

Et d'un autre côté la fonction puissance rationnelle (pour n'importe quels $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{array}{llll} f & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{\frac{p}{q}}. \end{array}$$

Remarque.
1. Noter que si $p = 1$ et $q = 2$ on obtient $\sqrt{a}$ et $a > 0$ qui est **la racine carrée** comme nous la connaissons (mais définie seulement pour $a > 0$).
2. Noter que si $p = 1$ et $q = 3$ on obtient $\sqrt[3]{a}$, et $a > 0$ qui est **la racine cubique** que nous connaissons également (et qui peut être définie sur $\mathbb{R}$).

6) Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien (notée ln) est connue depuis la terminale. Cette fonction peut être construite de plusieurs façon : c'est la primitive de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ (c'est même en fait l'intégrale entre 1 et x de la fonction inverse).

La fonction ln est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x). \end{array}$$

Propriété (Logarithme népérien)

1. Il existe un nombre $e = 2,71828$ tel que $\ln(e) = 1$.

2. Soient a et b deux réels strictement positifs, alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

Cette dernière égalité nous permet d'ailleurs de déduire (en posant $a = b$) que $\ln(1) = 0$.

3. Soient n un entier naturel non nul, et a un réel strictement positif, on a alors :

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \quad \text{et} \quad \ln\left(a^{-n}\right) = -n\ln(a).$$

Définition 1.2.12. (Logarithme de base a) Soient a un réel strictement positif. Pour tout réel x strictement positif, on définit son logarithme de base a noté $log_a(x)$ par

$$log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

7) Fonction exponentielle

Intimement liée à la fonction ln (c'est sa fonction réciproque), la fonction exponentielle est définie comme suit :

$$\begin{array}{cccc} \exp & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \mapsto & e^x. \end{array}$$

Propriété (Exponentielle)

1. Pour tous réels a et b :

$$e^{a+b} = e^a e^b, \; e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

2. Pour tout réel a et pour tout entier naturel n :

$$(e^a)^n = e^{na}, \quad (e^a)^{-n} = \frac{1}{e^{na}}.$$

3. Pour tout réel strictement positif a et pour tout réel b :

$$e^{\ln a} = a, \quad \ln(e^a) = a \text{ et } e^{b \ln a} = a^b.$$

8) Fonctions circulaires (ou trigonométriques)

La trigonométrie est connue depuis le collège. Les formules avec *sinus*, *cosinus* et *tangente*,... sont à connaître par coeur, (voir le dernier chapitre (*Fonctions élémentaires*).

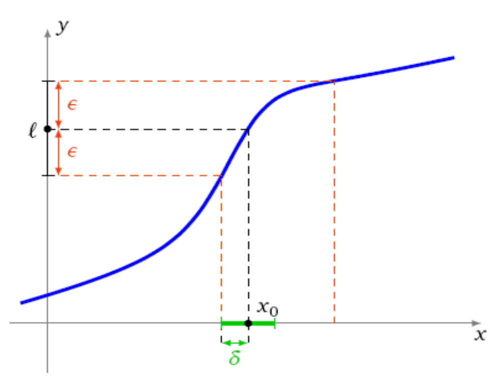
1.3 Limite d'une fonction

Limite finie d'une fonction en un point

Définition 1.3.13. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f$.



Exemple 5.

- $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
- la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Limites infinie d'une fonction en un point

Définition 1.3.14. (**Limite $+\infty$ en un point**) Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A>0 \;\; \exists \delta>0 \;\; \forall x \in I \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=+\infty$.

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A>0 \;\; \exists \delta>0 \;\; \forall x \in I \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<-A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=-\infty$.

Limite en l'infini

Soit Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I=]a,+\infty[$.

Définition 1.3.15. • Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists B>0 \;\; \forall x \in I \;\; x>B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f(x)=\ell$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A>0 \;\; \exists B>0 \;\; \forall x \in I \;\; x>B \Rightarrow f(x)>A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$.

- On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty,a[$.

Exemple 6. On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \bullet \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \bullet \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0.$$

Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a,x_0[\,\cup\,]x_0,b[$.

- On appelle *limite à droite* en x_0 de f la limite de la fonction $f_{|]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^+} f$.
- On définit de même la *limite à gauche* en x_0 de f : la limite de la fonction $f_{|]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^-} f$.
- On note aussi lim $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ pour la limite à droite et lim $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$ pour la limite à gauche.

1.3.1 Propriétés des limites

Proposition 1. Si f admet une limite en x_0, cette limite est unique.

Preuve. La démonstration est identique à celle donnée pour les suites. On procède par l'absurde en supposant que f admet deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$ en x_0. On prend $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{2}$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ implique que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $\delta' > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta'$ implique que $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. On a

$$\ell' - \ell = \left|\ell' - f(x) + f(x) - \ell\right| \leq \left|\ell' - f(x)\right| + |f(x) - \ell|$$

par l'inégalité triangulaire. Si $|x - x_0| < \min\left(\delta, \delta'\right)$, on obtient $\ell' - \ell < 2\dfrac{\ell' - \ell}{2}$, ce qui absurde. ■

Propriétés de la limite d'une fonction

Les propriétés des limites de suites se généralisent facilement au cas des fonctions.

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition 2. Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

- $\lim\limits_{x_0} (\lambda.f) = \lambda.\ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0} (f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$
- Si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell}$

  De plus, si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = 0$.
- Si $\lim\limits_{x_0} f = 0$ et si g est bornée sur un intervalle ouvert contenant x_0 alors $\lim\limits_{x_0} f(x)\, g(x) = 0$.

  Cette proposition se montre de manière similaire à la proposition analogue sur les limites de suites.

  Proposition 3. Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell'$, alors $\lim\limits_{x_0} g \circ f = \ell'$.

  Forme indéterminée. Voici une liste de formes indéterminées :

$$+\infty - \infty; 0 \times \infty; \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; 1^{\infty}; \infty^{0}.$$

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors : $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- Théorème des gendarmes

  Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell$, alors g a une limite en x_0 et $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

- limites usuelles

$$
\begin{array}{rclrcl}
1.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} & = & 1, & 2.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & = & \dfrac{1}{2} \\
3.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} & = & 1, & 4.\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & = & 1 \\
5.\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} & = & 0, & 6.\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x) & = & -\infty \\
7.\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{shx}{x} & = & 1 & 8.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x} & = & 1.
\end{array}
$$

1.3.2 Notation de Landau

Dans ce qui suit, on considère des fonctions f, g, ... à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur un voisinage pointé V d'un point $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Définition 1.3.16. La fonction f est dite négligeable devant g au voisinage de a, s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ de limite nulle en a, telle que $f = \varepsilon.g$ (dans V). On écrit

$$f \underset{a}{\ll} g \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\varepsilon : V \to \mathbb{R} \text{ t.q. } f = \varepsilon.g \text{ et } \lim_a \varepsilon = 0,$$

On appelle $f = o(g)$ la notation de Landau et f$\ll$ g la notation de Hardy.

Définition 1.3.17. On dira que f et g sont équivalentes au voisinage du point a ssi : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$

Notation : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou encore $f(x) \sim g(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

- On démontre facilement que $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.
- Les limites usuelles en 0, nous donnent les équivalents suivants au voisinage de 0 :

$$
\begin{array}{lll}
\bullet \sin x \sim x & \bullet \tan x \sim x & \bullet 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \quad \bullet \ln(1+x) \sim x \\
\bullet [e^x - 1] \sim x & \bullet (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x & \bullet shx \sim x.
\end{array}
$$

Théorème 1.3.18. ***(Généralisation)*** *Plus généralement, au voisinage de a lorsque* $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, *on a :*

$$
\begin{array}{lll}
\bullet \sin f(x) \sim f(x) & \bullet \tan f(x) \sim f(x) & \bullet 1-\cos f(x) \sim \dfrac{f(x)^2}{2} \quad \bullet \ln(1+f(x)) \sim f(x) \\
\bullet \left[e^{f(x)} - 1\right] \sim f(x) & \bullet (1+f(x))^\alpha - 1 \sim \alpha f(x) & \bullet shf(x) \sim f(x).
\end{array}
$$

Preuve. Ces résultats proviennent directement des limites vues dans le cours sur les fonctions usuelles.

1.4 Fonctions continues

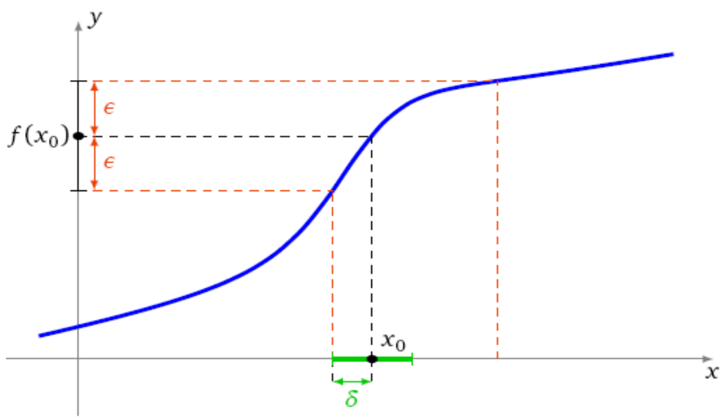
1.4.1 Continuité en un point

Définition 1.4.19. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

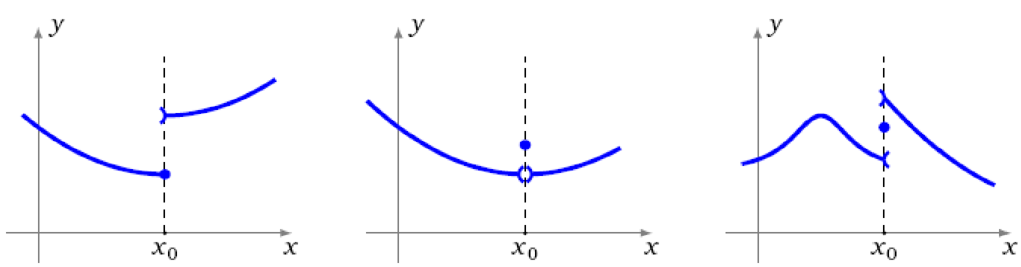
- On dit que f *est continue en un point* $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

  c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).



- On dit que f *est continue sur* I si f est continue en tout point de I.
- une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut. Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



Exemple 7. Les fonctions suivantes sont continues :

- une fonction constante sur un intervalle,
- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
- les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$,

• la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$,

• la fonction exp sur $\mathbb{R}$,

• la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

Par contre, la fonction partie entière E n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, elle est continue en x_0.

• De façon similaire on utiliserait la limite à gauche pour parler de continuité à gauche et de limite à droite pour parler de continuité à droite.

Définition 1.4.20. (Continuité à gauche et à droite)

1. On dit que la fonction f est **continue à gauche** de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0).$$

2. On dit que la fonction f est **continue à droite** de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0).$$

Remarque.

1. On remarque que f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche de x_0.

2. On dit f est continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout point de I.

1.4.2 Discontinuité de première et de seconde espèce

Définition 1.4.21. On dit que f admet une **discontinuité de** 1^{re} **espèce** en a **si** et seulement si :

1. f n'est pas continue en a

2. f admet une limite finie à gauche en a (si f est définie à gauch de a)

3. f admet une limite finie à droite en a (si f est définie à droite de a).

• Si f admet une limite finie à gauche en a et une limite finie à droite en a, on appelle **saut de** f **en** a, le réel $\sigma_f(a)$ défini par :

$$\sigma_f(a) = \lim_{a^+} f - \lim_{a^-} f.$$

• Sous ces hypothèses, f est continue en a si et seulement si : $\sigma_f(a) = 0$.

- Lorsque f n'est pas continue en a et n'admet pas une discontinuité de 1^{re} espèce en a, on dit que f admet une **discontinuité de** 2^{nde} **espèce en** a.

Exemple 7. La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

admet une discontinuité de 2^{nde} espèce en 0.

1.4.3 Propriétés des fonctions continues

Comme pour les limites, nous pouvons énoncer quelques propriétés de continuité.

Propriété 1 (Continuité et opérations sur les fonctions)

Soient f et $g:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0\in I$. On a alors les propriétés suivantes :

- $\lambda.f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$),
- $f+g$ est continue en x_0,
- $f\times g$ est continue en x_0,
- si $g(x_0)\neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0. En conséquence,
- Une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$,
- Toute fonction rationnelle f définie pour tout x dans l'intervalle I de $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes définis sur I avec $Q(x)\neq 0$ sur I, est continue sur I.
- Continuité et composition de fonctions

Soient $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:J\to\mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I)\subset J$. Si f est continue en un point $x_0\in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g\circ f$ est continue en un point x_0.

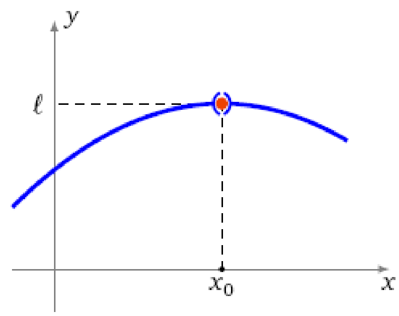
1.4.4 Prolongement par continuité

Définition 1.4.22. Soit I un intervalle, $x_0\in I$ et $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell=\lim\limits_{x_0} f$.
- On définit alors la fonction $g:I\to\mathbb{R}$ en posant pour tout $x\in I$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\neq x_0\\ \ell & \text{si } x=x_0,\end{cases}$$

alors g est continue en x_0 et on l'appelle le **prolongement par continuité** de f en x_0.



Exemple 7. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Alors la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

est un prolongement par continuité de f.

Continuité par morceaux

Définition 1.4.23. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, ..., a_n) \in [a, b]^{n+1}$ tel que :

- $a = a_0 < ... < a_n = b$.
- Pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet une limite finie à droite en a_i et une limite finie à gauche en a_{i+1}.

1.4.5 Continuité uniforme

Définition 1.4.24. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **uniformément continue** sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ \ (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 4. Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

La réciproque de cette proposition est fausse : une fonction f est continue sur I sans être uniformément continue sur I.

Exemple 9. La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. En effet, considérons les suites

$x_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $y_n = n$. On a toujours

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2,$$

bien que $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n}$. Aucun nombre η ne peut correspondre à $\varepsilon = 2$.

Définition 1.4.25. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite k-**Lipschitzienne** d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ si pour tous $x_1,\, x_2 \in I$, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k\,|x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

Toute fonction k-lipschitziene d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, est uniformément continue, puisque pour ε un réel positif donné, on peut choisir $\eta = \varepsilon / k$ indépendamment de x.

Suites et continuité

Proposition 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors :

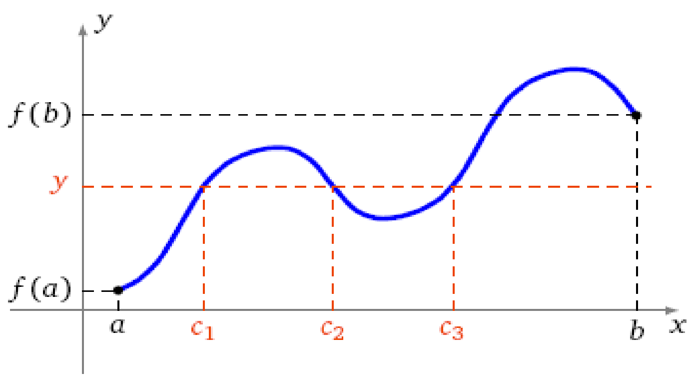
$$f \text{ est continue en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{pour toute suite } (u_n) \text{ qui converge vers } x_0 \\ \text{la suite } \left(f(u_n)\right) \text{ converge vers } f(x_0). \end{array}$$

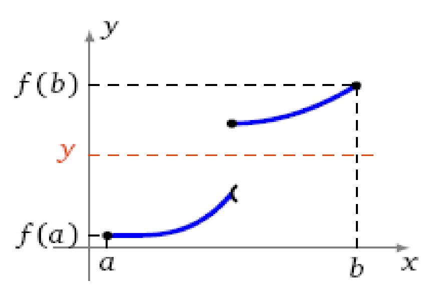
1.4.6 Continuité sur un intervalle

Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.4.26. (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.
Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel c n'est pas nécessairement unique.
De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).





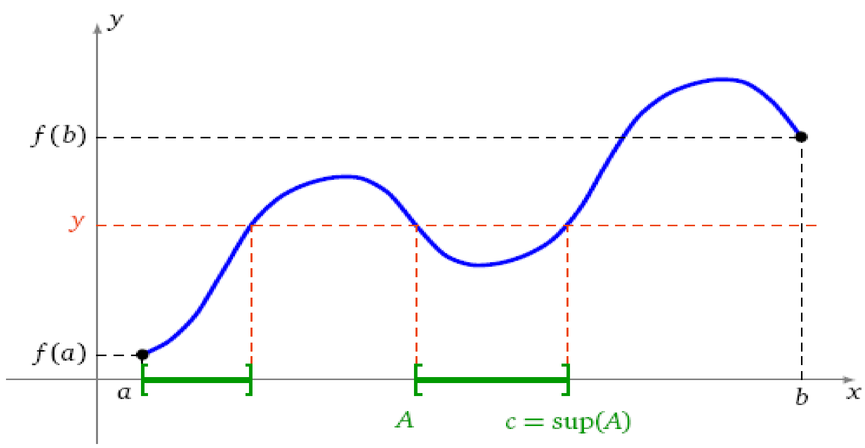
Démonstration. Montrons le théorème dans le cas où $f(a) < f(b)$. On considère alors un réel y tel que que $f(a) \leq y \leq f(b)$ et on veut montrer qu'il a un antécédent par f.

1. On introduit l'ensemble suivant

$$A = \{x \in [a,b] \quad f(x) \leq y\}.$$

Tout d'abord l'ensemble A est non vide (car $a \in A$) et il est majoré (car il est contenu dans $[a,b]$) :

il admet donc une borne supérieure, que l'on note $c = \sup A$. Montrons que $f(c) = y$.



2. Montrons tout d'abord que $f(c) \leq y$. Comme $c = \sup A$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenue dans A telle que (u_n) converge vers c. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \in A$, on a $f(u_n) \leq y$.

D'autre part, comme f est continue en c, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(c)$. On en déduit donc, par passage à la limite, que $f(c) \leq y$.

3. Montrons à présent que $f(c) \geq y$. Remarquons tout d'abord que si $c = b$, alors on a fini, puisque

$f(b) \geq y$. Sinon, pour tout $x \in]c,b]$, comme $x \notin A$, on a $f(x) > y$. Or, étant donné que f est continue en c, f admet une limite à droite en c, qui vaut $f(c)$ et on obtient $f(c) \geq y$.

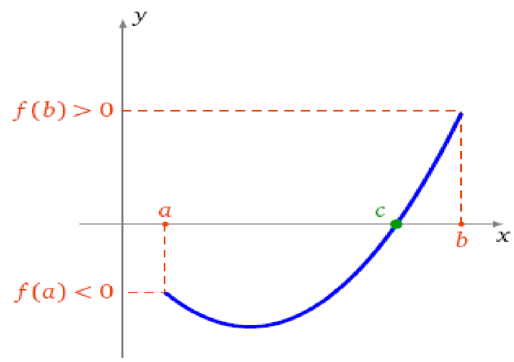
Applications du théorème des valeurs intermédiaires

Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

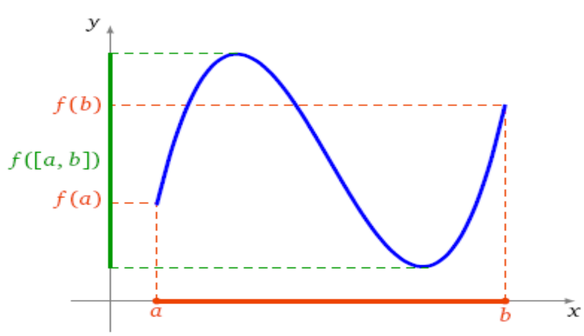
Corollaire 1.

Soit f : $[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

$$\text{Si } f(a).f(b) < 0, \text{ alors il existe } c \in \,]a,b[\, \text{ tel que } f(c) = 0.$$



Démonstration. Il s'agit d'une application directe du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$.
L'hypothèse $f(a).f(b) < 0$ signifiant que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
Remarque. 1. Si f est strictement monotone sur $[a, b]$, le point c est unique.
2. Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.
3. Si f est continue sur un segment I, alors $f(I)$ est un segment.
Corollaire 2.
Soit f : $I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.
Attention ! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (voir la figure ci-dessous).



Démonstration. Soientt $y_1,\ y_2 \in f(I)$; $y_1 \leq y_2$. Montrons que si $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$. Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in I$ tel que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et donc y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et ainsi $y \in f(I)$.

Fonctions continues sur un segment

Théorème 1.4.27. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

- Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a, b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que
- Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$, et elle atteint ses bornes.

- Donc m est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$ alors que M est le maximum.

1.4.7 Fonctions monotones et bijections

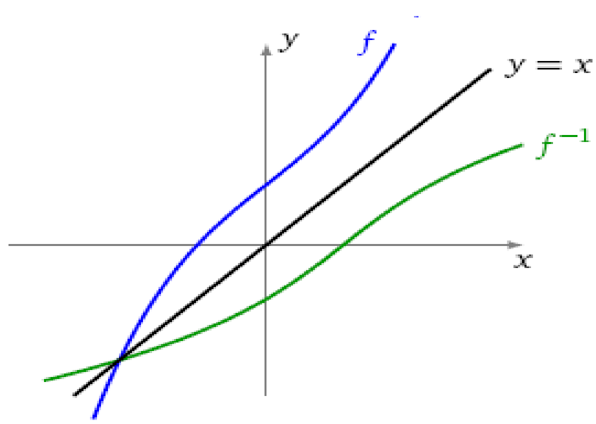
Rappels : injection, surjection, bijection

Définition 1.4.28. Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

- f est **injective** si $\forall x, x' \in E \;\; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
- f est **surjective** si $\forall y \in F \; \exists x \in E \;\; y = f(x)$.
- f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $f \circ g = id_F$ $\exists ! x \in E$ $y = f(x)$.

Proposition 6.
Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.
La fonction g est la **bijection réciproque** de f et se note f^{-1}.
Remarque.

- On rappelle que l'*identité*, $id_E : E \to E$ est simplement définie par $x \to x$.
- $g \circ f = id_E$ se formule ainsi : $\forall x \in E \;\; g(f(x)) = x$.
- Alors que $f \circ g = id_F$ s'écrit : $\forall y \in F \;\; f(g(y)) = y$.
- Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



Fonctions monotones et bijections

Voici un théorème très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 1.4.29. *(Théorème de la bijection) Soit Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors*

1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,

2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f .

En pratique, si on veut appliquer ce théorème à une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, on découpe l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels la fonction f est strictement monotone.

Exemple 10. Considérons la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
La fonction f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$: elle n'est pas même pas injective car un nombre et son opposé ont même carré.
Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $]-\infty, 0]$ d'une part et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones :

$$f_1 : \begin{cases}]-\infty, 0] \to [0, +\infty[\\ x \mapsto x^2 \end{cases} \quad \text{et } f_2 : \begin{cases} [0, +\infty[\to [0, +\infty[\\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

On remarque que $f\left(]-\infty, 0]\right) = f\left([0, +\infty[\right) = [0, +\infty[$. D'après le théorème précédent, les fonctions f_1 et f_2 sont des bijections. Déterminons leurs fonctions réciproques f_1^{-1} : $[0, +\infty[\to]-\infty, 0]$ et $f_2^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$.

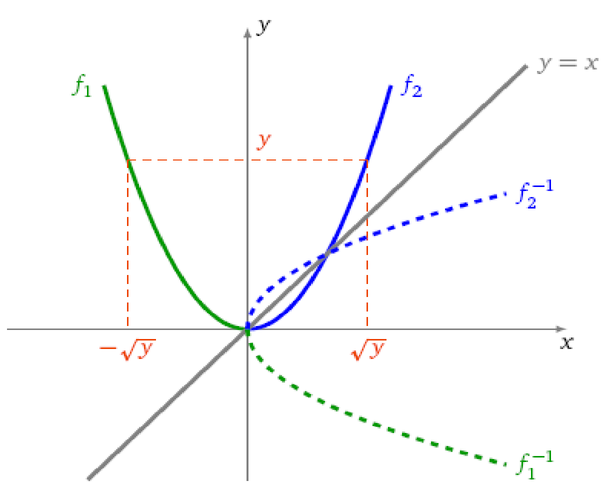
Soient deux réels x et y tels que $y \geq 0$. Alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \text{ ou } x = -\sqrt{y},$$

c'est-à-dire y admet (au plus) deux antécédents, l'un dans $[0, +\infty[$ et l'autre dans $]-\infty, 0]$. Et donc

$$f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y} \text{ et } f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

On vérifie bien que chacune des deux fonctions f_1 et f_2 a le même sens de variation que sa réciproque.



Lemme 1.4.30. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.*

Démonstration. Soient $x,\ x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Si on avait $x < x'$, alors on aurait nécessairement $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$, suivant que f est strictement croissante, ou strictement décroissante. Comme c'est impossible, on en déduit que $x \geq x'$. En échangeant les rôles de x et de x', on montre de même que $x \leq x'$. On en conclut que $x = x'$ et donc que f est injective.

Démonstration du théorème.

1. D'après le lemme précédent, f est injective sur I. En restreignant son ensemble d'arrivée à son image $J = f(I)$, on obtient que f établit une bijection de I dans J. Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble J est un intervalle.

2. Supposons pour fixer les idées que f est strictement croissante.

(a) Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient $y,\ y' \in J$ tels que $y < y'$. Notons

$$x = f^{-1}(y) \in I \quad \text{et} \quad x' = f^{-1}(y') \in I.$$

Alors $y = f(x)$, $y' = f(x')$ et donc

$$\begin{aligned} y &< y' \Longrightarrow f(x) < f(x') \Longrightarrow x < x' \quad \text{(car } f \text{ est strictement croissante)} \\ &\Longrightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(y'), \end{aligned}$$

c'est-à-dire f^{-1} est strictement croissante sur J.

(b) Montrons que f^{-1} est continue sur J. On se limite au cas où I est de la forme $]a, b[$, les autres cas se montrent de la même manière. Soit $y_0 \in J$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut toujours supposer que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. On cherche un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ on ait

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \Longrightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

c'est-à-dire tel que pour tout $x \in I$ on ait

$$y_0 - \delta < f(x) < y_0 + \delta \Longrightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < x < f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$$

Or, comme f est strictement croissante, on a pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} f(x_0 - \varepsilon) &< f(x) < f(x_0 + \varepsilon) \Longrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \\ &\Longrightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < x < f^{-1}(y_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$, on peut choisir le réel $\delta > 0$ tel que

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 - \delta \quad \text{et} \quad f(x_0 + \varepsilon) < y_0 + \delta$$

et on a bien alors pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} y_0 - \delta &< f(x) < y_0 + \delta \Longrightarrow f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon) \\ &\Longrightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < x < f^{-1}(y_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

La fonction f^{-1} est donc continue sur J.

1.5 Exercices Corrigés

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Répondre par **oui** ou **non** aux questions avec des justifications rigoureuses :

(1) $fg = 0 \Rightarrow f = 0 \vee g = 0$.

(2) $f^2 = 0 \Rightarrow f = 0$.

(3) $\sup\limits_{0\leq x\leq 1} (f(x) + g(x)) = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} f(x) + \sup\limits_{0\leq x\leq 1} g(x)$, ($f$ et g supposées aussi bornées).

(4) $\sup\limits_{0\leq x\leq 1} (f(x)\, g(x)) = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} f(x) \sup\limits_{0\leq x\leq 1} g(x)$, ($f$ et g supposées aussi bornées).

(5) f^2 continue$\Rightarrow f$ continue.

(6) La fonction $x \longmapsto x^2$, définie sur $[0, +\infty[$, est paire.

(7) Toute fonction continue sur $]0, 1[$ est bornée.

(8) La fonction partie entière $x \longmapsto [x]$ est strictement croissante.

(9) Supposons que f est continue sur $[0, 1[$, alors

$$f([0, 1[) = [f(0), f(1)[.$$

Solution.

(1) **Faux .** Considèrons les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 2, & x \leq 0. \end{cases}$$

Alors f et g sont non nullles mais leurs produit fg est nul car

$$(fg)(x) = \begin{cases} 1 \times 0, & x > 0, \\ 0 \times 2, & x \leq 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(2) **Vrais.** Montrons que la contraposée est vrais, i.e. montrons que

$$f \neq 0 \Rightarrow f^2 \neq 0 \ \text{ est vraie.}$$

Puisque $f \neq 0$, alors il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Donc $f(x_0)\, f(x_0) = f^2(x_0) \neq 0$.

(3) **Faux .** Ce qui vrai est le suivant

$$\sup_{0\leq x\leq 1} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{0\leq x\leq 1} f(x) + \sup_{0\leq x\leq 1} g(x),$$

mais on n'a pas toujours l'égalité comme le montre l'exemple suivant :
Soient f, g :$[0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = x$ et $g(x) = 1 - x$. Alors

$$\sup_{0\leq x\leq 1}(f(x)+g(x)) = \sup_{0\leq x\leq 1}(1) \neq \sup_{0\leq x\leq 1} f(x) + \sup_{0\leq x\leq 1} g(x) = 1+1 = 2.$$

(4) **Faux .** L'exemple précédent peut être aussi utilisé comme contre exemple dans cette réponse. On a

$$\sup_{0\leq x\leq 1}(f(x)\,g(x)) = \sup_{0\leq x\leq 1}\left(x - x^2\right) = \frac{1}{4} \neq \sup_{0\leq x\leq 1} f(x) \sup_{0\leq x\leq 1} g(x) = 1\times 1 = 1.$$

(5) **Faux .** Par exemple, soit

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ -2, & x < 0. \end{cases}$$

Alors f n'est pas continue (au point 0), mais $f^2(x) = 4$ est continue sur tout $\mathbb{R}$.

(6) **Faux .** On ne peut pas parler de f paire ou impaire dans ce cas. Le problème principal est qu'elle est définie sur $[0,+\infty[$ et donc si $x \in [0,+\infty[$, alors $-x \notin [0,+\infty[$ (sauf si $x = 0$). Donc $f(-x)$ n'a pas de sens.

(7) **Faux .** Par exemple, $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1[$, mais elle n'est pas bornée car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

(8) On a pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $x \geq y$, on a $[x] \geq [y]$. Ceci veut dire que $x \mapsto [x]$ est croissante. Cependant, elle n'est pas strictement croissante. Par exemple, $0,6 > 0,5$ mais $[0,6] = [0,5] = 0$ et donc on n'a pas $[0,6] > [0,5]$.

(9) **Faux .** Par exemple, $x \mapsto f(x) = 1 - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0,1[$, mais, on voit facilement que

$$f([0,1[) =]0,1] \neq [f(0), f(1)[= [1,0[.$$

Donc, on doit ajouter des hypothèses pour que la réponce soit vraie. Par exemple, dans notre cas, puisque f esr décroissante (et continue) sur $[0,1[$, alors $f([0,1[) = \left]\lim\limits_{x\to 1} f(x), f(0)\right] =]0,1]$ (on a utilisé la limite car on n'a pas défini f en 1). Si f est croissante et continue sur $[a,b[$, alors $f([a,b[) = \left[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$.

Une fonction continue et ctoissante sur $[a,b]$ vérifie $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ (voir le cours pour les autres propriétés qui sont similaires).

Exercice 2. Montrer que toute fonction définie sur intervalle symétrique peut s'écrire sous la forme : fonction paire+fonction impaire

Application : $e^x = ... + ...$

Solution. $D_f = -D_f \Rightarrow \forall x \in D_f;\ -x \in D_f$.

Soit $f(x) = g(x) + h(x)$ tel que g paire et h impaire

$\forall x \in D_f; -x \in D_f \Rightarrow f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) + (-h(x)) = g(x) - h(x)$

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = g(x) + h(x) \\ \text{et} \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x) + f(-x) = 2g(x) \\ \text{et} \\ f(x) - f(-x) = 2h(x) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x) \\ \text{et} \\ \frac{f(x)-f(-x)}{2} = h(x) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\Rightarrow f(x) = \underbrace{\left(\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right)}_{\text{impaire}}}$$

$$\begin{aligned} D_{e^{(\cdot)}} &= \mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ \Rightarrow -D_{e^{(\cdot)}} = -\left(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+\right) \\ &= \left(-\mathbb{R}^-\right) \cup \left(-\mathbb{R}^+\right) = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R} = D_{e^{(\cdot)}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^x = \underbrace{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}_{ch(x)} + \underbrace{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)}_{sh(x)} = ch(x) + sh(x).$$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(px)}{\sin(qx)},\ \ (p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad 2)\ \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad 3)\ \lim_{x\to 0} \sin(x)\ln(x)$$

$$4)\ \lim_{x\to 0} \ln\left(1+x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad 5)\ \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] \quad 6)\ \lim_{x\to 0} \frac{\left[\frac{1}{x}\right]+x}{\left[\frac{1}{x}\right]-x}$$

$$7)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+x+5}{2x^2+80} \quad 8)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-3}{e^{3x}+4} \quad 9)\ \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x\right)$$

$$10) \lim_{x\to 0} x \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad 11)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x+2x\right)}{x} \quad 12)\ \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x.$$

Solution.

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(px)}{\sin(qx)} = \lim_{x\to 0} \frac{px \times \dfrac{\sin(px)}{px}}{qx \times \dfrac{\sin(qx)}{qx}} = \lim_{x\to 0} \frac{px \times 1}{qx \times 1} = \frac{p}{q}.$$

$$2)\ 0 \le \lim_{x\to 0} \left|x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \lim_{x\to 0} x^2 \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \lim_{x\to 0} x^2 \times 1 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} -1 &\le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} (-x)^2 \le \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le \lim_{x\to 0} x^2 \\ &\Rightarrow 0 \le \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \end{aligned}$$

3) $\lim_{x\to 0}\sin(x)\ln(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)(x\ln(x)) = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} x\ln(x)\right) = 1\times 0 = 0.$

$$\begin{aligned} 4)\ -1 \quad &\leq \quad \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq -1 \Rightarrow -\ln\left(1+x^2\right) \leq \ln\left(1+x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq \ln\left(1+x^2\right) \\ &\Rightarrow \quad -\lim_{x\to 0}\ln\left(1+x^2\right) \leq \lim_{x\to 0}\ln\left(1+x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq \lim_{x\to 0}\ln\left(1+x^2\right) \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{x\to 0}\ln\left(1+x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln\left(1+x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5)\ \frac{1}{x}-1 \quad &< \quad \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1-x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-x) \leq \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad 1 \leq \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1. \end{aligned}$$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{1}{x}\right]+x}{\left[\frac{1}{x}\right]-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left[\frac{1}{x}\right]+x^2}{x\left[\frac{1}{x}\right]-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+0}{1-0} = 1.$

7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+80} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2}{2x^2} = \frac{-3}{2}.$

8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-3}{e^{3x}+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\left(1-3e^{-2x}\right)}{e^{3x}\left(1+4e^{-3x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\frac{\left(1-3e^{-2x}\right)}{\left(1+4e^{-3x}\right)}$

$$\begin{aligned} \text{mais } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \quad &= \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0, \\ &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-3}{e^{3x}+4} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\frac{\left(1-3e^{-2x}\right)}{\left(1+4e^{-3x}\right)} = 0\times 1 = 0. \end{aligned}$$

9) On a pour tout x positif : $2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x \geq 2\sqrt{x}-\sqrt{x} = \sqrt{x}.$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x\right) = +\infty.$

10) La réponse est 0, trouvez la !

11) La réponse est 1, trouvez la !

12) Puisque on va prendre la limite en $+\infty$, alors $1+\frac{2}{x}$ va être strictement positif (pour x assez larges), d'où on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x \quad &= \quad e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^{2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}} \to e^2, \\ \text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \quad &= \quad 1. \text{ Ainsi } \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2. \end{aligned}$$

Exercice 4. Calculer les limites suivantes en utilisant les fonctions équivalentes :

$$1)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}}{\sin\frac{1}{x}},\quad 2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1}{\cot g\frac{1}{x}},\quad 3)\ \lim_{x\to0}\frac{2-\cos x-\cos 2x}{tg^2x},$$

$$4)\ \lim_{x\to1}\frac{\sin 2\pi x}{\sin 5\pi x},\quad 5)\ \lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}tg\left(\frac{2x}{4x+3}\right),\quad 6)\ \lim_{x\to0^+}\log x.\log\left[1+\log\left(1+x\right)\right].$$

Solution.

1) On pose $y=\dfrac{1}{x}\Rightarrow y\underset{x\to-\infty}{\to}0^-$, alors

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{y\to0^-}\frac{\sqrt{y^3\left(1+\frac{1}{y}\right)}}{\sin y}.$$

On sait que $\sin y\underset{0}{\sim}y$ au voisinage de 0, donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}}{\sin\frac{1}{x}} &= \lim_{y\to0^-}\frac{\sqrt{y^3\left(1+\frac{1}{y}\right)}}{\sin y}=\lim_{y\to0^-}\frac{|y|\sqrt{(y+1)}}{y}\\ &= \lim_{y\to0^-}\frac{-y\sqrt{y+1}}{y}=-1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1}{\cot g\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1}{\frac{1}{tg\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}tg\frac{1}{x}\left(x^4+1\right)=0\times\infty\quad(F.I)\\ &= \lim_{\substack{y\to0^-\\ y=\frac{1}{x}}}tgy\left(\frac{1}{y^4}+1\right)=\lim_{y\to0^-}y\left(\frac{y^4+1}{y^4}\right)=-\infty,\quad\left(tgy\underset{0}{\sim}y\right).\end{aligned}$$

3) On sait que $1-\cos x\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2}x^2$, $1-\cos(2x)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2}(2x)^2$ et $tgy\underset{0}{\sim}y$ au voisinage de 0, donc

$$\lim_{x\to0}\frac{2-\cos x-\cos 2x}{\tan^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(2x)^2}{x\times x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{5}{2}x^2}{x^2}=\frac{5}{2}.$$

4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin 2\pi x}{\sin 5\pi x}=\frac{0}{0}\ (F.I)$. On pose $y=x-1\Rightarrow y\underset{x\to1}{\to}0$, donc

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin 2\pi x}{\sin 5\pi x}=\lim_{y\to0}\frac{\sin 2\pi(y+1)}{\sin 5\pi(y+1)}=\lim_{y\to0}\frac{\sin 2\pi y}{-\sin 5\pi y}=\lim_{y\to0}\frac{2\pi y}{-5\pi y}=\frac{-2}{5}.$$

$$5)\ \lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\tan\left(\frac{2x}{4x+3}\right)=\lim_{\substack{y\to0\\ y=\frac{1}{x}}}y\tan\left(\frac{\frac{2}{y}}{\frac{4}{y}+3}\right)=0\times\tan\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

6) On sait que $\log(1+y) \underset{0}{\sim} y$, donc $\log[1+\log(1+x)] \underset{0}{\sim} \log(1+y)$ et on a

$$\begin{aligned}\log x.\log[1+\log(1+x)] &\sim (\log x)\log(1+x) = (x\log x)\frac{\log(1+x)}{x}\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\log x.\log[1+\log(1+x)] = \lim_{x\to 0^+}\left[(x\log x)\frac{\log(1+x)}{x}\right] = 0\times 1 = 0.\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} x^2-3x, & x\in\,]-\infty,2[\\ 2x+b, & x\in[2,+\infty[\end{cases}$$

Déterminer le nombre réel b de sorte que h soit continue en 2.
Solution. h et continue en 2 ssi $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = h(2)$. On a

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} h(x) = 2^2-3\times 2 = 4-6 = -2\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}2} h(x) = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}(2x+b) = 4+b\\ h(2) = 2\times 2+b = 4+b\end{array}\right\}\Rightarrow 4+b=-2\Rightarrow \boxed{b=-6}.$$

Exercice 6. Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\sqrt{x},\ x>0,\quad f_2(x)=e^{\frac{1}{x}},\ x\in\,]0,1],\quad f_3(x)=\sin\sqrt{x},\ x>0,\quad f_4(x)=\frac{1}{x},\ x\in[1,+\infty[.$$

Solution.

1) f est uniformément continue. En effet, on sait que $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \le \sqrt{|x-y|}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$.

Par définition, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ ssi

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+\colon\ \left(|x-y|<\alpha\Rightarrow\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|<\varepsilon\right).$$

Soit $\varepsilon>0$. Si $\alpha=\varepsilon^2$, alors pour tous x et y positifs on aura

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\le\sqrt{|x-y|}\le\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon.$$

Ainsi f est uniformément continue.

2) f n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$. On doit montrer que

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\alpha>0,\ \exists x,y\in\,]0,1]\ :\ \left(|x-y|<\alpha\wedge\left|e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{y}}\right|\ge\varepsilon\right).$$

On prend

$$x_n=\frac{1}{\ln n}\in\,]0,1]\ \text{ et } y_n=\frac{1}{\ln(n+1)}\in\,]0,1],\ \text{où } n\ge 4.$$

D'autre part, puisque $\ln(n+1)>\ln n$, alors

$$\left|\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right| = \frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} < \alpha \ \text{ pour } n\ge N=\left[e^{\frac{1}{\alpha}}\right]+1.$$

De plus, $\left|e^{\ln n} - e^{\ln(n+1)}\right| = |n - n - 1| = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\exists\varepsilon &= 1 > 0,\ \forall\alpha > 0,\ \exists n \geq \max\left(4, \left[e^{\frac{1}{\alpha}}\right] + 1\right),\ x_n, y_n \in \left]0, 1\right] : \\ &\left(|x - y| < \alpha \wedge \left|e^{\frac{1}{x_n}} - e^{\frac{1}{y_n}}\right| \geq 1\right).\end{aligned}$$

3) f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer ceci. par définition, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*\text{: } \left(|x - y| < \alpha \Rightarrow \left|\sin\sqrt{x} - \sin\sqrt{y}\right| < \varepsilon\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|\sin\sqrt{x} - \sin\sqrt{y}\right| &= \left|2\sin\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2}\cos\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right| \leq \left|2\sin\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2}\right| \\ &\leq 2\frac{\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|}{2} = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x - y|}.\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = \varepsilon^2$.

4) f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$ (Il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$).

Exercice 7. Etudier dans chacun des cas suivants si la fonction f est prolongeable par continuité

$$1) f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x}, \quad 2)\ f(x) = \sin x \sin\frac{1}{x}, \quad 3)\ f(x) = \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{1 - \cos x}\ \ (\alpha \in \mathbb{R}\ ; \alpha \geq 2;\ x \in [-\pi, \pi]).$$

Solution.

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire, elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elle admet une limite finie à droite en 0. Or

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}{x} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, le prolongement par continuité de f est la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos\sqrt{|x|}}{|x|} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire.

L'inégalité $|\sin u| \leq 1$, vraie pour tout réel u, implique

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 0 \leq |f(x)| \leq |\sin(x)|.$$

Il résulte que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, donc f est prolonbeable par continuité en 0 et son prolongement g défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = f(x) \quad \text{et} \quad g(0) = 0.$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3) f est définie si $1-\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi, \quad (k\in\mathbb{Z})$.

Donc $D_f = [-\pi,\pi]-\{0\}$
Pour étudier le prolonbeable par continuité de f sur D_f on calcule :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{2\frac{x^2}{4}} \quad \left(\text{car } \sin x \underset{0}{\sim} x\right)\\ &= \lim_{x\to 0} 2x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

- Si $\alpha = 2$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2\sin\frac{1}{x} \quad \nexists$.
- Si $\alpha > 2$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x} = 0$.

Alors on peut prologer f par continuité dans le cas où $\alpha > 2$ et son prolongement g défini par

$$\forall x\in[-\pi,\pi]-\{0\}, \; g(x) = f(x) \quad \text{et} \quad g(0)=0.$$

Exercice 8. Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$ telle que $\forall x\in[0,1]$, $f(x)\in[0,1]$. Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=c$.

Solution. La fonction φ féfinie sur $[0,1]$ par $\varphi(x) = x - f(x)$ est continue sur $[0,1]$, car elle est la différence de deux fonctions continues sur cet intervalle. Donc, l'image $\varphi([0,1])$ est un segment contenant en particulier $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. Or $\varphi(0) = -f(0)$ est négatif ou nul et $\varphi(1) = 1-f(1)$ est positif ou nul. D'après théorème de la valeur intermédiaire, il résulte

$$\exists c\in[0,1], \varphi(c) = 0, \quad \text{c'està-dire} \quad \exists c\in[0,1], \; f(c) = c.$$

Exercice 9. Montrer que l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

admet au moins une racine entre 0 et 1. La racine est-elle unique ?

Solution. Soit $f(x) = x^3-3x+1$ qu'on définit sur $[0,1]$. Elle est continue sur $[0,1]$ car c'est un polynôme. De plus, on a $f(0)=1$ et $f(1)=-1$. Donc par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un $c\in]0,1[$ tel que $f(c)=0$.

La solution est unique entre 0 et 1 car la fonction est strictement monotone sur $]0,1[$, elle est strictement décroissante comme on peut facilement le montrer.

Exercice 10. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que f est bijective sur un intervalle qu'on déterminera. Donner explicitement la fonction f^{-1}.

Solution. Deux cas sont à examiner, $x\geq 0$ et $x<0$.

1) Si $x\geq 0$, alors $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. On voit bien que f est continue sur $[0,+\infty[$. Montrer qu'elle strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On écrit $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$. On a donc

$$\begin{aligned} x &> y \Rightarrow 1+x > 1+y \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+y} \Rightarrow -\frac{1}{1+x} > -\frac{1}{1+y} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x} > 1 - \frac{1}{1+y} \Leftrightarrow f(x) > f(y). \end{aligned}$$

Donc f est bien strictement croissante. On a aussi $f([0, +\infty[) = [0, 1[$. Ainsi f est une bijection entre $[0, +\infty[$ et $[0, 1[$.

Trouver f^{-1} dans ce cas. On a, pour $x \geq 0$ et $y \in [0, 1[$,

$$\frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y + xy \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

et donc $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$.

2) Si $x < 0$, alors $f(x) = \frac{x}{1-x}$. f est continue sur $]-\infty, 0]$ et on peut montrer facilement qu'elle est strictement croissante sur cet intervalle et que $f(]-\infty, 0]) =]-1, 0[$. Donc f est une bijection entre $]-\infty, 0]$ et $]-1, 0[$. on trouve $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$.

Finalement, f est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]-1, 1[$. La fonction réciproque f^{-1} et donnée par $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

Exercice 11. Soit l'application f définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

a) f est-elle injective?

b) f est-elle surjective?

c) Soit les deux ensembles A et B tels que $A = [1, 2]$ et $B = [1, +\infty[$. Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

Solution.

a) f est-elle injective ?

1ère méthode : on a $0 \neq -1$, mais $f(0) = f(-1) = 1$, donc f n'est pas injective.

2ème méthode : soit x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^2+x_1+1} &= \frac{1}{x_2^2+x_2+1} \Leftrightarrow x_1^2+x_1+1+ = x_2^2+x_2+1 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -(x_2+1). \end{aligned}$$

Donc f n'est pas injective.

b) f est-elle surjective?

f est surjective ssi $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ /\ y = f(x)$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2+x+1} \Leftrightarrow yx^2 + yx + y - 1 = 0,$$

$$\text{on a } \triangle = y^2 - 4y(y-1) = -3y^2 + 4y = y(4-3y).$$

Si $y \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$ $\triangle < 0$;
Donc l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution, par suite f n'est pas surjective.

c) • On a $A = [1,2]$, alors $f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R}\ /\ x \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned} x &\in A \Leftrightarrow 1 \le x \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x^2 \le 4 \Leftrightarrow 2 \le x^2 + x \le 6 \\ &\Leftrightarrow 3 \le x^2 + x + 1 \le 7 \Leftrightarrow \frac{1}{7} \le \frac{1}{x^2+x+1} \le \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow f(A) = \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right]. \end{aligned}$$

• $B = [1, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{R}\ /\ f(x) \in B\} = \left\{x \in \mathbb{R}\ /\ \frac{1}{x^2+x+1} \in B\right\}. \\ \frac{1}{x^2+x+1} &\in B \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+x+1} \ge 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x + 1 \le 1 \Leftrightarrow x^2 + x \le x(x+1) \le 0 \\ &\Rightarrow x \in [-1, 0], \quad \text{d'où } f^{-1}(B) = [-1, 0]. \end{aligned}$$

Université Ferhat Abbas Sétif 1
Faculté des sciences
Département deTronc Commun MI
Janvier 2021

Série d'exercices N°3 d'Analyse1

Exercice 1: Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}},\quad 2)\ f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right),\quad 3)\ f(x) = \sqrt{\cos 2x},$$
$$4)\ f(x) = x^x,\quad 5)\ f(x) = \frac{1}{1-[x]}.$$

Où [ ] désigne la partie entière de x.

Exercice 2:

a) Calculer les limites suivantes

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+80},\quad 2)\ \lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right),\quad 3)\ \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right],$$
$$4)\ \lim_{x\to 0} x^3\ln\left(\sqrt[3]{1+2/x^3}\right),\quad 5)\ \lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x\right).$$

b) Calculer les limites suivantes en utilisant les fonctions équivalentes :

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x},\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{2-\cos x-\cos 2x}{\tan^2 x},\quad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{\sin 5\pi x},$$
$$4)^*\ \lim_{x\to 0^+}\ln x.\ln\left[1+\ln(1+x)\right].$$

Exercice 3: Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

1) Quel est le domaine de définition de f ? Etudier sa patité.

2) Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice 4: Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} x^2-3x, & x\in\left]-\infty,2\right[\\ 2x+b, & x\in\left[2,+\infty\right[\end{cases}$$

Déterminer le nombre réel b de sorte que h soit continue en 2.

Exercice 5: Etudier dans chacun des cas suivants si la fonction f est prolongeable par continuité

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, 2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, 3) $f(x) = \dfrac{x^{\alpha} \sin \frac{1}{x}}{1-\cos x}$ $(\alpha \in \mathbb{R}\ ; \alpha \geq 2;\ x \in [-\pi, \pi])$.

Exercice 6. Montrer que l'équation

$$1 + \sin x - x^2 = 0$$

admet au moins une racine entre 0 et π.

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles telle que $f(1) = f(-1)$.
Montrer qu'il existe un nombre $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = f(c-1)$.

Exercice 8. Soit la fonction f définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

a) Montrer directement que f est strictement monotone.

b) En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Rappel: limites usuelles

$$\begin{aligned}
&1)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, && 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \\
&3)\ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, && 4)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \\
&5)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, && 6)\ \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty, \\
&7)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{shx}{x} = 1, && 8)\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1. \quad 9)\ \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0.
\end{aligned}$$

Les limites usuelles en 0, nous donnent les équivalents suivants au voisinage de 0 :

$\bullet \sin x \sim x$ $\quad \bullet \tan x \sim x$ $\quad \bullet\ 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ $\quad \bullet \ln(1+x) \sim x$

$\bullet [e^x - 1] \sim x$ $\quad \bullet (1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$ $\quad \bullet\ shx \sim x$.

Université Ferhat Abbas Sétif1
Faculté des sciences
Département deTronc Commun MI
Janvier 2021

Corrigé type Série d'éxercices N°3 Analyse1

Exercice 1:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}$,

f est définie$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{2-x} \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \\ x \leq 2 \\ \sqrt{x}+\sqrt{2-x} \neq 0 \end{array} \right.$

or, pour $0 \leq x \leq 2$, $\sqrt{x}+\sqrt{2-x} \geq 0$, et $\sqrt{x}+\sqrt{2-x} = 0$ si $x = 0$ et $x = 2$,

ce qui est impossible. Donc $D_f = [0, 2]$.

2) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$,

f est définie$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2} > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in [-1, 1] \\ x^2 \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left]-1, 1\right[$.

3) $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$,

f est définie$\Leftrightarrow \cos 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] + 2k\pi$.

Donc $D_f = \left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

4) $f(x) = x^x$,

On a par dédinition, si $a > 0$, alors $\underline{a^x = e^{x \ln a}}$.

Donc si $x > 0$, alors $x^x = e^{x \ln x}$. Donc $D_f = \left]0, +\infty\right[$,

(mais attention dans ce cas le x qui doit être positif est celui de la base pas celui de la puissance).

il faut aussi savoir que

(1) $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ et indépendent de x.

(2) $x \mapsto x^p$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ si $p \in \mathbb{Z}$ et indépendent de x.

(3) $x \mapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$ et indépendent de x.

5) $f(x) = \dfrac{1}{1-[x]}$,

f est définie$\Leftrightarrow$ $1-[x]\neq 0 \Leftrightarrow x\notin [1,2[$, car $[x]=1 \Leftrightarrow x\in[1,2[$. Donc $D_f =]-\infty,1[\cup[2,+\infty[$.

Exercice 2: a)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+x+5}{2x^2+80}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2}{2x^2}=\dfrac{-3}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on a

$$0\leq \lim_{x\to 0}\left|x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \lim_{x\to 0}x^2\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \lim_{x\to 0}x^2\times 1=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

ou)

$$\begin{aligned}-1 &\leq \cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1 \Rightarrow -x^2\leq x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x)^2\leq \lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq \lim_{x\to 0}x^2\\ &\Rightarrow 0\leq \lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0.\end{aligned}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-1 &< \left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}\Rightarrow 1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-x)\leq \lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1\\ &\Rightarrow 1\leq \lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1\Rightarrow \lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.\end{aligned}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\ln\left(\sqrt[3]{1+2/x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^3\ln\left(1+2/x^3\right)^{\frac{1}{3}}=\lim\limits_{x\to 0}x^3\dfrac{1}{3}\ln\left(1+2/x^3\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3}\dfrac{\ln\left(1+2/x^3\right)}{2/x^3}=\dfrac{2}{3}.\quad\left(\text{car }\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\right).$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x)$. On a pour tout x positif :

$$2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x\geq 2\sqrt{x}-\sqrt{x}=\sqrt{x}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x\right)=+\infty$.

b) Calculer les limites suivantes en utilisant les fonctions équivalentes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\dfrac{0}{0}\,(FI)$, on sait que : $tg2x\underset{0}{\sim}2x$, $\left(\text{puisque }\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1\right)$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}\underset{0}{\sim}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\cos x-\cos 2x}{\tan^2 x}=\dfrac{0}{0}\,(FI)$.

On sait que $1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow 1-\cos(2x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}(2x)^2$ et $\tan y \underset{0}{\sim} y$, donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-\cos x-\cos 2x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(2x)^2}{x\times x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}x^2}{x^2} = \frac{5}{2}.$$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{\sin 5\pi x} = \frac{0}{0}\ (FI)$.

On pose $y = x-1 \Rightarrow y \underset{x\to 1}{\to} 0$, et $x = y+1$, donc

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{\sin 5\pi x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin 2\pi(y+1)}{\sin 5\pi(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin 2\pi y}{-\sin 5\pi y} = \lim_{y\to 0}\frac{2\pi y}{-5\pi y} = \frac{-2}{5}.$$

$$\left(\text{car} : \sin y \underset{0}{\sim} y,\quad \sin(\alpha+\pi) = -\alpha.\right)$$

4) $^*\lim_{x\to 0^+}\ln x.\ln[1+\ln(1+x)] = -\infty\times 0\ (FI)$.

On sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\ln x.\ln[1+\ln(1+x)] = \lim_{x\to 0^+}\ln x.\ln[1+x]$$
$$= \lim_{x\to 0^+}(\ln x).(x) = 0 \qquad (\lim\text{ite usielle})$$

Exercice 3: Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

1) $D_f = \left\{x\in\mathbb{R}\ /x\neq 0 \text{ et } \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0}_{\text{vraie}}\right\} \Leftrightarrow x\neq 0$

$$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[\, \Rightarrow \boxed{D_f = \,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[}.$$

2) $\forall x\in D_f;\ x\neq 0 \Leftrightarrow -x\neq 0 \Leftrightarrow -x\in D_f \Rightarrow D_f$ est symetrique

- $\forall x \in D_f\ ;\ f(-x) = \frac{1}{-x}\ln\left(\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}\right) = \frac{1}{-x}\ln\left(\frac{e^{-x}+e^{+x}}{2}\right) = -f(x)$

  $\Rightarrow$ f est impaire.

3) $\lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(\ln e^x-\ln 2)$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(x-\ln 2) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln 2}{x}\right) = 1$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1}.$

Exercice 4: Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \in \left]-\infty, 2\right[\\ 2x + b, & x \in \left[2, +\infty\right[\end{cases}$$

• h est continue en $2 \Leftrightarrow \lim_{x \overset{\leq}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 2} h(x) = h(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \overset{\leq}{\to} 2} h(x) = 2^2 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2 \\ \lim_{x \overset{\geq}{\to} 2} h(x) = h(2) = 2 \times 2 + b = 4 + b \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -6}.$$

Exercice 5: Etudier dans chacun des cas suivants si la fonction f est prolongeable par continuité.

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

• $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Donc le prolongement continu de f, noté $\widetilde{f}$, est donné par

$$\widetilde{f}(x) \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $D_f = \mathbb{R}^*$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$,

En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} &= +\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^+} f(x) = 0, \quad \text{et} \\ \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} &= -\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^-} f(x) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Doù f n'admet pas un prolongement par continuité en 0.

(On peut bien entendu prolonger f par continuité en 0 à droite

et on peut aussi prolonger à gauche de 0).

3) $f(x) = \dfrac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x}$ $(\alpha \in \mathbb{R}\,;\alpha \geq 2;\ x \in [-\pi, \pi])$.

• f est définie si $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Donc $D_f = [-\pi, \pi] - \{0\}$.

• Pour étudier le prolonbeable par continuité de f sur D_f on calcule :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{2\frac{x^2}{4}} \quad \left(\text{car } \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \text{ et } \sin x \underset{0}{\sim} x\right)$$
$$= \lim_{x\to 0} 2x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}.$$

• Si $\alpha = 2$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2\sin\frac{1}{x} \;\nexists.$

• Si $\alpha > 2$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x} = 0.$

Alors on peut prologer f par continuité dans le cas où $\alpha > 2$ et son prolongement g défini par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x}, & \text{si } x \in [-\pi,\pi] - \{0\}, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 6. posons $\boxed{f(x) = 1 + \sin x - x^2}$. f est définie, continue sur $[0,\pi]$ et on a

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0.$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiares : $\exists c \in]0,\pi[: f(c) = 0.$

Exercice 7*. Posons

$$g(x) = f(x) - f(x-1) \quad \text{sur} \quad [0,1]$$

Alors g est continue sur $[0,1]$. De plus

$$g(0) = f(0) - f(-1) \quad \text{et} \quad g(1) = f(1) - f(0).$$

Puisque $f(1) = f(-1)$, alors $g(0) = -g(1)$ et donc $g(0)\,g(1) < 0$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiares :

$$\exists c \in]0,1[: g(c) = 0, i.e\ \exists c \in]0,1[: f(c) = f(c-1).$$

Exercice 8. Soit la fonction f définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

a) Montrons que f est strictement monotone.

Soit $(x_1,x_2) \in [0,1]\times[0,1]$, supposons que $x_1 > x_2$. On a

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)},$$

donc le signe de $f(x_1) - f(x_2)$ est celui de $(1 - x_1x_2)$, mais

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 1 \text{ donc: } 1 - x_1 x_2 \geq 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0.$$

f est alors strictement croissante, donc f est strictement monotone.

b) f étant continue sur $[0,1]$, strictement monotone donc elle est bijective de $[0,1]$ sur $f([0,1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Déterminons f^{-1} :

f^{-1} est définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ à valeurs dans $[0,1]$, continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. De plus par définition on a pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $y \in [0,1]$:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Rightarrow y = ?$$

$$\text{donc } x = \frac{y}{1+y^2} \Leftrightarrow xy^2 - y + x = 0$$

ce qui donne pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ une unique solution : $y = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{2x} \in \left]0,1\right]$.

D'où $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{2x}$.

- **Rappel:** limites usuelles

$$\begin{array}{rclrcl}
1) \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} & = & 1, & 2) \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & = & \dfrac{1}{2} \\
3) \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} & = & 1, & 4) \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & = & 1 \\
5) \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} & = & 0, & 6) \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) & = & -\infty \\
7) \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{shx}{x} & = & 1, & 8) \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} & = & 1. \\
9) \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) & = & 0. & & &
\end{array}$$

- Les limites usuelles en 0, nous donnent les équivalents suivants au voisinage de 0 :

$$\bullet \sin x \sim x \quad \bullet \tan x \sim x \quad \bullet 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \bullet \ln(1+x) \sim x$$

$$\bullet [e^x - 1] \sim x \quad \bullet (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad \bullet shx \sim x.$$